ŠESTNAJSTO MEDNARODNO TEKMOVANJE ŠTUDENTOV MATEMATIKE

Med 25. in 30. julijem 2009 je bilo v Budimpešti šestnajsto tekmovanje študentov matematike. Prvega tekmovanja leta 1994 v Bolgariji se je udeležilo le nekaj deset študentov iz vzhodnoevropskih držav. Predlani je tekmovalo 249 študentov, lani 283, letos pa že 347 študentov s skoraj vseh celin. Tekmovanje kljub zahtevnim nalogam in visokim standardom pravičnosti pri popravljanju ostaja zelo prijetno in sproščeno. Tudi letos ni manjkalo nogometno tekmovanje, kjer so naši študentje v hudi konkurenci zmagali.

Slika 1. Slovenska ekipa: Peter Muršič, Gašper Zadnik, David Gajser, Urban Jezernik in Špela Špenko.

Slovensko ekipo so sestavljali David Gajser, Urban Jezernik, Špela Špenko in Gašper Zadnik z Univerze v Ljubljani in Peter Muršič z Univerze na Primorskem. Kljub zelo težkim nalogam so dosegli odlične rezultate: Urban

Jezernik in Špela Špenko sta dobila drugo nagrado, David Gajser in Gašper Zadnik tretjo nagrado, Peter Muršič pa je dobil pohvalo.

Študentje so tekmovali in bivali v zelo lepem in funkcionalnem kampusu budimpeštanske univerze Eötvös Loránd ob zahodnem bregu Donave.

Letos se je število tekmovalcev bistveno povečalo, za popravljanje pa smo imeli vodje ekip na voljo en dan manj, zato smo zmanjšali število nalog. Tako so študentje dva zaporedna dneva reševali vsak dan po pet (namesto šest) nalog. Naloge so točkovno enakovredne, njihova teža pa praviloma narašča z zaporedno številko. Tudi letos so se le redki prebili čez četrto nalogo. Prvouvrščeni Aleksander Efimov iz Moskovske državne univerze Lomonosov je zbral 80 % vseh točk, polovico točk pa je zbralo 82 (od 347) študentov. Aleksander je zmagal že tretjič zapored, leta 2006 pa se je kot bruc uvrstil na drugo mesto.

Zelo veliko informacij o letošnjem in o preteklih tekmovanjih, vključno z nalogami, rešitvami in rezultati, lahko najdete na spletni strani organizatorja profesorja Johna Jayna iz University Collega v Londonu: `http://www.imc-math.org.uk/`.

Vodje ekip nekaj mesecev pred tekmovanjem organizatorju predlagamo naloge. Nato ožja skupina izkušenih bivših tekmovalcev izbere približno petdeset najbolj primernih. Dan pred tekmovanjem na skoraj celodnevnem sestanku z glasovanjem izberemo naloge za oba dneva.

Tekmovanje se pravilom začne z lažjo ogrevalno nalogo. Bralce Obzornika vabim, da preizkusijo svoje znanje analize in poskušajo odgovoriti na naslednji vprašanji:

Prvi dan, prva naloga: *Naj bosta* $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funkciji, za kateri velja* $f(q) \leq g(q)$ *za vsako racionalno število* q*. Ali od tod sledi, da je* $f(x) \leq g(x)$ *za vsak realen* x*, če dodatno privzamemo, da sta funkciji* f *in* g

(a) nepadajoči?

(b) zvezni?

Pred popravljanjem se vodje ekip razdelimo v skupine po nalogah in poskušamo po pregledu manjšega vzorca nalog določiti orientacijski točkovnik. Vsako nalogo neodvisno pregledata vsaj dve vodji ekip, ki morata na koncu uskladiti končno oceno. Če pride do pritožb, je predpisan poseben postopek, ki zagotovi zares pravično oceno.

Vsako leto nas presenetijo nekatere zelo originalne rešitve, ki pa pogosto niso povsem do konca dodelane. Ker gre za zelo dobre študente, je včasih zelo težko ločiti študente, ki z besedami „brez škode za splošnost lahko privzamemo, da . . . “ zaobidejo premislek, ki ga ne znajo narediti, in študente,

Slika 2. Nagrade so podelili med zelo prijetno vožnjo z ladjo po Donavi.

ki zelo dobro poznajo konkretno področje in so zato takšni premisleki rutinski in odveč. Letos nam je pri popravljanju delala hude težave naslednja razmeroma enostavna naloga iz linearne algebre:

Prvi dan, druga naloga: *Naj bodo A, B in C kvadratne realne matrike enake velikosti, pri čemer je matrika A obrnljiva. Če je $(A-B)C = BA^{-1}$, pokaži, da je $C(A-B) = A^{-1}B$.*

Uradna rešitev upošteva dejstvo, da je levi inverz matrike hkrati tudi desni inverz. Če enakosti $(A-B)C = BA^{-1}$ na obeh straneh prištejemo $AA^{-1} = I$, dobimo ekvivalentno enakost $(A-B)(C+A^{-1}) = I$, zato je tudi $(C+A^{-1})(A-B) = I$. To pa je bilo treba pokazati.

Več študentov je napisalo, da lahko brez škode za splošnost privzamemo, da so kakšne od matrik v nalogi simetrične ali obrnljive, prav nobeden pa ni tega dokazal. S tem so si zelo olajšali nalogo. Kar nekaj časa nam je vzelo, da smo izdelali dokaz (ki je težji kot rešitev naloge), kjer zaporedje obrnljivih matrik, ki ustreza dani enakosti, konvergira k neobrnljivi matriki, ki izpolnjuje iskano zvezo. Prav tako smo se zelo težko odločili, kako oceniti rešitve, ki privzamejo, da je kakšna od dejansko obrnljivih matrik (recimo $A - B$ ali $C + A^{-1}$) obrnljiva.

Pogosto se uštejemo tudi pri težavnosti nalog. Letos tako noben od študentov ni prišel niti blizu rešitvi naslednje naloge:

Prvi dan, četrta naloga: *Naj bo $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ polinom s kompleksnimi koeficienti in $1 = c_0 \geq c_1 \geq \ldots \geq c_n \geq 0$ konveksno zaporedje realnih števil (to pomeni, da je $2c_k \leq c_{k-1} + c_{k+1}$ za $k = 1, 2, \ldots, n-1$). Pokaži, da za polinom $q(z) = c_0 a_0 + c_1 a_1 z + \cdots + c_n a_n z^n$ velja*

$$\max_{|z| \leq 1} |q(z)| \leq \max_{|z| \leq 1} |p(z)| .$$

Meni osebno je bila najbolj všeč naslednja naloga:

Drugi dan, tretja naloga: *Naj bosta A in B kvadratni kompleksni matriki, za kateri velja $A^2 B + B A^2 = 2ABA$. Pokaži, da za dovolj veliko naravno število k velja $(AB - BA)^k = 0$.*

Naša študentka Špela Špenko je čudovito in zelo kratko rešitev dobila s pomočjo znanih dejstev o nilradikalih.

Ena od lepših uradnih rešitev pa uporabi le znanje linearne algebre: Najprej pokažimo, da komutator $X = AB - BA$ komutira z A:

$$AX - XA = (A^2 B - ABA) - (ABA - BA^2) = A^2 B + BA^2 - 2ABA = 0 .$$

Ker je

$$X^{m+1} = X^m (AB - BA) = A(X^m B) - (X^m B) A ,$$

je sled matrike X^{m+1} enaka 0 za vse $m \geq 0$. Sledi matrik X, X^2, …, X^n so vsote ustreznih potenc lastnih vrednosti matrike X. Zato morajo biti vse lastne vrednosti ničelne in matrika X je nilpotentna.

Marjan Jerman

MATEMATIČNO RAZISKOVANJE NA MARSU

V okviru DMFA Slovenije smo poleti že četrto leto zapored organizirali MARS – MAtematično Raziskovalno Srečanje, namenjeno širšemu krogu srednješolcev. Srečanje je potekalo od 16. do 22. avgusta na Fakulteti za matematiko, naravoslovje in inf. tehnologije v Kopru. Vsebinski poudarek srečanja je na ustvarjalnem raziskovanju matematičnih problemov in njihovega ozadja, ne pa na tehnikah reševanja tekmovalnih nalog.