Leibnizev harmonični trikotnik

mag. Sonja Rajh
Zavod RS za šolstvo

Povzetek

Pascalov aritmetični trikotnik in Leibnizev harmonični trikotnik sta trikotni shemi števil, ki imata neskončno mnogo vrstic. Oba trikotnika sta simetrična glede na navpično simetralo. Števila, ki nastopajo v obeh trikotnikih, so med seboj povezana na zanimiv način.

Pascalov aritmetični trikotnik je v našem šolskem prostoru precej znan in se z njim pogosto srečajo že osnovnošolci, ko preiskujejo zanimive lastnosti števil v njem, srednješolci pa ga uporabljajo predvsem kot pomoč pri računanju binomskih koeficientov.

Leibnizev harmonični trikotnik je morda še marsikje prezrt, čeprav se tudi v njem skrivajo mnoge zanimivosti. V prispevku bomo nakazali možnosti za preiskovalne aktivnosti v Leibnizevem harmoničnem trikotniku za učence v 3. VIO osnovne šole in v srednji šoli.

Ključne besede: Pascalov (aritmetični) trikotnik, Leibnizev (harmonični) trikotnik, preiskovanje, vzorci števil.

Potrebno predznanje učencev: poznavanje obratne vrednosti števil, znanje seštevanja in odštevanja ulomkov z različnimi imenovalci, poznavanje Pascalovega (aritmetičnega) trikotnika in lastnosti števil v njem.

Leibniz Harmonic Triangle

Abstract

Pascal's arithmetic triangle and the Leibniz harmonic triangle are triangular arrays of numbers with an infinite number of rows. Both triangles are symmetrical on either side of the perpendicular bisector. The numbers appearing in both triangles are linked to one another in an interesting way.

Pascal's arithmetic triangle is rather well known in Slovenian schools and is often encountered by primary school pupils when inquiring about the interesting properties of the numbers in it, whereas secondary school students mostly use it as an aid in calculating binomial coefficients.

The Leibniz harmonic triangle is perhaps still overlooked in many schools despite the many interesting features it contains. This paper will indicate the possibilities for carrying out inquiry activities in a Leibniz harmonic triangle for pupils in the 3rd educational triad of primary school.

Keywords: Pascal's (arithmetic) triangle, Leibniz (harmonic) triangle, inquiry, number patterns.

Pupils' required prior knowledge: knowledge of multiplicative inverses for numbers, knowledge of adding and subtracting fractions with unlike denominators, knowledge of Pascal's (arithmetic) triangle and of the properties of the numbers in it.

Uvod

Preiskovalnih aktivnosti v Leibnizevem harmoničnem trikotniku smo se lotili, ker smo v letu 2016 obeleževali 300. obletnico smrti in 370. obletnico rojstva nemškega matematika in filozofa Gottfrieda Wilhelma Leibniza. Nismo pa pričakovali, da nas bo več različnih poti preiskovanja pripeljalo do Pascalovega aritmetičnega trikotnika.

Zato priporočamo, da pred preiskovalnimi aktivnostmi v Leibnizevem (harmoničnem) trikotniku učenci spoznajo in podrobno preiščejo Pascalov (aritmetični) trikotnik.

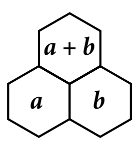
Ker v Leibnizevem harmoničnem trikotniku oziroma Leibnizevem trikotniku nastopajo ulomki, so zapisane aktivnosti primerne za učence 3. VIO osnovne šole in srednje šole.

Leibnizev trikotnik

$$\frac{1}{1}$$
$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{5} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{5}$$
$$\frac{1}{6} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{60} \quad \frac{1}{60} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{6}$$
$$\frac{1}{7} \quad \frac{1}{42} \quad \frac{1}{105} \quad \frac{1}{140} \quad \frac{1}{105} \quad \frac{1}{42} \quad \frac{1}{7}$$

Slika 1: Leibnizev trikotnik

Leibnizev trikotnik (Slika 1) ima podobno strukturo kot Pascalov trikotnik, le da se n-ta vrstica Leibnizevega trikotnika prične in tudi konča z obratno vrednostjo števila n, posamezno število v notranjosti Leibnizevega trikotnika je dobljeno kot vsota obeh števil pod njim. Torej velja:



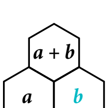
Z Leibnizevim trikotnikom lahko nadgradimo znanje učencev o Pascalovem trikotniku in njihovo sposobnost preiskovanja. Tukaj imajo učenci več težav z računanjem. Tudi zato, ker v Leibnizevem trikotniku nastopajo ulomki. Predlagamo, da učenci najprej izpolnijo robna polja (polja, v katerih se vrstica začne in konča).

$$\frac{1}{1}$$
$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{3} \qquad \frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{4} \qquad\qquad \frac{1}{4}$$

Slika 2: Vpisano je le prvo in zadnje število v vsaki vrstici Leibnizevega trikotnika

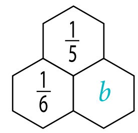
Največja težava se pojavi pri izpolnjevanju polj v notranjosti sheme (Slika 2). Če imajo učenci izpolnjena robna polja, želijo izpolnjevati polja v notranjosti od zgoraj navzdol. A to s seštevanjem ne gre.

Če je zgornje število vsota spodnjih dveh, bomo enega od spodnjih neznanih števil dobili kot razliko med zgornjim in znanim spodnjim številom.



$$b = (a + b) - a$$

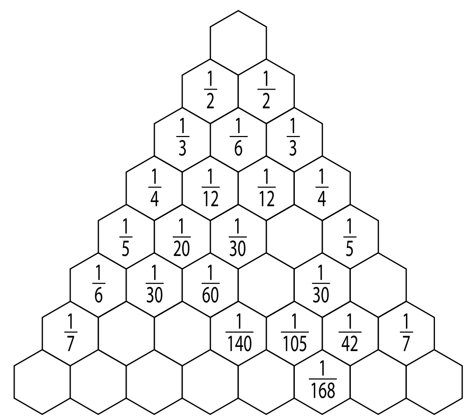
Npr.:



$$b = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{6}{30} - \frac{5}{30} = \frac{1}{30}$$

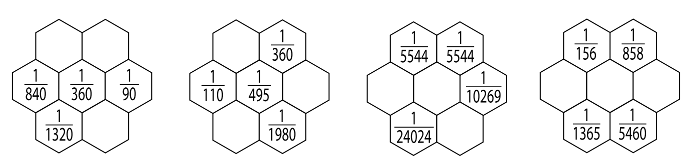
Predlagamo, da učenci nekaj začetnih primerov izračunajo »peš«, nato si pomagajo z žepnim računalom. Opozorimo jih, da morajo ulomek, preden ga vpišejo v shemo, še okrajšati.

Na drug način pa se lahko izpolnjevanja sheme in preiskovanja lotijo tako, da s pomočjo sheme, v kateri so vpisana le nekatera števila (Glejte Sliko 3 in Učni list za preiskovanje), ugotovijo in ubesedijo pravilo, po katerem so nanizana števila ter po ugotovljenem pravilu dopolnijo manjkajoča števila v shemi in zapišejo še nekaj naslednjih vrstic Leibnizevega trikotnika.



Slika 3: Shema za preiskovanje

Po ugotovljenem pravilu naj učenci dopolnijo še nekatere izseke iz Leibnizevega trikotnika (Slika 4), s pomočjo katerih preverimo, ali razumejo, kako dopolnjujejo shemo.

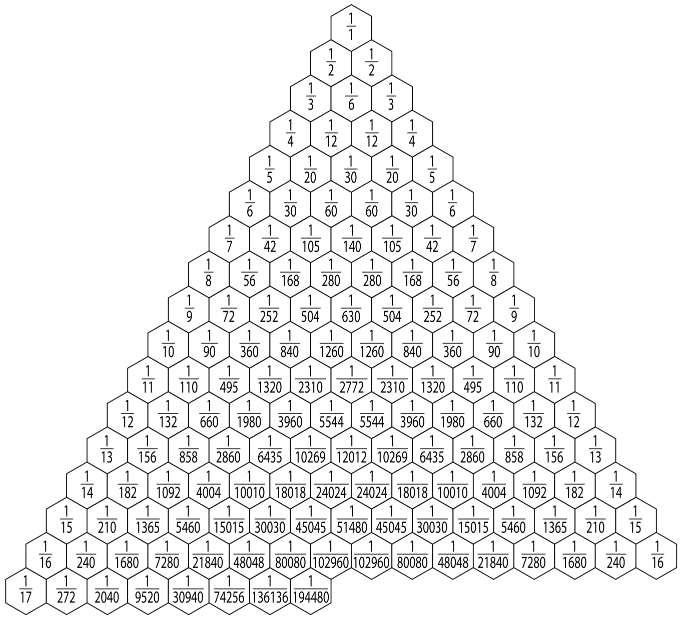


Slika 4: Posamezni izseki iz Leibnizevega trikotnika

Ko učenci izpolnijo shemo Leibnizevega trikotnika (Slika 5), naj ugotavljajo odnose med števili v njem.

Ugotovimo, da v Leibnizevem trikotniku nastopajo t. i. enotski ulomki oziroma Egipčanski ulomki (ulomki, ki imajo v števcu število 1). Podobno kot Pascalov trikotnik je tudi Leibnizev trikotnik simetričen, saj za seštevanje velja komutativnost (vsako število v Leibnizevem trikotniku je namreč vsota števil pod njim, čeprav so učenci števila določevali z odštevanjem).

Znotraj posamezne vodoravne vrstice se proti sredini vrstice vrednost ulomkov manjša in najmanjše število v vrstici je tik ob somernici ali na njej. Podobno se vrednost ulomkov v vsaki naslednji vodoravni vrstici manjša glede na prejšnjo (zgornjo) vrstico.



Slika 5: Izpolnjena shema Leibnizevega trikotnika

Če smo pred Leibnizevim trikotnikom izvajali aktivnosti s Pascalovim trikotnikom, bodo učenci po analogiji samodejno iskali podobne povezave med števili znotraj sheme kot so jih našli v Pascalovem trikotniku.

Lastnosti števil po vrsticah

Ugotovimo, da so vsi imenovalci v n-ti vrstici Leibnizevega trikotnika večkratniki števila n.

Poševne vrstice:

- V prvi poševni vrstici je zaporedje enotskih ulomkov: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \dots$
- V drugi poševni vrstici so števila enaka produktu levega in zgornjega števila. (**Produktu**, čeprav smo ulomke dobili z **odštevanjem**!). Učenci ugotovijo, da velja $\frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{7}{42} - \frac{6}{42} = \frac{1}{42}$ in tudi $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$. Ker se imenovalca zaporednih ulomkov v prvi poševni vrstici razlikujeta za 1, bo tudi razlika števcev ulomkov, ki so razširjeni na skupini imenovalec, enaka 1. Učenci 9. razreda in srednješolci bi morali to znati utemeljiti tudi s pomočjo algebre:

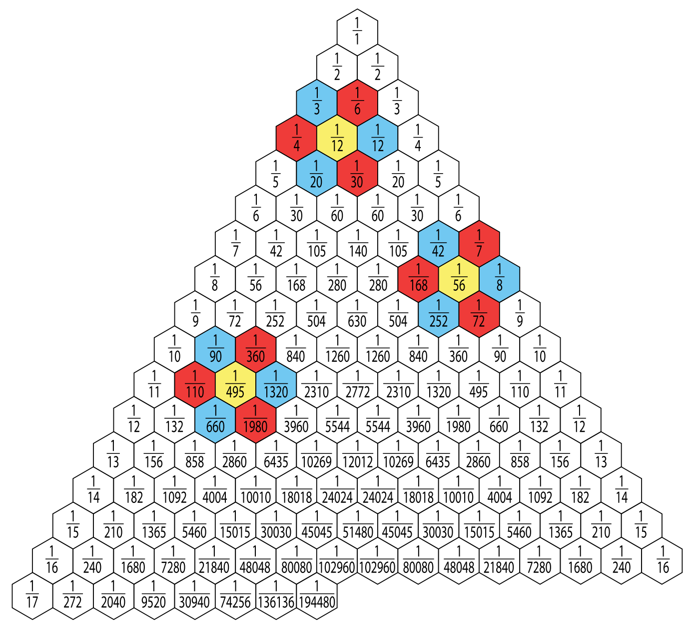
$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} = \frac{a+1}{a(a+1)} - \frac{a}{a(a+1)} = \frac{1}{a(a+1)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a+1}$$

Števila v drugi poševni vrstici $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42} \dots$ tvorijo tako imenovano Teleskopsko zaporedje, katerega vsota je enaka 1. Srednješolci bi znali ugotoviti, da velja:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots =$$
$$= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots =$$
$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots =$$
$$= \frac{1}{1} = 1$$

Cvetovi

Po analogiji preiskovanj v Pascalovem trikotniku na shemi Leibnizevega trikotnika obarvamo nekaj cvetov s šestimi cvetnimi listi (Slika 6).



Slika 6: Cvetovi na Leibnizevem trikotniku

Ugotovimo, da tudi za cvetove v Leibnizevem trikotniku velja ista ugotovitev kot za Pascalov trikotnik: Zmnožek števil v rdečih cvetnih listih je enak zmnožku števil v modrih cvetnih listih.

Primer za cvet v zgornjem delu sheme, kjer so ulomki z manjšimi imenovalci:

Zmnožek števil v rdečih cvetnih listih: $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{30} = \frac{1}{720}$

Zmnožek števil v modrih cvetnih listih: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{720}$

Primer za cvet v spodnjem delu sheme, kjer so ulomki z večjimi imenovalci:

Zmnožek števil v rdečih cvetnih listih: $\frac{1}{360} \cdot \frac{1}{110} \cdot \frac{1}{1980} = \frac{1}{78408000}$

Zmnožek števil v modrih cvetnih listih: $\frac{1}{90} \cdot \frac{1}{660} \cdot \frac{1}{1320} = \frac{1}{78408000}$

Čeprav so imeli na razpolago žepno računalo, so nekateri učenci za ugotavljanje veljavnosti zapisane ugotovitve rajši računali »peš«. Števila v imenovalcih ulomkov so razcepili na manjša števila (lahko bi jih tudi na praštevila) in primerjali, ali imata imenovalca za zmnožek rdečih in modrih cvetnih listov enake faktorje. Isti primer:

Rdeči:

$$\frac{1}{360}\cdot\frac{1}{110}\cdot\frac{1}{1980}=\frac{1}{6\cdot 6\cdot 10}\cdot\frac{1}{11\cdot 10}\cdot\frac{1}{9\cdot 220}=\frac{1}{6\cdot 6\cdot 10\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 220}$$

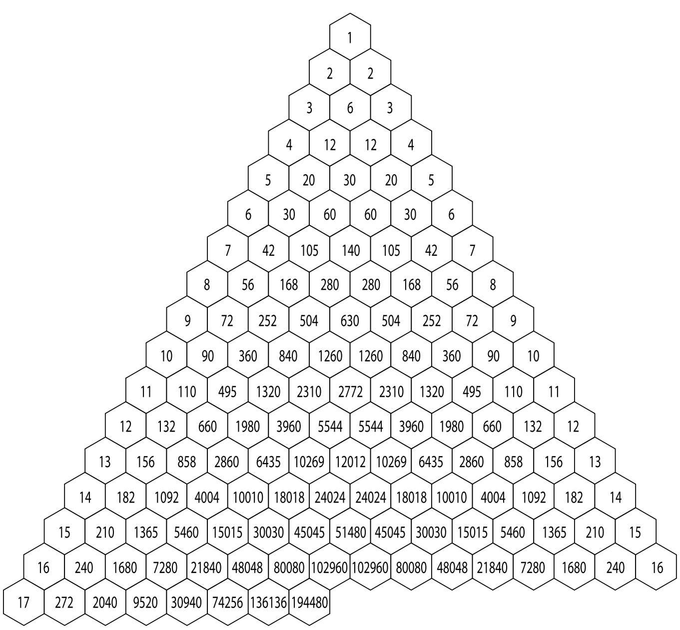
Modri:

$$\frac{1}{90}\cdot\frac{1}{660}\cdot\frac{1}{1320}=\frac{1}{9\cdot 10}\cdot\frac{1}{6\cdot 10\cdot 11}\cdot\frac{1}{6\cdot 220}=\frac{1}{9\cdot 10\cdot 6\cdot 10\cdot 11\cdot 6\cdot 220}$$

Ulomka, ki imata enak števec, v imenovalcu pa zmnožek enakih faktorjev $6\cdot 6\cdot 9\cdot 10\cdot 10\cdot 11\cdot 220$, sta enaka. Zato je zmnožek števil v rdečih cvetnih listih enak zmnožku števil v modrih cvetnih listih.

»Shema z imenovalci«

Ker so števci vseh ulomkov v Leibnizevem trikotniku enaki ena, se v nadaljevanju osredotočimo samo na imenovalce. Da bo shema bolj pregledna in da bomo lažje preiskovali, predlagamo, da v novo trikotno shemo zapišemo samo števila, ki so v imenovalcih ulomkov in se pri tem zavedamo, da to ni več Leibnizev (harmonični) trikotnik. Za lažje opisovanje ga poimenujmo »shema z imenovalci« (Slika 7).



Slika 7: Shema, v kateri so zapisani le imenovalci ulomkov iz Leibnizevega trikotnika (na kratko »shema z imenovalci«)

Učenci so se preiskovanja v novem trikotniku »shema z imenovalci« lotili na več različnih načinov oziroma so ubrali različne poti preiskovanja:

1. pot preiskovanja: **Vodoravne vrstice**

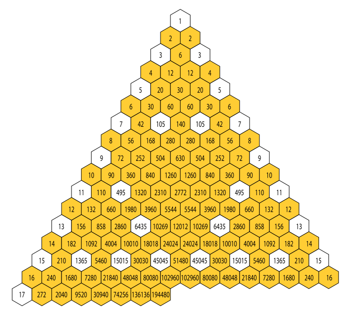
Učenci so izhajali iz ugotovitve, da so vsi imenovalci ulomkov v n-ti vrstici Leibnizevega trikotnika večkratniki števila n. Iz tega sledi, da so v »shemi z imenovalci« vsa števila v n-ti vodoravni vrstici večkratniki števila n. Zato so vsa števila v n-ti vodoravni vrstici »sheme z imenovalci« delili z n. Števila, ki so jih dobili, so zapisali v novo prazno shemo. Dobili so: Pascalov trikotnik.

2. pot preiskovanja: **Poševne vrstice**

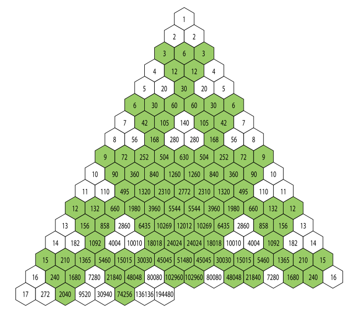
Učenci so ugotovili, da so števila v n-ti poševni vrstici »sheme z imenovalci« večkratniki števila n. Preiskovanja so se lotili tako, da so vsa števila v n-ti poševni vrstici »sheme z imenovalci« delili z n. Števila, ki so jih dobili, so zapisali v novo prazno shemo. Dobili so trikotnik, ki je podoben Pascalovemu, le da mu manjka prva leva poševna vrstica. (Tokrat smo poševne vrstice upoštevali od desno zgoraj do levo spodaj. Če bi bile poševne vrstice od levo zgoraj do desno spodaj, bi nastalemu trikotniku do Pascalovega trikotnika manjkala prva desna poševna vrstica.)

3. pot preiskovanja: **Večkratniki**

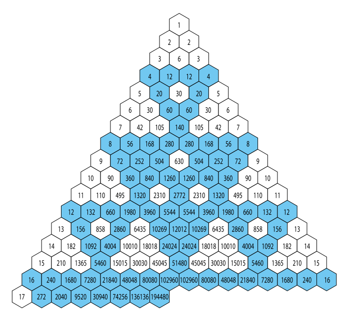
Po analogiji preiskovanj v Pascalovem trikotniku so učenci v »shemi z imenovalci« barvali večkratnike različnih števil in ugotavljali lastnosti obarvanega vzorca števil (Slike 8–11).



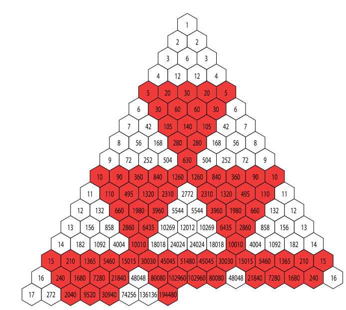
Večkratniki števila 2



Večkratniki števila 3



Večkratniki števila 4



Večkratniki števila 5

Slike 8–11: Obarvani večkratniki števil 2, 3, 4 in 5.

Učenci so med drugim ugotovili, da je pri večkratnikih števila 2 v celoti pobarvana vsaka druga *vodoravna vrstica*, pri večkratnikih števila 3 vsaka tretja, pri večkratnikih števila 4 vsaka četrta, pri večkratnikih števila 5 pa vsaka peta vodoravna vrstica. Napovedali so, da bo pri večkratnikih števila 6 v celoti pobarvana vsaka šesta vrstica. To so kasneje utemeljili s tem, da so v shemi z obarvanimi večkratniki števila 3 vsa števila v 6. in 12. vrstici soda, torej so večkratniki števila 2. Števila, ki so hkrati večkratniki števil 2 in 3, so tudi večkratniki števila 6. Torej so vsa števila v 6. in 12. vrstici večkratniki števila 6.

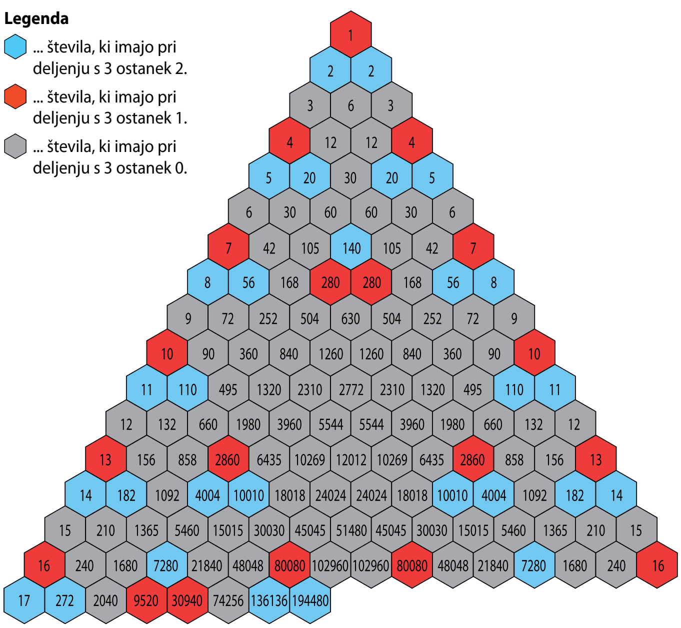
Ista ugotovitev velja tudi za v celoti pobarvane *poševne vrstice*.

Vse navedene ugotovitve skupaj pa izhajajo iz dejstva, ki smo ga zapisali pri 1. in 2. poti preiskovanja: **Vsa števila v *n*-ti vrstici (pa naj gre za vodoravne ali poševne) so večkratniki števila *n*.**

4. pot preiskovanja: **Ostanki pri deljenju**

Po analogiji preiskovanj v Pascalovem trikotniku so v »shemi z imenovalci« z isto barvo pobarvali števila, ki imajo pri deljenju z nekim številom enak ostanek.

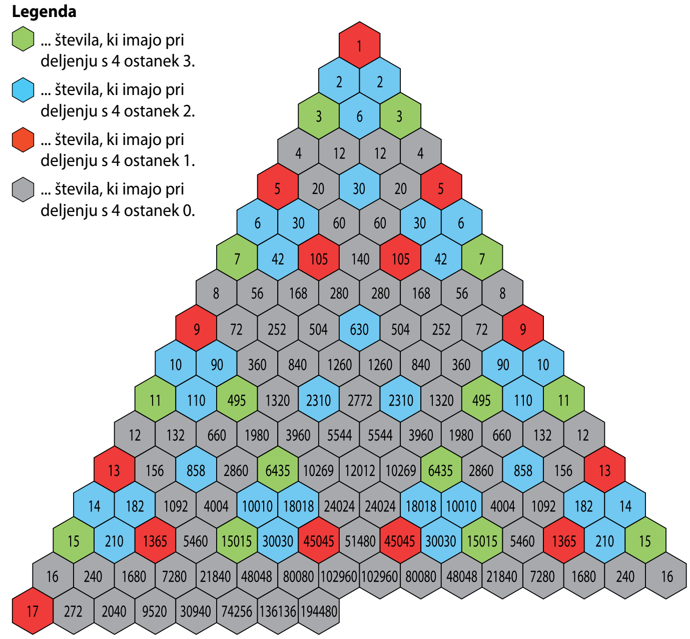
Pri barvanju ostankov pri deljenju z 2 so opazovali vzorec, ter ugotovili, da je v 3., 7. in 15. *vodoravni vrstici* vzorec LSLSLS … z gradnikom LS, kjer so z L označili liho, s S pa sodo število. Isti vzorec so napovedali tudi za 31., 63., oziroma v (2^n – 1). vodoravno vrstico. Podobno so predvidevali tudi za 1. in 9. *poševno vrstico*, a so kmalu spregledali, da se ta vzorec v 17. vodoravni vrstici prekine. Svoje napovedi so preverili še s pomočjo računalniške aplikacije (glejte vira [1] in [2]).



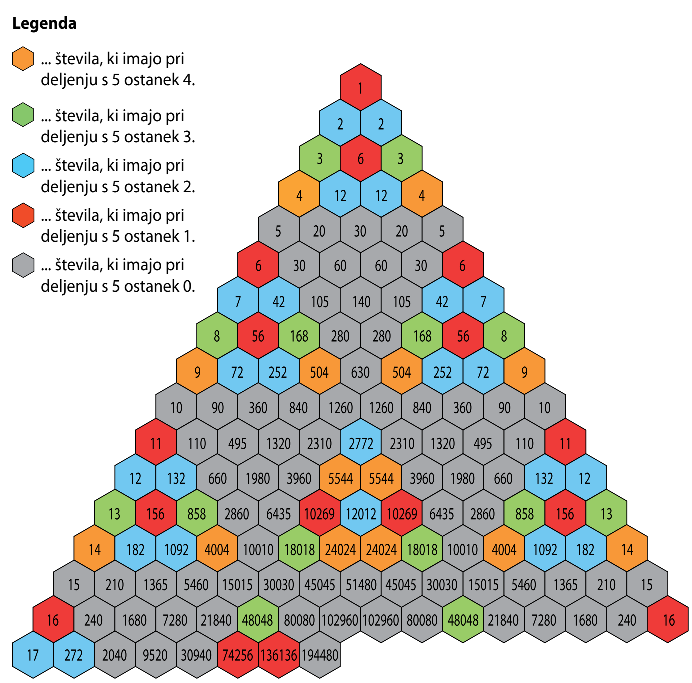
Slika 12: Ostanki pri deljenju s 3.

Ko so učenci z enako barvo barvali števila, ki dajo pri deljenju s 3 enak ostanek, so ugotavljali, da so siva polja na sliki 12 preiskovali že pri aktivnosti večkratniki števila 3. Zato so se osredotočili na ostale vzorce barv. V 1. poševni vrstici se izmenjujejo rdeče, modro in sivo obarvano polje. Tako nam gradnik RMS tvori vzorec RMSRMSRMS … V 2. poševni vrstici se izmenjujejo eno modro in dve sivi polji, oz. gradnik MSS, kar daje vzorec MSSMSSMSS … 3. poševna vrstica je v celoti siva, kar so ugotovili že pri aktivnosti barvanja večkratnikov števila 3.

Tudi pri barvanju ostankov pri deljenju s 4 z isto barvo (glejte sliko 13), so ugotavljali, da so siva polja obravnavali in opisali že pri večkratnikih števila 4. Osredotočili smo se na ostale barve. V 1. poševni vrstici opazimo vzorec barvanja RMZSRMZSRMZS …, v katerem se ponavlja gradnik RMZS (rdeče, modro, zeleno, sivo polje). V 2. poševni vrstici se izmenjujeta dve modri in dve sivi polji. V vzorcu 2. vrstice MMSSMMSSMMSS …. se tako ponavlja gradnik MMSS. Vzorec barvanja 3. poševne vrstice ima zelo dolg gradnik ZSMSRSSS, 4. poševna vrstica pa je v celoti siva.



Slika 13: Ostanki pri deljenju s 4.



Slika 14: Ostanki pri deljenju s 5

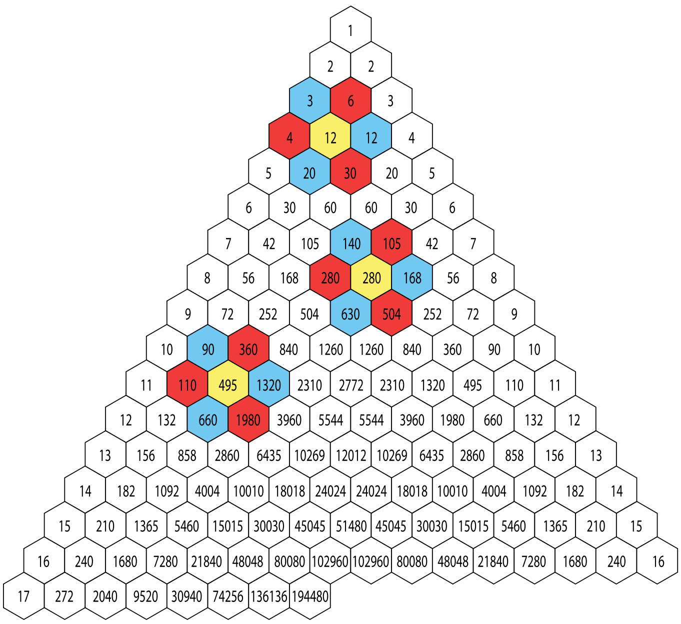
Barvanje števil, ki dajo pri deljenju s 5 enak ostanek, jim je bilo še posebej ljubo, saj so že pri barvanju Pascalovega trikotnika ugotovili, da morajo pri številih v posameznih poljih opazovati samo zadnjo števko (Slika 14). Tako so npr. z zeleno pobarvali vsa števila, ki imajo zadnjo števko 3 ali 8.

Ugotovili so, da je v prvi poševni vrstici vzorec RMZOSRMZOSRMZOS … z gradnikom RMZOS (rdeče, modro, zeleno, oranžno, sivo polje). V drugi poševni vrstici je vzorec z gradnikom MRMSS, v tretji vzorec z gradnikom ZMSSS, v četrti vzorec z gradnikom OSSSS, peta pa je v celoti siva (saj so tam večkratniki števila 5).

Učenci bi lahko ugotovili, da se nek trikotnik - gradnik barvanja v celotni sliki večkrat ponovi (podobno kot so to ugotavljali za Pascalov trikotnik) in tako bi se naša pot preiskovanja v tej točki lahko preusmerila še na fraktale, a to je že tema nove preiskave in morda naslednjega prispevka. Predlagam, da se po tej poti podate tudi vi z vašimi učenci.

5. pot preiskovanja: **Cvetovi**

Tudi v »shemi z imenovalci« so učenci pobarvali cvetove in preiskali lastnosti števil v cvetnih listih (Slika 15).



Slika 15: Cvetovi na »shemi z imenovalci«

Že v prejšnjem poglavju smo zapisali, da tudi za cvetove v Leibnizevem trikotniku velja ista ugotovitev kot za Pascalov trikotnik: **Zmnožek števil v rdečih cvetnih listih je enak zmnožku števil v modrih cvetnih listih.**

Ker je zmnožek ulomkov ulomek, katerega števec je enak zmnožku števcev vseh faktorjev (v našem primeru je to zmnožek samih enk), imenovalec pa zmnožek vseh imenovalcev, iz tega sledi, da tudi za imenovalce (oziroma za »shemo z imenovalci«) velja: **Zmnožek števil v rdečih cvetnih listih je enak zmnožku števil v modrih cvetnih listih.**

Iz prejšnje ugotovitve sledi: **Zmnožek števil v vseh cvetnih listih je popoln kvadrat.**

Primer za cvet v delu sheme, kjer so manjša števila:
Zmnožek števil v rdečih cvetnih listih: $6 \cdot 4 \cdot 30 = 720$
Zmnožek števil v modrih cvetnih listih: $3 \cdot 20 \cdot 12 = 720$
Zmnožek števil v vseh šestih cvetnih listih:
$3 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 30 \cdot 20 \cdot 4 = 720^2$

Primer za cvet v delu sheme, kjer so večja števila:
Zmnožek števil v rdečih cvetnih listih:
$105 \cdot 280 \cdot 504 = 14817600$
Zmnožek števil v modrih cvetnih listih:
$140 \cdot 630 \cdot 168 = 14817600$
Zmnožek števil v vseh šestih cvetnih listih:
$105 \cdot 140 \cdot 280 \cdot 630 \cdot 504 \cdot 168 = 14817600^2$

Še računanje »peš« z razcepom na faktorje in primerjanje faktorjev.

Rdeči cvetni listi:
$105 \cdot 280 \cdot 504 = 5 \cdot 21 \cdot 2 \cdot 140 \cdot 9 \cdot 56 = 9 \cdot 10 \cdot 21 \cdot 56 \cdot 140$

Modri cvetni listi:
$140 \cdot 630 \cdot 168 = 140 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 21 \cdot 3 \cdot 56 = 9 \cdot 10 \cdot 21 \cdot 56 \cdot 140$

Ker v obeh zmnožkih nastopajo isti faktorji, je zmnožek števil v rdečih cvetnih listih enak zmnožku števil v modrih cvetnih listih.

Velja tudi, da je zmnožek števil v rdečih/modrih cvetnih listih večkratnik števila v rumenem polju.

Zaključek

Pascalov aritmetični trikotnik in Leibnizev harmonični trikotnik na prvi pogled morda nimata nič skupnega razen simetrične trikotne sheme z neskončno mnogo vrsticami.

Trikotnik	Pascalov aritmetični	Leibnizev harmonični
n-ta vrstica se začne in konča z	1	$\frac{1}{n}$
Število v notranjosti je dobljeno kot vsota obeh števil …	**nad** njim	**pod** njim

Po preiskovalnih aktivnostih pa najdemo mnogo zanimivih pravil in povezav, ne samo med števili po vrsticah posameznega trikotnika, temveč tudi povezave med števili v Pascalovem in Leibnizevem trikotniku.

Viri in literatura:

[1] http://www.shodor.org/interactivate/activities/ColoringMultiples/ (pridobljeno 20. 7. 2017)

[2] http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Combinatorics/LeibnitzTriangle.shtml (pridobljeno 20. 7. 2017)

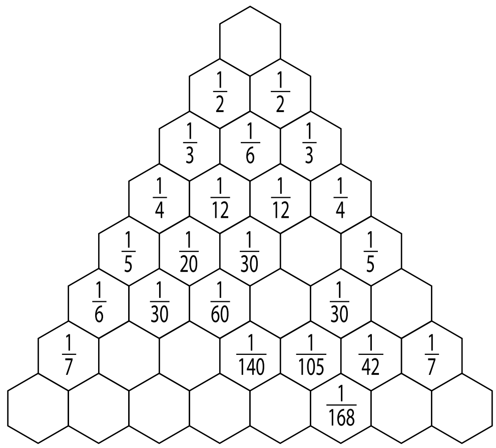
[3] Rajh, S. (2017). Pascalov aritmetični trikotnik. *Matematika v šoli*, 23, št. 2, str. 37–48.

Matematika v šoli, št. 2., letnik 23, 2017

Preiskovanje števil

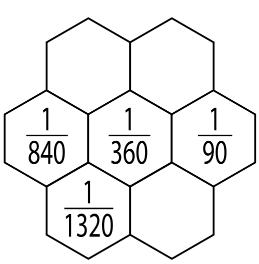
1. Ugotovi pravilo in dopolni manjkajoča števila v shemi.

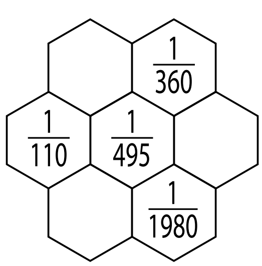
Kaj velja za števila v shemi? Zapiši vse ugotovitve.

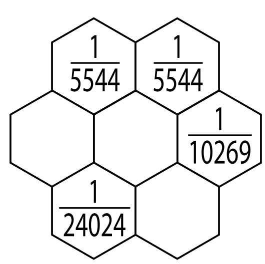


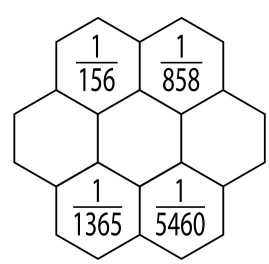
Dopiši še nekaj vrstic sheme. Koliko vrstic bi lahko še dodal?

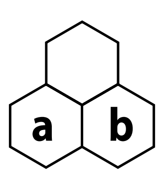
Po ugotovljenem pravilu dopolni še spodnje dele zgornje sheme.





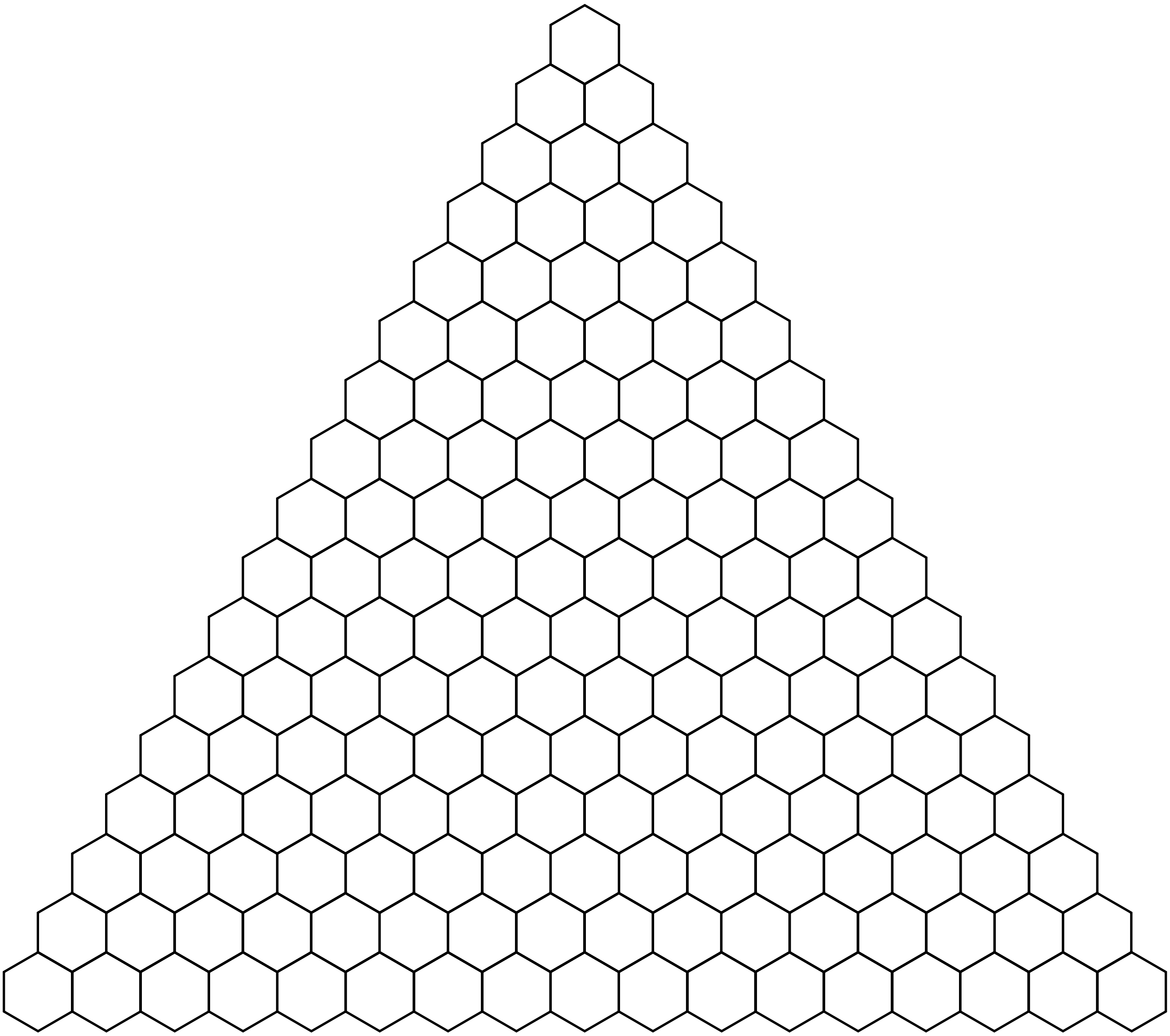






2. Izpolni predlogo Leibnizevega trikotnika, če velja:

- *n*–ta vrstica Leibnizevega trikotnika se prične in tudi konča z obratno vrednostjo števila *n*, torej z $1/n$,
- posamezno število v notranjosti Leibnizevega trikotnika je dobljeno kot vsota obeh števil pod njim.



Kaj velja za števila v shemi? Zapiši ugotovitve.

Za lažje preiskovanje in iskanje zakonitosti med števili v prazno shemo zapiši samo imenovalce Leibnizevega harmoničnega trikotnika.

Kaj velja za števila v shemi? Zapiši ugotovitve.

Matematika v šoli, št. 2., letnik 23, 2017

3. Uporabi shemo z imenovalci ulomkov iz Leibnizevega trikotnika. Z isto barvo pobarvaj števila, ki dajo pri deljenju z 2 (3, 4, 5) enak ostanek. Zapiši ugotovitve.

Legendo si pobarvaj sam:

pri deljenju z 2:

… števila, ki dajo pri deljenju z 2 ostanek 0.
… števila, ki dajo pri deljenju z 2 ostanek 1.

pri deljenju s 3:

… števila, ki dajo pri deljenju s 3 ostanek 2.
… števila, ki dajo pri deljenju s 3 ostanek 1.
… števila, ki dajo pri deljenju s 3 ostanek 0.

pri deljenju s 4:

… števila, ki dajo pri deljenju s 4 ostanek 3.
… števila, ki dajo pri deljenju s 4 ostanek 2.
… števila, ki dajo pri deljenju s 4 ostanek 1.
… števila, ki dajo pri deljenju s 4 ostanek 0.

pri deljenju s 5:

… števila, ki dajo pri deljenju s 5 ostanek 4.
… števila, ki dajo pri deljenju s 5 ostanek 3.
… števila, ki dajo pri deljenju s 5 ostanek 2.
… števila, ki dajo pri deljenju s 5 ostanek 1.
… števila, ki dajo pri deljenju s 5 ostanek 0.

1
2 2
3 6 3
4 12 12 4
5 20 30 20 5
6 30 60 60 30 6
7 42 105 140 105 42 7
8 56 168 280 280 168 56 8
9 72 252 504 630 504 252 72 9
10 90 360 840 1260 1260 840 360 90 10
11 110 495 1320 2310 2772 2310 1320 495 110 11
12 132 660 1980 3960 5544 5544 3960 1980 660 132 12
13 156 858 2860 6435 10269 12012 10269 6435 2860 858 156 13
14 182 1092 4004 10010 18018 24024 24024 18018 10010 4004 1092 182 14
15 210 1365 5460 15015 30030 45045 51480 45045 30030 15015 5460 1365 210 15
16 240 1680 7280 21840 48048 80080 102960 102960 80080 48048 21840 7280 1680 240 16
17 272 2040 9520 30940 74256 136136 194480