```
    k[0][i] = 0
for w in range(W+1):
    k[w][0] = 0

for w in range(1, W+1):
    for i in range(1, N+1):
        w_i, p_i = weights[i-1],
       prices[i-1]
        if w_i > w:
            k[w][i] = k[w][i-1]
        else:
            k[w][i] = max(k[w][i-1],
      k[w-w_i][i-1] + p_i)

return k[W][N]
```

Ta tehnika računanja reši problem v približno $W \cdot N$ korakih, kar je precej bolj učinkovito, kot če bi preverili vse možnosti. Bralci ste tudi spodbujeni, da preverite, ali podana programska koda izračuna enake številke, kot so dane v tabeli 2. Lahko pa poskusite rešiti primer z npr. petimi ali več predmeti in se prepričate o pravilnosti in enostavnosti postopka.

Literatura

[1] R. Bellman, *Eye of the Hurricane: An Autobiography*, World Scientific, 1984.

× × ×

Rešitev nagradne uganke

Boštjan Kuzman

Bralcem smo v članku 21 aritmetičnih vprašanj o številu 2021 v prejšnji številki zastavili naslednjo uganko: *Za katera naravna števila n se število $n!$ v običajnem desetiškem zapisu konča z natanko 2021 ničlami?* Do 14. marca 2021 smo v uredništvu prejeli dve rešitvi, obe pravilni: iskano število sploh ne obstaja. Uspešna reševalca Ivan Lisac iz Kopra in Andrej Jakobčič iz Novega mesta bosta za nagrado prejela knjigo o teoriji števil iz ponudbe DMFA – založništva. Rešitev, do katere lahko pridemo tudi brez računalnika, je zapisana v nadaljevanju.

Označimo število končnih ničel števila $n!$ z oznako $t(n)$. Kot je bilo opisano že v članku, je število $t(n)$ enako eksponentu prafaktorja 5 v prafaktorizaciji števila $n!$, saj vsaka končna ničla nastane z množenjem para prafaktorjev 2 in 5. Ker je med 1 in n natanko $[\frac{n}{5}]$ večkratnikov števila 5, natanko $[\frac{n}{5^2}]$ večkratnikov števila 25 in tako dalje, lahko za dani n vrednost $t(n)$ izračunamo po De Polignacovi (oziroma Legendrovi) formuli $t(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{5^k}\right]$.

Da bi določili število n z lastnostjo $t(n) = 2021$, je potrebno razmišljati v obratno smer. Števila n seveda ni mogoče direktno izraziti iz enačbe. Ker pa za funkcijo celi del velja $[x] \leqslant x$, lahko z uporabo formule za vsoto geometrijske vrste dobimo oceno

$$
\begin{aligned}
t(n) = 2021 &< \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{5^k} = \frac{n}{5} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k \\
&= \frac{n}{5} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{n}{4}
\end{aligned}
$$

oziroma $n > 8084$. Za $n = 8085$ zdaj z uporabo De Polignacove formule dobimo $t(8085) = 2018$, torej je treba n nekoliko povečati. Opazimo lahko, da zaradi preštevanja večkratnikov števila 5 velja, da je $t(n) > t(n-1)$, če je n večkratnik števila 5, sicer pa je $t(n) = t(n-1)$. Zato hitro ugotovimo, da je $t(8090) = \ldots = t(8094) = 2019$ in $t(8095) = \ldots = t(8099) = 2020$, toda $t(8100) = 2022$, saj je 8100 deljivo s 25. Dokazali smo, da iskano število n ne obstaja.

Omenimo še, da lahko ročno računanje z De Polignacovo formulo precej pohitrimo z uporabo znane zveze $[n/(ab)] = [[n/a]/b]$, po kateri lahko rekurzivno izračunamo izraze oblike $[n/p^k]$. Za števili $n = 8085$ in $p = 5$ dobimo denimo $[8085/5] = 1617$, $[8085/5^2] = [1617/5] = 323$, $[8085/5^3] = [323/5] = 64$, $[8085/5^4] = [64/5] = 12$, $[8085/5^5] = [12/5] = 2$ in $[8085/5^6] = [2/5] = 0$, od koder sledi $t(8085) = 1617 + 323 + 64 + 12 + 2 + 0 = 2018$.

× × ×