Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta *za gradbeništvo in geodezijo*

Rešene naloge iz INŽENIRSKE MATEMATIKE I

Študijsko gradivo za študente FGG

Mojca Premuš

Ljubljana, 2023

Kazalo

1 Uvod, množice, števila, preslikave

1.1 Množice

1. Koliko elementov ima dana množica?

   (a) $\{1,2,3,4\}$

   (b) $\{\{1,2,3,4\}\}$

   (c) $\{1,1,1,2,2,3,3,3,3,4\}$

   (d) $\emptyset$

Rešitev: V tej nalogi preprosto preštejemo vse elemente množice in v točki (b) upoštevamo, da je lahko tudi množica element neke množice. V točki (c) upoštevamo dejstvo, da imamo en sam element (npr. 1, 2 in 3), ki je večkrat nanizan v zapisu množice. Še vedno govorimo o enem samem elementu.
Števila elementov v primerih a-d (našteta po vrsti) so 4, 1, 4, 0.

2. Podane so množice:
   $A = \{x \mid x = 2n,\ n \in \mathbb{N}\}$,
   $B = \{x \mid x = (-1)^n n,\ n \in \mathbb{N}\}$ in
   $C = \{x \mid x = 2n-1,\ n \in \mathbb{N}\}$.
   Določi $A \cap B$, $B \setminus A$, $A \cap C$, $A \cup C$, $B \setminus C$.

Rešitev: Za boljšo predstavo naštejmo nekaj elementov vsake izmed množic, potem zapišimo nove množice, po katerih sprašuje naloga.

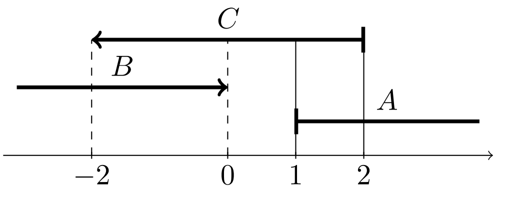
$$\begin{aligned}
A &= \{x \mid x = 2n,\ n \in \mathbb{N}\} = \{2,4,6,\ldots\} \\
B &= \{x \mid x = (-1)^n n,\ n \in \mathbb{N}\} = \{-1,2,-3,\ldots\} \\
C &= \{x \mid x = 2n-1,\ n \in \mathbb{N}\} = \{1,3,5,\ldots\} \\
A \cap B &= A \\
B \setminus A &= \{-1,-3,-5,\ldots\} = \{x \mid -(2n-1),\ n \in \mathbb{N}\} \\
A \cap C &= \emptyset \\
A \cup C &= \mathbb{N} \\
B \setminus C &= B
\end{aligned}$$

Na kazalo

3. Podane so množice:
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < \infty\}$,
$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < 0\}$ in
$C = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 2\}$.
Določi $A \cap B$, $A \cap C$, $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cup B \cup C$, $B \cap C$.

Rešitev: Ker je elementov v množicah te naloge preveč, da bi jih naštevali[1] jih raje predstavimo s pomočjo intervalov. Te intervale bomo narisali nad skupno realno osjo, da bomo lažje prepoznali iskane množice.

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < \infty\} = [1, \infty)$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < 0\} = (-\infty, 0)$$
$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 2\} = (-2, 2]$$



$A \cap B = \emptyset$
$A \cap C = [1, 2]$
$A \cup B = \mathbb{R} \setminus [0, 1)$
$A \cup C = (-2, \infty)$
$A \cup B \cup C = \mathbb{R}$
$B \cap C = (-2, 0)$

[1] V matematiki pravimo, da so take množice *goste*. Množice, v katerih pa elemente lahko "štejemo", kot npr. v nalogi 2, pa imenujemo *števne*.

Na kazalo

1.2 Naravna števila (matematična indukcija)

1. S pomočjo popolne indukcije dokaži

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \text{za vsak } n \in \mathbb{N}.$$

Rešitev: Dokazujemo: $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Po principu matematične indukcije poteka dokaz v dveh korakih. Najprej pokažemo, da trditev drži za $n = 1$, nato sledi indukcijski korak, kjer iz pravilnosti trditve za $n = k$ sledi pravilnost trditve za $n = k + 1$. Leve strani enakosti, ki jih moramo dokazati, bomo označevali z L, desne pa z D.
Začnimo z bazo indukcije. Na levi strani trditve imamo v splošnem opravka z vsoto n členov, ko je $n = 1$, pa imamo seveda zgolj en člen.

$$\begin{aligned} \mathrm{L} &= 1^2 = 1 \\ \mathrm{D} &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1 \end{aligned}$$

Ker je leva stran enakosti enaka desni strani, rečemo, da baza indukcije stoji.
Sedaj postavimo indukcijsko predpostavko (IP)

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Na koncu dokažimo še:
$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6} \left(= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\right)$.
Vzemimo levo stran enakosti in na prvih k členih uporabimo (IP).

$$\begin{aligned} \mathrm{L} &= \underbrace{1^2 + 2^2 + \ldots + k^2}_{\overset{(IP)}{=} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}} + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)\left(k(2k+1) + 6k + 6\right)}{6} = \\ &= \frac{(k+1)\left(2k^2 + 7k + 6\right)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \mathrm{D} \end{aligned}$$

Ker trditev velja za $n = 1$ in ker drži tudi indukcijski korak, smo dokazali, da trditev velja za vsa naravna števila n.

Na kazalo

2. S pomočjo matematične indukcije dokaži, da za vsako naravno število n velja

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 .$$

Rešitev: Poglejmo najprej pomen simbola $\sum\limits_{i=1}^{n} i^3$ na primeru $n = 4$.

$$\sum_{i=1}^{4} i^3 = \underset{\substack{\uparrow \\ i=1}}{1^3} + \underset{\substack{\uparrow \\ i=2}}{2^3} + \underset{\substack{\uparrow \\ i=3}}{3^3} + \underset{\substack{\uparrow \\ i=4}}{4^4}$$

To pomeni, da velja tudi $\sum\limits_{i=1}^{1} i^3 = 1^3$. Se pravi, da imamo pri bazi indukcije na levi strani zgolj en člen.

Dokazujemo: $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$

- $n = 1$: $\mathrm{L} = 1^3 = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = D$ ✓

- $n = k$: (IP) $1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$;

- $n = k + 1$: dokažimo: $1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$
  Tokrat bomo indukcijski korak pokazali tako, da bomo začeli z indukcijsko predpostavko in enakost preoblikovali tako, da bomo na levi strani dobili levo stran trditve, katere pravilnost želimo dokazati. V našem primeru je dovolj, da na obeh straneh prištejemo $k + 1$ člen vsote $(k+1)^3$.

Na kazalo

$$\text{(IP) } 1^3+2^3+\ldots+k^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 \quad \Big/ +(k+1)^3$$

$$1^3+2^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3$$

$$1^3+2^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}$$

$$1^3+2^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2\left(k^2+4(k+1)\right)}{4}$$

$$1^3+2^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2\left(k^2+4k+4\right)}{4}$$

$$1^3+2^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$$\text{L}=1^3+2^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2=\text{D}$$

3. Dokaži, da je število 5^n+2^{n+1} deljivo s 3 za vsak $n\in\mathbb{N}$.

Rešitev: Zapišimo trditev v obliki enačbe, da bomo lahko izpeljali vse korake matematične indukcije.

za $\forall n\in\mathbb{N}:\ 5^n+2^{n+1}=3\cdot a,\ a\in\mathbb{Z}$

- $n=1$: $\text{L}=5+2^2=9=3\cdot 3$ ✓
- $n=k$: (IP) $5^k+2^{k+1}=3a,\ a\in\mathbb{Z}$;
- $n=k+1$: dokažimo: $5^{k+1}+2^{k+2}=3b,\ b\in\mathbb{Z}$

  I. način:

$$\text{L}=5^{k+1}+2^{k+2}=5\cdot 5^k+2\cdot 2^{k+1}=3\cdot 5^k+2\cdot 5^k+2\cdot 2^{k+1}=$$
$$=3\cdot 5^k+2\cdot\left(5^k+2^{k+1}\right)\overset{(IP)}{=}3\cdot 5^k+2\cdot(3a)=3\cdot\left(5^k+2a\right)$$

  Ker je $k\in\mathbb{N}$, je $5^k\in\mathbb{Z}$ je tudi $(b=)5^k+2a\in\mathbb{Z}$. S tem smo dokazali pravilnost trditve.

  II. način: Indukcijsko predpostavko lahko zapišemo v drugačni obliki, npr. (IP) $5^k=3a-2^{k+1}$. Dokažimo sedaj pravilnost trditve za $n=k+1$.

$$5^{k+1}+2^{k+2}=5\cdot 5^k+2^{k+2}\overset{(IP)}{=}5\left(3a-2^{k+1}\right)+2^{k+2}=$$
$$=15a-5\cdot 2^{k+1}+2\cdot 2^{k+1}=15a+2^{k+1}(2-5)=$$
$$=15a-3\cdot 2^{k+1}=3\left(5a-2^{k+1}\right)$$

Na kazalo

Ker je $k \in \mathbb{N}$, je $2^{k+1} \in \mathbb{Z}$. Torej je tudi $(b =)5a - 2^{k+1} \in \mathbb{Z}$. S tem smo dokazali pravilnost trditve.

4. Preveri, ali velja trditev: vsa števila oblike $p = 2n + 1$ so praštevila.

Rešitev: Ko ne znamo dokazati kakšne trditve, se včasih prepričamo o pravilnosti trditve za nekaj primerov.

$$n = 1 \ \rightarrow \ p = 3 \text{ - praštevilo}$$
$$n = 2 \ \rightarrow \ p = 5 \text{ - praštevilo}$$
$$n = 3 \ \rightarrow \ p = 7 \text{ - praštevilo}$$

Moramo se zavedati, da to nikakor ni dokaz pravilnosti trditve. Trditev namreč ni pravilna, kar lahko zlahka dokažemo s **protiprimerom**, ki ga pri tej trditvi najdemo pri $n = 4$. V tem primeru je $p = 9 = 3 \cdot 3$, kar pa ni praštevilo. Tokrat se je protiprimer skrival že pri $n = 4$, lahko pa bi ga našli pri neprimerljivo višjem številu.
Trditev ne drži.

5. S pomočjo matematične indukcije dokaži, da za vsako naravno število n velja $n < 2^n$.

Rešitev:

- $n = 1$: $L = 1 < 2 = D$ ✓
- $n = k$: (IP) $k < 2^k$;
- $n = k + 1$: dokažimo: $\underline{k + 1 < 2^{k+1}}$

$$\mathrm{L} = k + 1 \overset{(IP)}{<} 2^k + 1 < 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1} = \mathrm{D}$$

Opomba: V dokazu smo uporabili dejstvo, da za vsako naravno število k velja $1 < 2^k$.

1.3 Kvadratni koren in absolutna vrednost

1. Reši enačbo:

(a) $\sqrt{x^2-3x-7}=1-x$,

(b) $\sqrt{x^2-3x-7}=x-1$,

(c) $\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}=\sqrt{x}$,

(d) $\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}=\sqrt{x}$,

(e) $\sqrt{x-1+\sqrt{x+2}}=3$.

Rešitev: Ker kvadratni koren ni definiran za negativna števila in ker je njegova vrednost vedno nenegativna, lahko s kvadriranjem enačb pridobimo kakšno navidezno rešitev, ki to v bistvu sploh ni. Zato je pri enačbah, ki vsebujejo korene nujno potreben preizkus.

(a)

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-3x-7} &= 1-x \quad \big/^2 \\ x^2-3x-7 &= (1-x)^2 \\ \cancel{x^2}-3x-7 &= 1-2x+\cancel{x^2} \\ x &= -8 \end{aligned}$$

PREIZKUS:

$$L=\sqrt{(-8)^2-3(-8)-7}=\sqrt{81}=9$$
$$D=1-(-8)=9$$

$L=D$, zato je $x=-8$ (edina) rešitev dane enačbe.

(b)

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-3x-7} &= x-1=-(1-x) \quad \big/^2 \\ x^2-3x-7 &= (1-x)^2 \end{aligned}$$

Ker dobimo identično enačbo kot v primeru (a), je tudi tokrat $x=-8$.

PREIZKUS:

$$L=\sqrt{(-8)^2-3(-8)-7}=9$$
$$D=-8-1=-9$$

$L\neq D$, zato $x=-8$ ni rešitev dane enačbe. Ker je bila edina kandidatka za rešitev, to pomeni, da enačba ni rešljiva.

(c) Pri spodnjem kvadriranju na levi strani enakosti uporabimo formulo za kvadriranje dvočlenika

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Na kazalo

$$
\begin{aligned}
\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x} &= \sqrt{x} \qquad /^2 \\
\sqrt{5+x}^2 - 2\sqrt{5+x}\sqrt{5-x} + \sqrt{5-x}^2 &= x \\
5+\cancel{x} - 2\sqrt{25-x^2} + 5 \cancel{-x} &= x \\
10 - 2\sqrt{25-x^2} &= x \\
-2\sqrt{25-x^2} &= x-10 \qquad /^2 \\
4\sqrt{25-x^2}^2 &= (x-10)^2 \\
4(25-x^2) &= x^2-20x+100 \\
\cancel{100} - 4x^2 &= x^2 - 20x + \cancel{100} \\
5x^2 - 20x &= 0 \\
5x(x-4) &= 0 \\
x_1 = 0, x_2 &= 4
\end{aligned}
$$

PREIZKUS:

- $x_1 = 0$: $L = \sqrt{5+0} - \sqrt{5-0} = 0 = \sqrt{0} = D$
  Število $x_1 = 0$ je rešitev dane enačbe.
- $x_2 = 4$: $L = \sqrt{5+4} - \sqrt{5-4} = 2 = \sqrt{4} = D$
  Število $x_2 = 4$ je rešitev dane enačbe.

(d)

$$
\begin{aligned}
\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x} &= \sqrt{x} \qquad /^2 \\
2\sqrt{25-x^2} &= x-10 \qquad /^2 \\
4\sqrt{25-x^2}^2 &= (x-10)^2
\end{aligned}
$$

Ker dobimo identično enačbo kot v primeru (c), dobimo tudi isti rešitvi: $x_1 = 0$ in $x_2 = 4$.Preizkus pokaže, da nobena izmed predlaganih rešitev ni rešitev prvotne enačbe. Dana enačba torej ni rešljiva.

Na kazalo

(e)

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x-1+\sqrt{x+2}} &= 3 \quad /^2 \\
x-1+\sqrt{x+2} &= 9 \\
\sqrt{x+2} &= 10-x \quad /^2 \\
x+2 &= 100-20x+x^2 \\
x^2-21x+98 &= 0 \\
(x-7)(x-14) &= 0 \\
x_1 = 7, x_2 &= 14
\end{aligned}
$$

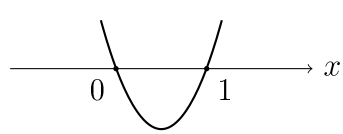
Preizkus pokaže, da je rešitev enačbe le $x_1 = 7$.

2. Poišči vsa realna števila, ki ustrezajo pogoju:
   (a) $\sqrt{x^2-x} > x+1$,
   (b) $\sqrt{x}+\sqrt{x+1} < \sqrt{3}$,
   (c) $\sqrt{1+2x} \geq \frac{1}{x-1}$.

Rešitev: Ker so rešitve neenačb lahko tudi intervali, je pri neenačbah, ki vsebujejo kvadratne korene preizkus nemogoč (interval namreč vsebuje neskončno mnogo realnih števil). Reševanja teh neenačb se je zato treba lotiti previdneje. Pri vsaki neenačbi bomo najprej preverili, kje so koreni, ki nastopajo, sploh definirani. To območje bomo imenovali *predpogoj*.

(a) $\sqrt{x^2-x} > x+1$

Najprej postavimo predpogoj: $x^2-x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-1) \geq 0$.



Predpogoj: $x \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$.

Ker iz neenakosti $a < b$ ne sledi nujno neenakost $a^2 < b^2$ (npr. iz neenakosti $-2 < 1$ sledi $(-2)^2 > 1^2$) ločimo dva primera: primer (I) ko sta obe strani nenegativni (v tem primeru iz $0 \leq a < b$ sledi $0 \leq a^2 < b^2$) in primer (II), ko je desna stran neenačbe negativna (leva stran je za naš primer vedno nenegativna).

Na kazalo

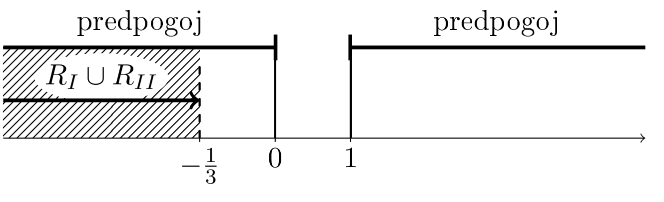
(I) $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$:
Ker sta obe strani neenačbe nenegativni, jo kvadriramo in rešimo linearno neenačbo, ki jo dobimo:

$$
\begin{aligned}
x^2 - x &> (x+1)^2 \\
\cancel{x^2} - x &> \cancel{x^2} + 2x + 1 \\
-1 &> 3x \\
-\frac{1}{3} &> x
\end{aligned}
$$

Rešitev dobljene neenačbe so $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$, ker pa smo na območju (I) $x \in [-1, \infty)$ je rešitev na tem območju $R_I = \left[-1, -\frac{1}{3}\right)$.

(II) $x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$:
Desna stran neenačbe je sedaj negativna. Sprašujemo se torej po tistih realnih številih x, za katera bo nenegativen izraz na levi strani strogo večji od negativnega izraza na desni strani. To je res za vsa realna števila. Upoštevamo še pogoj za primer (II) in dobimo $R_{II} = (-\infty, -1)$.

Rešitev dane neenačbe je unija dobljenih rešitev, vendar v preseku s predpogojem. Dobimo $R = \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$.



(b) $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} < \sqrt{3}$
Najprej poiščimo realna števila x, za katera sta definirana oba korena hkrati. Prvi koren je definiran za $x \geq 0$, drugi pa za $x+1 \geq 0$ oz. $x \geq -1$.

$$\text{Predpogoj: } x \in [0, \infty)\,.$$

Ker sta leva in desna stran neenačbe pozitivni, se neenakost pri kvadriranju ohrani.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x} + \sqrt{x+1} &< \sqrt{3} \Big/^2 \\
x + 2\sqrt{x}\sqrt{x+1} + x + 1 &< 3 \\
\sqrt{x}\sqrt{x+1} &< 1 - x
\end{aligned}
$$

Dobili smo novo neenačbo, ki vsebuje kvadratni koren, ki ustreza predpogoju originalne neenačbe. Vendar tokrat desna stran neenačbe nima konstantnega predznaka (leva stran pa je povsod nenegativna). Glede na predznak desne strani spet ločimo dva primera.

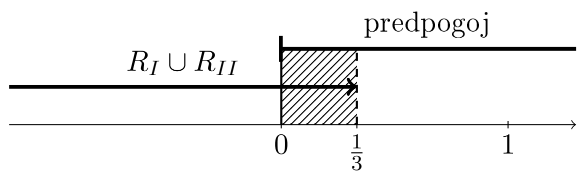
(I) $1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$:
Obe strani sta nenegativni, zato se neenakost pri kvadriranju ohrani:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x}\sqrt{x+1} &< 1 - x \Big/^2 \\
x(x+1) &< (1-x)^2 \\
\cancel{x^2} + x &< 1 - 2x + \cancel{x^2} \\
3x &< 1 \\
x &< \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Celotna rešitev leži v območju $x \in (-\infty, 1]$, zato je $R_I = \big(-\infty, \frac{1}{3}\big)$

(II) $1 - x < 0 \Leftrightarrow 1 < x$:
Sprašujemo se za katera števila x bo leva, nenegativna stran (strogo) manjša od desne, negativne. Ta neenačba nima rešitev.

Rešitev dane neenačbe je unija rešitev za primera (I) in (II), v preseku s predpogojem, torej $R = \big[0, \frac{1}{3}\big)$.



(c) $\sqrt{1+2x} \geq \frac{1}{x-1}$
Tokrat moramo v predpogoju poleg definiranosti korena poskrbeti še za definiranost ulomka. Da je definiran koren, mora veljati $1 + 2x \geq 0$ oz. $x \geq -\frac{1}{2}$. Ulomek pa pogojuje, da je $x - 1 \neq 0$ oz. $x \neq 1$.

$$\text{Predpogoj: } x \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, \infty) = \left(-\frac{1}{2}, \infty\right) \setminus \{1\}\,.$$

Glede na to, da je leva stran vedno nenegativna, spet ločimo dva primera.

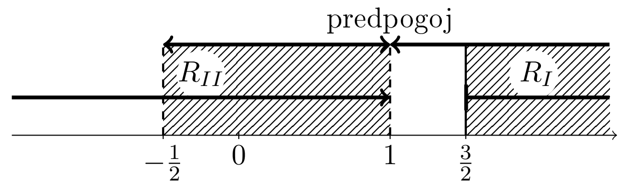
(I) $\frac{1}{x-1} > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$:
Neenačbo kvadrirajmo:

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+2x} &\geq \frac{1}{x-1} \Big/^2 \\
1 + 2x &\geq \frac{1}{(x-1)^2} \Big/ \cdot (x-1)^2 \ (>0) \\
(1+2x)(x^2 - 2x + 1) &\geq 1 \\
x^2 \cancel{-2x} + \cancel{1} + 2x^3 - 4x^2 + \cancel{2x} &\geq \cancel{1} \\
2x^3 - 3x^2 &\geq 0 \\
x^2(2x - 3) &\geq 0
\end{aligned}$$

Rešitvi enačbe $x^2(2x-3)=0$ sta $x=0$ in $x=\frac{3}{2}$. Rešimo še neenačbo $x^2(2x-3)>0$. Ker je $x^2 \geq 0$ pri vsakem realnem x, bo zadnji neenakosti zadoščeno, ko bo $2x-3>0$ oz. $x>\frac{3}{2}$. Rešitev neenačbe $2x^3-3x^2 \geq 0$ je unija $\{0\} \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$. Dobljena realna števila ne ležijo v celoti v območju $x>1$, zato je $R_I = \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$.

(II) $\frac{1}{x-1} < 0 \Leftrightarrow x < 1$:
Sprašujemo se, kdaj bo leva, nenegativna stran neenačbe večja ali enaka desni, negativni strani. Odgovor je, seveda, vedno. Če upoštevamo še pogoje za primer (II), dobimo $R_{II} = (-\infty, 1)$.

Rešitev neenačbe je unija rešitev R_I in R_{II}, v preseku s predpogojem, torej $R = \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$.



3. Reši neenačbo:

(a) $|x| < 2$,

(b) $|2-x| \geq 1$,

(c) $|x^2-4| < 2$,

(d) $|2x-x^2| \geq 1$,

(e) $|x^2-x|-|x| < 1$,

(f) $|1-|x-1|| < 1$,

(g) $|5-|1-x|| < x$,

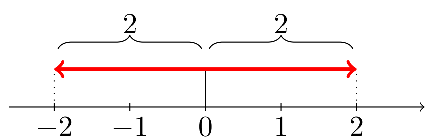
(h) $\frac{|x|}{x-1} < 1$,

(i) $|2x+3| \leq |4x-3|$,

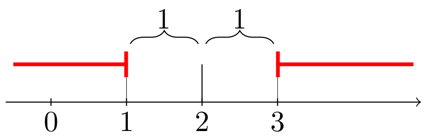
(j) $\left|\frac{x}{x+4}\right| \geq 1$.

Rešitev:

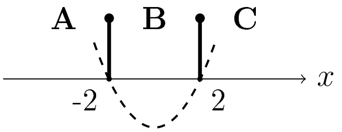
(a) $|x| < 2$
Vrednost izraza $|x| = |x-0|$ nam pove razdaljo na številski osi, med številoma x in 0. Neenačba $|x| < 2$ tako sprašuje po realnih številih, ki so od 0 oddaljena za manj kot 2. Ta števila so $x \in (-2, 2)$.



(b) $|2-x| \geq 1$
Neenačba sprašuje po realnih številih, ki so od 2 oddaljena vsaj za 1. Ta števila so $x \in (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$.



(c) $|x^2-4| < 2$
Na žalost pri tej neenači nimamo več lepe geometrijske interpretacije, saj x nastopa s kvadratom. Neenačbe se lotimo računsko. Če želimo izpustiti absolutno vrednost v izrazu $|x^2-4|$, moramo poznati predznak izraza x^2-4. Za pomoč skicirajmo krivuljo z enačbo $y = x^2-4$. Višina točke z absciso x, ki leži na skicirani krivulji, nam predstavlja vrednost $y = x^2-4$. Iz te skice lahko tako odčitamo, kje je izraz pozitiven (t.j. pri tistih vrednostih x, kjer je krivulja nad osjo x) in kje negativen (t.j. pri tistih x, kjer je krivulja pod osjo x). Ker je $x^2-4 = (x-2)(x+2)$, je v $x_{1,2} = \pm 2$ vrednost izraza x^2-4 enaka 0.

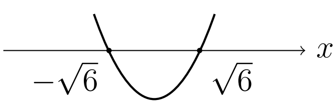


Vidimo, da ima izraz x^2-4 na območjih $x \in (-\infty, -2)$ (A) in $x \in (2, \infty)$ (C) pozitiven predznak (in tukaj velja $|x^2-4| = x^2-4$), na območju $x \in (-2, 2)$ (B) pa negativnega (in tukaj velja $|x^2-4| = -(x^2-4)$). Reševanja neenačbe se lotimo na posameznih območjih ločeno.

(A in C) $x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$:
Izpustimo absolutno vrednost v neenačbi in rešimo dobljeno neenačbo.

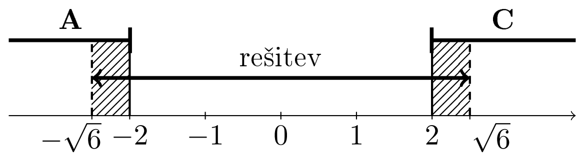
$$x^2 - 4 < 2$$
$$x^2 - 6 < 0$$

Z dobljeno neenačbo se sprašujemo po abscisah točk na krivulji $y = x^2-6$, za katere krivulja leži strogo pod osjo x. Skicirajmo omenjeno krivuljo in odčitajmo rešitev neenačbe.



Rešitev neenačbe je $x \in (-\sqrt{6}, \sqrt{6})$. Ker se pa nahajamo na območjih A in C, pa ne pride v poštev celotna rešitev, kot lahko vidimo v spodnjem diagramu.

Na kazalo

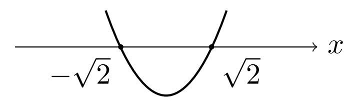


Rešitev na območjih A in C je $R_{\mathrm{AC}} = (-\sqrt{6}, -2] \cup [2, \sqrt{6})$.

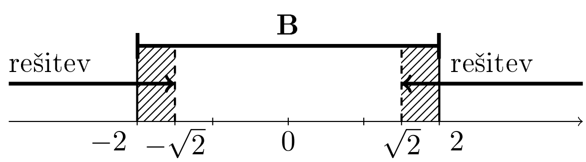
(B) $x \in [-2, 2]$:

Izpustimo absolutno vrednost v neenačbi, jo poenostavimo, skicirajmo kvadratno parabolo na desni strani dobljene neenačbe in odčitajmo rešitev neenačbe.

$$\begin{aligned} -(x^2 - 4) &< 2 \\ -x^2 + 4 &< 2 \\ 0 &< x^2 - 2 \end{aligned}$$



Rešitev te neenačbe je $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$. Ker se pa nahajamo na območju B, pa ne pride v poštev celotna rešitev, kot lahko vidimo v spodnjem diagramu.



Rešitev na območju B je $R_{\mathrm{B}} = [-2, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2]$.

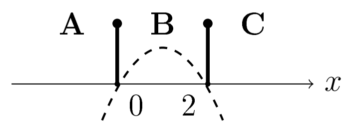
Rešitev neenačbe je unija rešitev iz območij A, B in C.

$$R = R_{\mathrm{AC}} \cup R_{\mathrm{B}} = (-\sqrt{6}, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \sqrt{6})$$

OPOMBA: V opisanem načinu smo števili 2 in -2 obravnavali dvakrat: v območjih A in C ter v območju B. To ni bilo potrebno. Dovolj je, da vsako število obravnavamo le enkrat. Prednost načina, kjer števila, ki so na robovih intervalov, obravnavamo dvakrat, je v tem, da to število leži v rešitvi R_{AC} in R_{B}, ali pa v nobeni od teh rešitev. Morebitna napaka, ki jo naredimo med reševanjem, se tako hitro pokaže.

(d) $|2x - x^2| \geq 1$

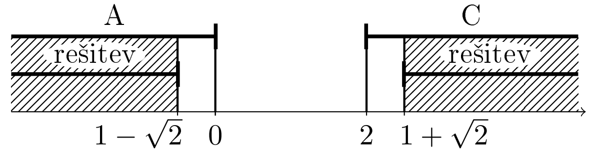
Skicirajmo krivuljo $y = 2x - x^2$ in označimo območja na katerih ima izraz $2x - x^2$ konstanten predznak. Iz faktorizirane oblike $2x - x^2 = x(2 - x)$ odčitamo, da je v $x = 0$ in $x = 2$ vrednost izraza enaka 0.



(A in C) $x \in (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$:

$$\begin{aligned} -(2x - x^2) &\geq 1 \\ x^2 - 2x - 1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Kvadratna parabola $y = x^2 - 2x - 1$ ima ničli v $x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Rešitev neenačbe $x^2 - 2x - 1 \geq 0$ je $x \in \left(-\infty, 1-\sqrt{2}\right] \cup \left[1+\sqrt{2}, \infty\right)$. Rešitev leži v celoti v območjih A in C, zato je $R_{\mathrm{AC}} = \left(-\infty, 1-\sqrt{2}\right] \cup \left[1+\sqrt{2}, \infty\right)$.



(B) $x \in [0, 2]$:

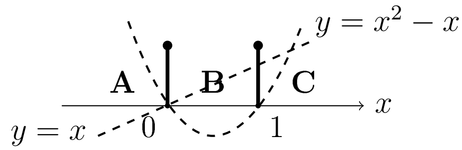
$$2x - x^2 \geq 1$$
$$(x-1)^2 \leq 0$$

Rešitev dobljene neenačbe je le število 1, ki leži v območju B. Tako je $R_{\mathrm{B}} = \{1\}$.

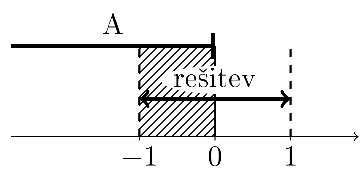
Rešitev neenačbe je unija rešitev, pridobljenih na posameznih območjih.

$$R = R_{\mathrm{AC}} \cup R_{\mathrm{B}} = \left(-\infty, 1-\sqrt{2}\right] \cup \{1\} \cup \left[1+\sqrt{2}, \infty\right)$$

(e) $|x^2 - x| - |x| < 1$
Skicirajmo krivulji $y = x^2 - x$ (ničli, $x_1 = 0$ in $x_2 = 1$, odčitamo iz faktorizirane oblike $x^2 - x = x(x-1)$) in $y = x$, da določimo območja, v katerih imata izraza znotraj absolutnih vrednosti konstanten predznak.



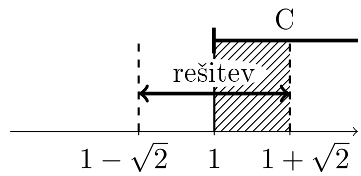
(A) $x \in (-\infty, 0]$: $x^2 - x + x < 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 < 0$
Rešitev neenačbe $x^2 - 1 < 0$ je $x \in (-1, 1)$. Rešitev ne leži v celoti v območju A, zato je $R_{\mathrm{A}} = (-1, 0]$.



(B) $x \in [0, 1]$: $-(x^2 - x) - x < 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 > 0$ Dobljeno neenačbo rešijo vsa realna števila, zato je rešitev na območju B enaka $R_{\mathrm{B}} = [0, 1]$.

(C) $x \in [1, \infty)$: $x^2 - x - x < 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 < 0$
Dobljeno neenačbo rešijo $x \in \left(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right)$, vendar rešitev ne leži v celoti na območju C. Rešitev na območju C je $R_{\mathrm{C}} = [1, 1+\sqrt{2})$.

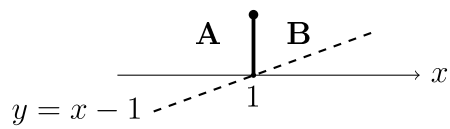
Na kazalo



Rešitev neenačbe je $R = R_\mathrm{A} \cup R_\mathrm{B} \cup R_\mathrm{C} = (-1, 1+\sqrt{2})$.

(f) $|1 - |x-1|| < 1$

Najprej bomo odpravili notranjo absolutno vrednost. Skicirajmo krivuljo $y = x - 1$ in določimo območja, kjer je izraz $x - 1$ konstantnega predznaka.



(A) $x \le 1$:

$$\begin{aligned} |1 + x - 1| &< 1 \\ |x| &< 1 \end{aligned}$$

Dobljeno neenačbo rešijo $x \in (-1, 1)$. Ker vse rešitve ležijo v območju A, je $R_\mathrm{A} = (-1, 1)$.

(B) $x \ge 1$:

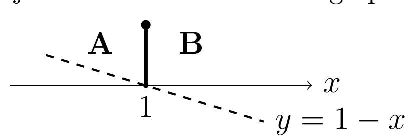
$$\begin{aligned} |1 - (x - 1)| &< 1 \\ |2 - x| &< 1 \end{aligned}$$

Dobljeno neenačbo rešijo $x \in (1, 3)$. Ker vse rešitve ležijo v območju B, je $R_\mathrm{B} = (1, 3)$.

Rešitev neenačbe je $R = R_\mathrm{A} \cup R_\mathrm{B} = (-1, 1) \cup (1, 3) = (-1, 3) \setminus \{1\}$.

(g) $|5 - |1 - x|| < x$

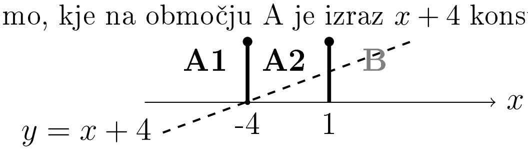
Najprej bomo odpravili notranjo absolutno vrednost. Skicirajmo krivuljo $y = 1 - x$ in določimo območja, kjer je izraz $1 - x$ konstantnega predznaka.



(A) $x \le 1$:

$$\begin{aligned} |5 - (1 - x)| &< x \\ |x + 4| &< x \end{aligned}$$

Sedaj je potrebno odpraviti še preostalo absolutno vrednost. Skicirajmo krivuljo $y = x + 4$ in poglejmo, kje na območju A je izraz $x + 4$ konstantnega predznaka.



Na kazalo

(A1) $x \leq -4$:

$$\begin{aligned} -(x+4) &< x \\ -2 &< x \end{aligned}$$

Ker vse rešitve dobljene neenačbe ležijo izven območja A1, je R_{A1} prazna množica.

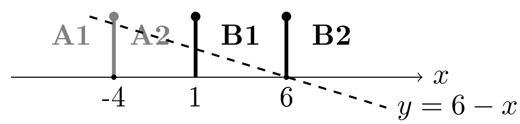
(A2) $-4 \leq x \leq 1$:

$$\begin{aligned} x+4 &< x \\ 4 &< 0 \end{aligned}$$

Ker nikoli ne velja, da je $4 < 0$, je tudi R_{A2} prazna množica.

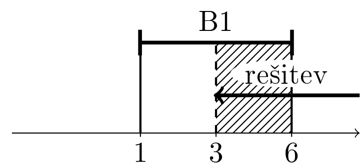
(B) $x \geq 1$:

$$|6-x| < x$$



(B1) $1 \leq x \leq 6$:

$$\begin{aligned} 6 - x &< x \\ 3 &< x \end{aligned}$$



Ker vse rešitve dobljene neenačbe ne ležijo na območju B1, je $R_{\mathrm{B1}} = (3, 6]$.

(B2) $6 \leq x$:

$$\begin{aligned} -(6-x) &< x \\ -6 &< 0 \end{aligned}$$

Ker je $-6 < 0$ vedno res, je $R_{\mathrm{B2}} = [6, \infty)$.

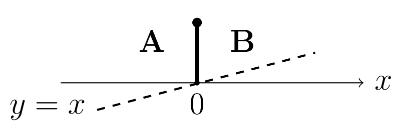
Rešitev neenačbe je $R = R_{\mathrm{A1}} \cup R_{\mathrm{A2}} \cup R_{\mathrm{B1}} \cup R_{\mathrm{B2}} = (3, \infty)$.

(h) $\frac{|x|}{x-1} < 1$

Preden začnemo z opuščanjem absolutne vrednosti, poskrbimo, da bodo v rešitvi le števila, za katera je ulomek na levi strani neenačbe definiran.

$$\text{Predpogoj: } x \neq 1\,.$$

Skicirajmo krivuljo $y = x$ in razdelimo realno os na območja, kjer ima izraz x konstanten predznak.



Na kazalo

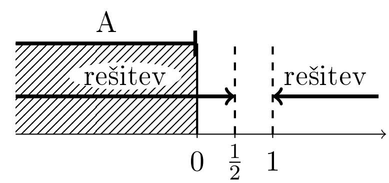
(A) $x \leq 0$:

$$-\frac{x}{x-1} < 1$$
$$\frac{2x-1}{x-1} > 0$$

Pri dobljeni neenačbi se sprašujemo, kdaj bo vrednost ulomka na desni strani neenačbe pozitivna. Imamo dve možnosti:

- Števec in imenovalec ulomka sta pozitivna: $2x-1>0$ in $x-1>0$ oz. $x>\frac{1}{2}$ in $x>1$. Tukaj dobimo rešitev $x>1$.
- Števec in imenovalec ulomka sta negativna: $2x-1<0$ in $x-1<0$ oz. $x<\frac{1}{2}$ in $x<1$. Tukaj dobimo rešitev $x<\frac{1}{2}$.

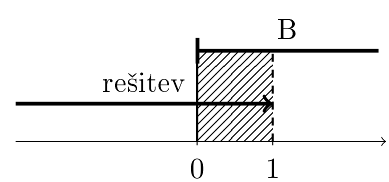
Rešitev neenačbe je $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (1, \infty)$. Ker pa celotna rešitev ne leži na območju A, je $R_{\mathrm{A}} = (-\infty, 0]$.



(B) $x \geq 0$:

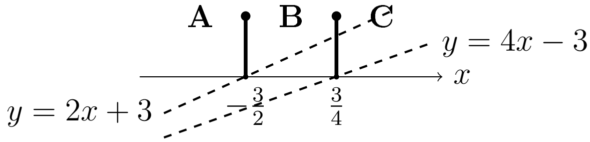
$$\frac{x}{x-1} < 1$$
$$\frac{1}{x-1} < 0$$

Pri dobljeni neenačbi se sprašujemo, kdaj bo vrednost ulomka na levi strani neenačbe negativna. Ker je števec pozitiven, mora biti imenovalec negativen, torej $x-1<0$ oz. $x<1$. Ker pa celotna rešitev ne leži na območju B, je $R_{\mathrm{B}} = [0, 1)$.



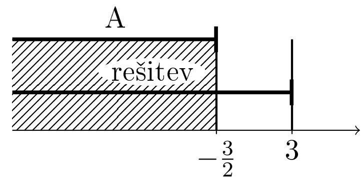
Ob upoštevanju predpogoja vidimo, da je rešitev neenačbe $R = (R_{\mathrm{A}} \cup R_{\mathrm{B}}) \setminus \{1\} = (-\infty, 1)$.

(i) $|2x+3| \leq |4x-3|$
Skicirajmo krivulji $y = 2x+3$ (ta seka x os v $x = -\frac{3}{2}$) in $y = 4x-3$ (ta seka x os v $x = \frac{3}{4}$) ter razdelimo realno os na območja, kjer sta izraza $2x+3$ in $4x-3$ konstantnih predznakov.



(A) $x \leq -\frac{3}{2}$:

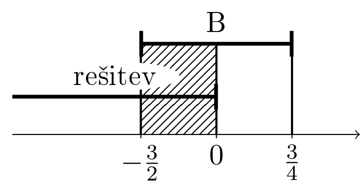
$$\begin{aligned} -(2x+3) &\leq -(4x-3) \\ x &\leq 3 \end{aligned}$$



Ker rešitev dobljene neenačbe ne leži v celoti v območju A, je $R_{\mathrm{A}} = \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$.

(B) $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}$:

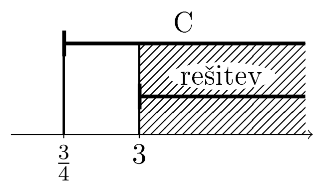
$$\begin{aligned} 2x+3 &\leq -(4x-3) \\ x &\leq 0 \end{aligned}$$



Ker rešitev dobljene neenačbe ne leži v celoti v območju B, je $R_{\mathrm{B}} = \left[-\frac{3}{2}, 0\right]$.

(C) $x \geq \frac{3}{4}$:

$$\begin{aligned} 2x+3 &\leq 4x-3 \\ 3 &\leq x \end{aligned}$$



Rešitev dobljene neenačbe leži v celoti v območju C, zato je $R_{\mathrm{C}} = [3, \infty)$.

Rešitev neenačbe je $R = R_{\mathrm{A}} \cup R_{\mathrm{B}} \cup R_{\mathrm{C}} = (-\infty, 0] \cup [3, \infty)$.

(j) $\left|\frac{x}{x+4}\right| \geq 1$

Preden se lotimo izpuščanja absolutnih vrednosti poskrbimo za to, da bodo v rešitvi le realna števila, za katera bo ulomek na levi strani neenačbe definiran.

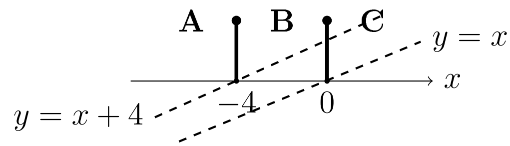
$$\text{Predpogoj: } x \neq -4\,.$$

Za elegantnejše reševanje neenačbe se sedaj znebimo še ulomka t.j. levo in desno stran neenačbe pomnožimo s pozitivnim izrazom $|x+4|$ in dobimo

$$|x| \geq |x+4|.$$

Skicirajmo krivulji $y = x$ in $y = x + 4$ ter razdelimo realno os na območja, kjer sta izraza x in $x + 4$ konstantnih predznakov.

Na kazalo



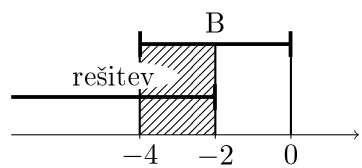
(A) $x \leq -4$:

$$\begin{aligned} -x &\geq -(x+4) \\ 0 &\geq -4 \end{aligned}$$

Dobljena neenakost je vedno resnična, zato je $R_{\mathrm{A}} = (-\infty, -4]$.

(B) $-4 \leq x \leq 0$:

$$\begin{aligned} -x &\geq x+4 \\ -2 &\geq x \end{aligned}$$



Ker rešitev dobljene neenačbe ne leži v celoti v območju B, je $R_{\mathrm{B}} = [-4, -2]$.

(C) $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} x &\geq x+4 \\ 0 &\geq 4 \end{aligned}$$

Dobljena neenačba nima rešitev, zato je $R_{\mathrm{C}} = \emptyset$.

Ob upoštevanju predpogoja vidimo, da je rešitev neenačbe

$$R = (R_{\mathrm{A}} \cup R_{\mathrm{B}} \cup R_{\mathrm{C}}) \setminus \{-4\} = (-\infty, -4) \cup (-4, -2].$$

1.4 Preslikave

1. Določi naravno definicijsko območje funkcij, katerih predpisi so:

   (a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3} + x^2$,

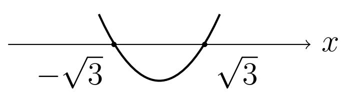
   (b) $f(x) = \frac{x+1}{x-1} + \ln(4 - x^2) - \sin x$,

   (c) $f(x) = \operatorname{arctg}(x-1) + \arcsin\sqrt{\frac{1}{x^2-4}}$,

   (d) $f(x) = x\sqrt{\frac{x^2+7x+10}{x^3-x}} + 1$.

Rešitev:

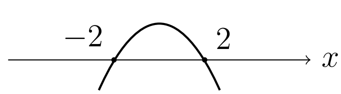
(a) Dana funkcija je definirana natanko tedaj, ko je izraz pod korenom nenegativen, torej $x^2 - 3 \geq 0$ (polinom x^2 je definiran za vsa realna števila). Vidimo, da sta ničli kvadratnega polinoma, ki nastopa na levi strani neenačbe $\pm\sqrt{3}$. Skicirajmo graf kvadratne parabole ter odčitajmo rešitev neenačbe.



Definicijsko območje je enako rešitvi neenačbe, torej

$$D(f) = (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \infty).$$

(b) Dana funkcija je definirana, ko sta definirana tako ulomek (poimenujmo ta primer problem (I)) kot naravni logaritem (problem (II)). Sinusna funkcija je definirana za vsa realna števila.
(I) Ulomek je definiran, ko je imenovalec neničelen oz. ko velja $x \neq 1$. Zapišimo rešitev prvega problema $R_{\mathrm{I}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
(II) Naravni logaritem je definiran zgolj za pozitivne logaritmande, torej mora veljati $4 - x^2 > 0$. Vidimo, da sta ničli kvadratnega polinoma, ki nastopa na levi strani neenačbe ± 2. Skicirajmo kvadratno parabolo ter odčitajmo rešitve neenačbe.

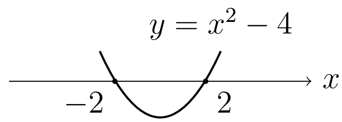


Rešitev drugega problema je ravno rešitev dane neenačbe, torej $R_{\mathrm{II}} = (-2, 2)$.
Funkcija je definirana, ko sta definirana hrati ulomek in naravni logaritem. Torej je

$$D_f = (-2, 1) \cup (1, 2) = (-2, 2) \setminus \{1\}.$$

Na kazalo

(c) Funkcija $f(x) = \operatorname{arctg}(x-1) + \arcsin\sqrt{\frac{1}{x^2-4}}$ je definirana, ko so definirani arkus sinus (I), koren (II) in ulomek (III). Arkus tangens je definiran povsod. Reševanja problemov se bomo lotili od lažjega k težjemu.
(III) $x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 2 \Rightarrow R_{\mathrm{III}} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$
(II) Rešujemo racionalno neenačbo $\frac{1}{x^2-4} \geq 0$, kjer je vrednost števca vedno pozitivna. Torej mora biti vrednost imenovalca tudi pozitivna.



$R_{\mathrm{II}} = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$
(I) Funkcija arkus sinus je definirana za argumente iz intervala $[-1, 1]$, kar v našem primeru pomeni, da mora veljati $-1 \leq \sqrt{\frac{1}{x^2-4}} \leq 1$. Vrednost kvadratnega korena je vedno nenegativna oz. $0 \leq \sqrt{\frac{1}{x^2-4}}$, kar pomeni, da je levi strani dvojne neenakosti vedno zadoščeno. Preveriti je treba zgolj, za katera realna števila x velja $\sqrt{\frac{1}{x^2-4}} \leq 1$. V točki (II) smo pokazali, da za $x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ velja $\frac{1}{x^2-4} \geq 0$ (oz. $x^2 - 4 > 0$), zato mora za te x veljati le še $\frac{1}{x^2-4} \leq 1$.

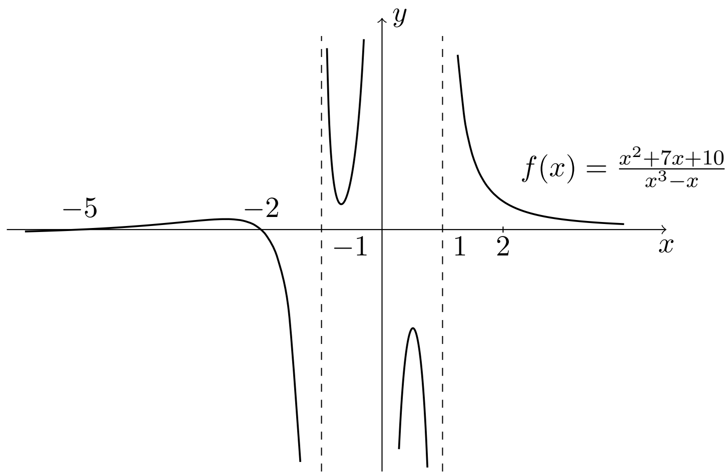
$$\frac{1}{x^2-4} \leq 1$$
$$0 \leq x^2 - 5$$

Rešitvi kvadratne enačbe $x^2 - 5 = 0$ sta $\pm\sqrt{5}$, kar pomeni, da je rešitev neenačbe $\frac{1}{x^2-4} \leq 1$, ki je seveda tudi enaka rešitvi prvega problema, $R_{\mathrm{I}} = (-\infty, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, \infty)$. Definicijsko območje funkcije je presek vseh treh intervalov, torej

$$D_f = R_{\mathrm{I}} \cap R_{\mathrm{II}} \cap R_{\mathrm{III}} = (-\infty, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, \infty).$$

(d) Za funkcijo $f(x) = x\sqrt{\frac{x^2+7x+10}{x^3-x}} + 1$ imamo dva problema: ulomek (I) in koren (II).
(I) $x^3 - x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1 \Rightarrow R_{\mathrm{I}} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.
(II) Neenačbe $\frac{x^2+7x+10}{x^3-x} \geq 0$ se lahko lotimo na več načinov. Tukaj si bomo pogledali grafični način, t.j. narisali bomo graf funkcije $g(x) = \frac{x^2+7x+10}{x^3-x}$ ter iz njega odčitali rešitev neenačbe.
Ničle: $x^2 + 7x + 10 = (x+2)(x+5) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -5,\ x_2 = -2$ (obe lihe stopnje)
Poli (izračunano v točki (I)): $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1$ (vsi lihe stopnje)
Asimptota: Ker je polinom v števcu nižje stopnje kot polinom v imenovalcu, je asimptota $y = 0$.
Iz izračunanih podatkov bi lahko narisali dva različna grafa, zato izračunajmo še npr. $f(2) = \frac{2^2+7\cdot 2+10}{2^3-2} > 0$.

Na kazalo



Rešitev neenačbe $\frac{x^2+7x+10}{x^3-x} \geq 0$ (ki je enaka rešitvi drugega problema) je $R_{\mathrm{II}} = [-5,-2] \cup (-1,0) \cup (1,\infty)$.
Funkcija je definirana tam, kjer sta definirana tako ulomek kot kvadratni koren, torej:

$$D_f = R_{\mathrm{I}} \cap R_{\mathrm{II}} = [-5,-2] \cup (-1,0) \cup (1,\infty).$$

OPOMBA: Pri grafičnem načinu reševanja smo hkrati "poskrbeli" tudi za definiranost ulomka (definicijsko območje funkcije $g(x)$ je namreč ravno enako R_{I}). Problema (II) bi se lahko lotili tudi računsko. Vrednost ulomka je nenegativna natanko tedaj, ko sta taka tudi števec in imenovalec, ali pa ko sta števec in imenovalec nepozitivna (vrednosti imenovalcev sta v obeh primerih seveda različni od nič).

2. Določi zalogo vrednosti realnih funkcij, katerih predpisi so:

   (a) $f : x \mapsto 1 + |x|$,

   (b) $f : x \mapsto |x-1| + |2x+1| + x$,

   (c) $f : x \mapsto \frac{|x+2|-|x-2|}{2x}$,

   (d) $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$,

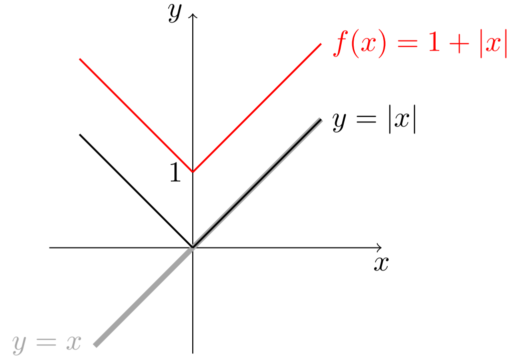
   (e) $f : x \mapsto 2 + 3\sin x$,

   (f) $f : x \mapsto \frac{x-2}{x+1}$.

Rešitev:

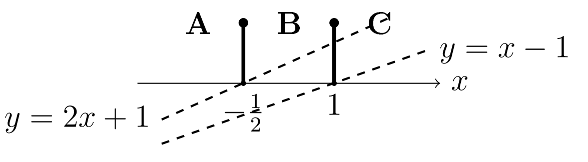
(a) Zalogo vrednosti bomo v tem primeru najlaže odčitali iz grafa funkcije $f(x)$. Funkcijska vrednost v nekem $x_0 \in D_f$ je namreč enaka višini točke na grafu funkcije f z absciso x_0.

Na kazalo

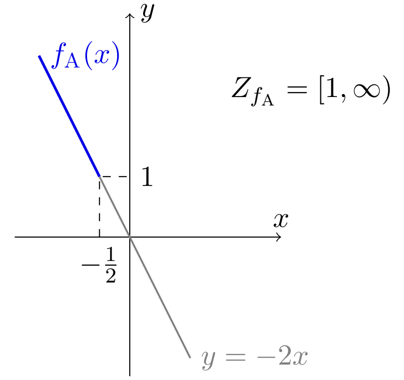


Vidimo, da so višine točk, ki jih graf doseže kvečjemu večje od 1. Torej je zaloga vrednosti naše funkcije $Z_f = [1, \infty)$.

(b) Ker je za funkcijo $f(x) = |x-1| + |2x+1| + x$ dosti težje skicirati graf s pomočjo transformacije grafov, kot smo naredili v prejšnji točki, se tega primera lotimo malo drugače. Najprej poiščimo kritični točki za izraza $x - 1$ in $2x + 1$ ter na primernih intevalih opustimo absolutne vrednosti. Intervale bomo označili z (I), (II) in (II), funkcijski predpis dane funkcije na posameznih intervalih pa bomo poimenovali $f_{\mathrm{A}}(x)$, $f_{\mathrm{B}}(x)$ in $f_{\mathrm{C}}(x)$.

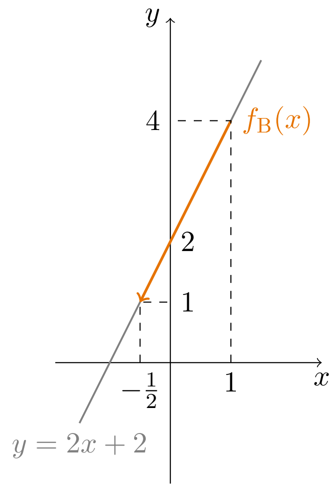


(A) $x \leq -\frac{1}{2}$: $f_{\mathrm{A}}(x) = -(x-1) - (2x+1) + x = -2x$



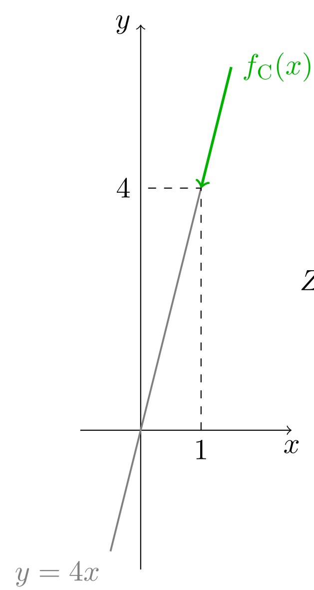
(B) $-\frac{1}{2} < x \leq 1$: $f_{\mathrm{B}}(x) = -(x-1) + 2x + 1 + x = 2x + 2$

Na kazalo



$Z_{f_{\mathrm{B}}} = (1, 4]$

(C) $1 < x$: $f_{\mathrm{C}}(x) = x - 1 + 2x + 1 + x = 4x$



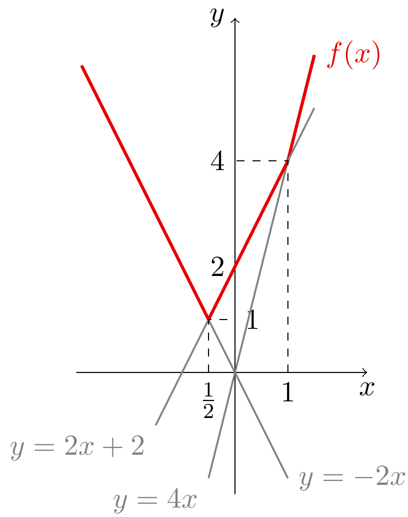
$Z_{f_{\mathrm{C}}} = (1, \infty)$

Zaloga vrednosti dane funkcije je enaka uniji zalog vrednosti na posameznih intervalih:

$$Z_f = Z_{f_{\mathrm{A}}} \cup Z_{f_{\mathrm{B}}} \cup Z_{f_{\mathrm{C}}} = [1, \infty).$$

OPOMBA: Graf funkcije $f(x)$ je sestavljen iz grafov funkcij (polinomov) $Z_{f_{\mathrm{A}}}$, $Z_{f_{\mathrm{B}}}$ in $Z_{f_{\mathrm{C}}}$. Tako funkcijo imenujemo **zlepek**.

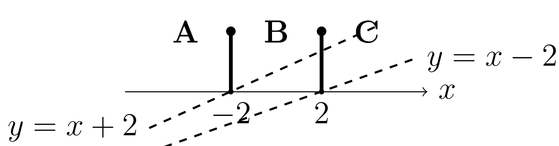
Na kazalo



Njen funkcijski predpis lahko zapišemo tudi kot:

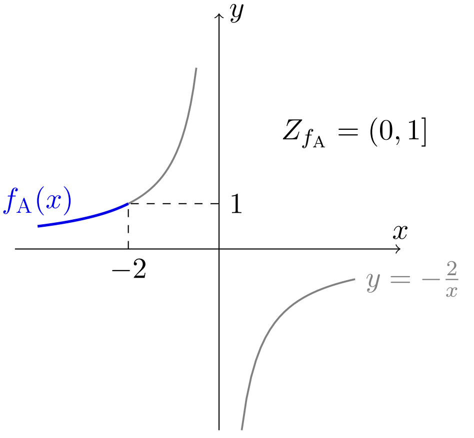
$$f(x) = \begin{cases} -2x & ; \quad x \leq -\frac{1}{2} \\ 2x+2 & ; \quad -\frac{1}{2} < x \leq 1 \\ 4x & ; \quad 1 < x \end{cases} .$$

(c) Pri funkciji $f(x) = \frac{|x+2|-|x-2|}{2x}$ postopamo podobno kot v prejšnjem primeru (t.j. na primernih intervalih opustimo absolutni vrednosti, ter za vsako tako zožitev funkcije zapišemo zalogo vrednosti). Bistvena razlika pa je v tem, da imamo tokrat opravka s funkcijo, katere funkcijski predpis ima obliko ulomka in je tako definicijsko območje funkcije $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

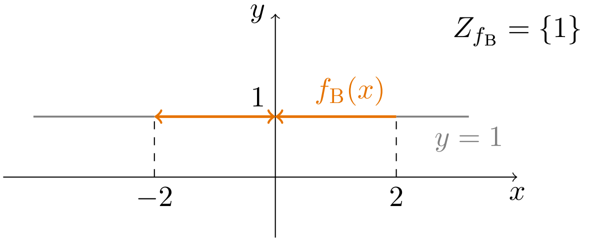


(A) $x \leq -2$: $f_{\mathrm{A}}(x) = -\frac{2}{x}$

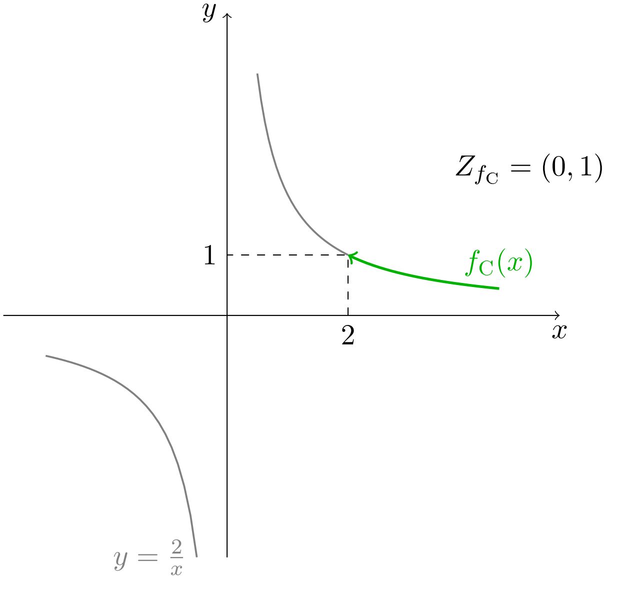
Na kazalo



(B) $-2 < x \leq 2$ in $x \neq 0$: $f_B(x) = 1$

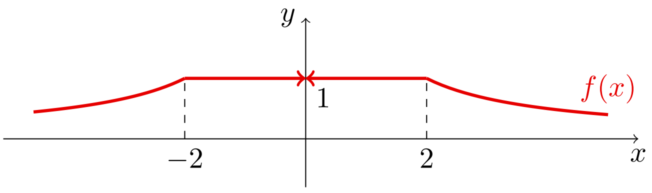


(C) $2 < x$: $f_C(x) = \frac{2}{x}$

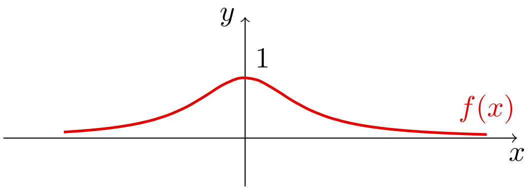


$Z_f = Z_{f_A} \cup Z_{f_B} \cup Z_{f_C} = (0, 1]$
OPOMBA: Graf funkcije f.

Na kazalo

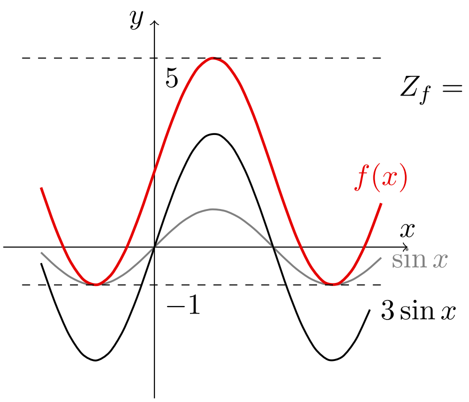


(d) Racionalna funkcija $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ nima ne ničel ne polov. Njena asimptota je x os, graf funkcije seka y os na višini 1. Naredimo še manjši razmislek: ko se x veča od 0 do ∞, se tako obnašata tudi x^2 in x^2+1. Kar pomeni, da imenovalec ulomka $\frac{1}{1+x^2}$ narašča, ko narašča x (od 0 naprej), zato vrednosti ulomka ves čas padajo. Na podoben način sklepamo na obnašanje, ko x pada od 0 proti $-\infty$, lahko pa bi za te x uporabili tudi dejstvo, da je funkcija f soda. Skicirajmo graf funkcije.



$Z_f = (0, 1]$

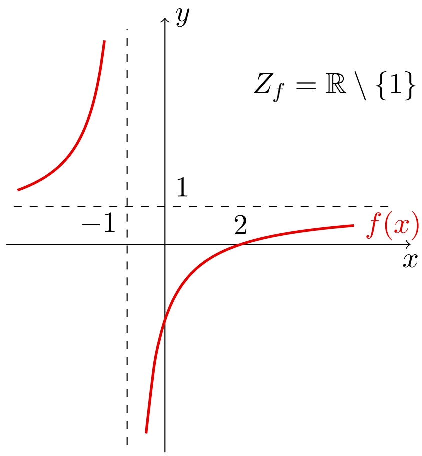
(e) Narišimo graf funkcije $f(x) = 2 + 3\sin x$ ter iz njega odčitajmo zalogo vrednosti.



$Z_f = [-1, 5]$

(f) Skicirajmo $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ in odčitajmo zalogo vrednosti.

Na kazalo



3. Določi za naslednje funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ali so injektivne, surjektivne, bijektivne.

   (a) $f(x) = 1 - x^2$,

   (b) $f(x) = x^3$,

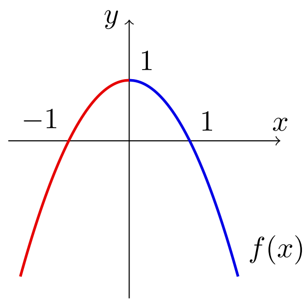
   (c) $f(x) = \sin x$,

   (d) $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x-1}$,

   (e) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-9}$.

Rešitev:

(a) Skicirajmo graf funkcije $f(x) = 1 - x^2$.



Ker ima funkcija dve ničli ($x = \pm 1$) ni injektivna. Ker je njena zaloga vrednosti $(-\infty, 1]$ ni niti surjektivna. Torej ni bijektivna.
OPOMBA: Če namesto $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vzamemo

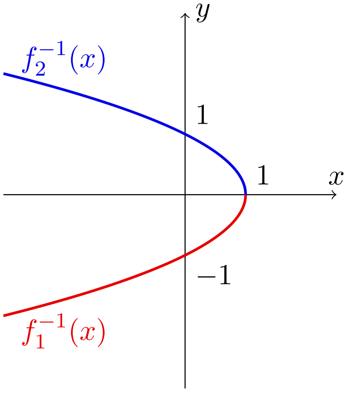
$$f_1 : (-\infty, 0] \to (-\infty, 1] \text{ ali } f_2 : [0, \infty) \to (-\infty, 1]$$

Na kazalo

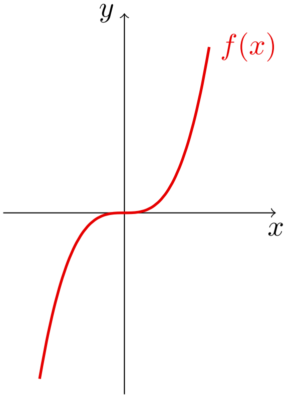
s funkcijskima predpisoma $f_1(x) = f_2(x) = 1 - x^2$, dobimo dve bijektivni zožitvi dane funkcije. To pomeni, da za ti dve funkciji obstajata inverza. Ker je za sliko y elementa x velja $y = 1 - x^2$. Prasliko elementa y izračunamo z zvezo $x = \pm\sqrt{1-y}$ (očitno imajo $y < 1$ dve prasliki). Zapišimo oba inverza:

$$f_1^{-1} : (-\infty, -1] \to (-\infty, 0], \; f_1^{-1}(x) = -\sqrt{1-x},$$
$$f_2^{-1} : (-\infty, -1] \to [0, \infty), \quad f_2^{-1}(x) = \sqrt{1-x}.$$

Narišimo še grafa obeh inverzov.

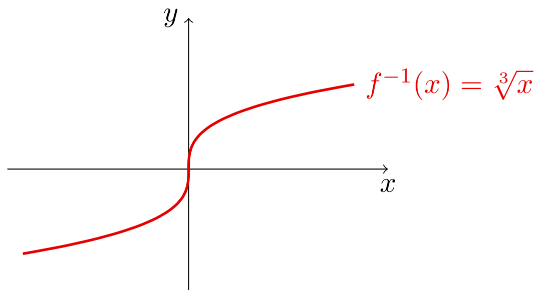


(b) Graf funkcije $f(x) = x^3$.

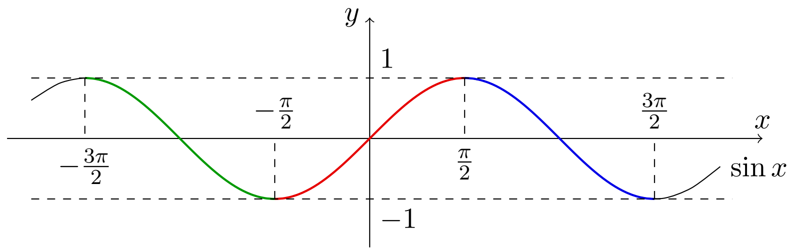


Funkcija je injektivna, saj je naraščajoča, t.j. iz neenakosti $x_1 < x_2$ sledi $f(x_1) < f(x_2)$. Funkcija je tudi surjektivna, saj je $Z_f = \mathbb{R}$. Torej je tudi bijektivna.
OPOMBA: Inverza funkcija dane funkcije je $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Na kazalo



(c) Graf funkcije $f(x) = \sin x$.

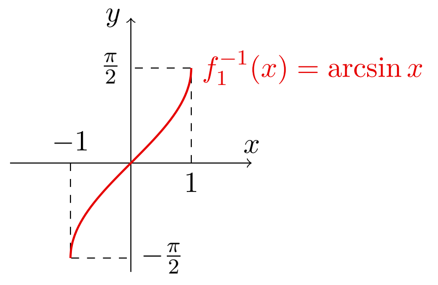


Dana funkcija ni injektivna, saj je periodična. Prav tako ni surjektivna, saj je $Z_f = [-1, 1]$. Torej funkcija ni bijektivna.
OPOMBA: Če namesto $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vzamemo npr:

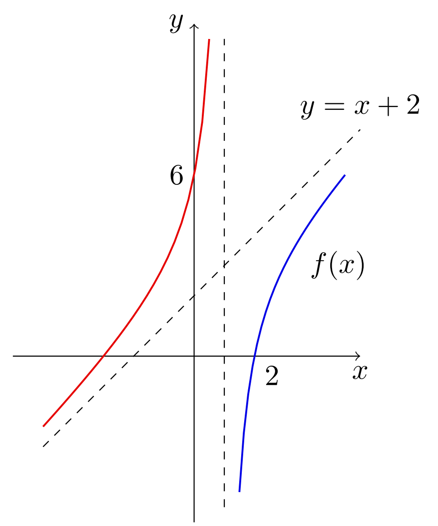
$$
\begin{aligned}
f_1 &: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1],\\
f_2 &: \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \to [-1, 1],\\
f_3 &: \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right] \to [-1, 1],\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

s funkcijskimi predpisi $f_1(x) = f_2(x) = \ldots = \sin x$, dobimo neskončno mnogo bijektivnih zožitev dane funkcije. To pomeni, da za teh neskončno mnogo funkcij obstajajo inverzi. Inverz funkcije f_1 (kot je definirana zgoraj) imenujemo arkus sinus. Inverzi preostalih funkcij nimajo posebnega imena. Narišimo graf tega inverza s funkcijskim predpisom $f_1^{-1}(x) = \arcsin x$.

Na kazalo



(d) Definicijsko območje funkcije $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x-1}$ ni $\mathbb{R}$, saj predpis ni definiran za $x = 1$. Najprej popravimo besedilo naloge: "Določi za funkcijo $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ ali je injektivna, surjektivna, bijektivna."
Graf dane funkcije (ničli ima v $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, pol v $x = 1$, asimptota je $y = x + 2$, y os pa seka pri 6).



Funkcija ni injektivna, saj ima dve ničli. Funkcija je surjektivna, saj je $Z_f = \mathbb{R}$. Funkcija ni bijektivna.
OPOMBA: Bijektivni zožitvi naše funkcije sta:

$$f_1 : (-\infty, 1) \to \mathbb{R},$$
$$f_2 : (1, \infty) \to \mathbb{R}.$$

Na kazalo

Izračunajmo prasliko poljubnega elementa y.

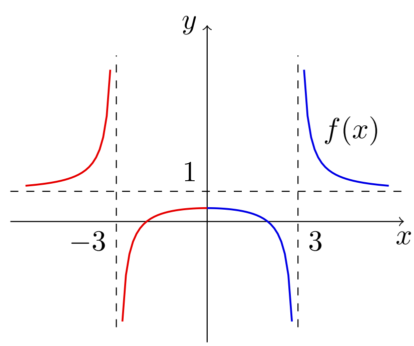
$$\begin{aligned} y &= \frac{x^2+x-6}{x-1} \\ y(x-1) &= x^2+x-6 \\ x^2+x(1-y)+(y-6) &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{-(1-y)\pm\sqrt{(1-y)^2-4(y-6)}}{2} = \\ &= \frac{y-1\pm\sqrt{y^2-6y+25}}{2} \end{aligned}$$

Inverzni preslikavi sta:

$$f_1^{-1}: \mathbb{R} \to (-\infty,1),\ f_1^{-1}(x) = \frac{x-1-\sqrt{x^2-6x+25}}{2},$$

$$f_2^{-1}: \mathbb{R} \to (1,\infty),\ f_2^{-1}(x) = \frac{x-1+\sqrt{x^2-6x+25}}{2}.$$

(e) Ponovno je potrebno popraviti besedilo naloge: "Določi za funkcijo $f: \mathbb{R}\setminus\{-3,3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-9}$ ali je injektivna, surjektivna, bijektivna".
Graf dane funkcije (ničli $x_{1,2} = \pm 2$, pola $x_{3,4} = \pm 3$, asimptota $y = 1$, $f(0) = \frac{4}{9}$).



Funkcija ni injektivna (dve ničli) ne surjektivna ($Z_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$), torej ni bijektivna.
OPOMBA: Bijektivni zožitvi naše funkcije sta:

$$f_1: (-\infty,0]\setminus\{-3\} \to \mathbb{R}\setminus\{1\},$$

$$f_2: [0,\infty)\setminus\{3\} \to \mathbb{R}\setminus\{1\}.$$

Inverzni preslikavi za bijektivni zožitvi sta:

$$f_1^{-1}: \mathbb{R}\setminus\{1\} \to (-\infty,0]\setminus\{-3\},\ f_1^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{9y-4}{y-1}},$$

$$f_2^{-1}: \mathbb{R}\setminus\{1\} \to [0,\infty)\setminus\{3\},\ f_2^{-1}(x) = \sqrt{\frac{9y-4}{y-1}}.$$

Na kazalo

4. Za funkcije iz prejšnje naloge preveri ali so sode ali lihe.

Rešitev:

(a) Ker velja $f(-x) = 1 - (-x)^2 = 1 - x^2 = f(x)$, je funkcija soda.

(b) Ker velja $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, je funkcija liha.

(c) Ker velja $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$, je funkcija liha.

(d) Ker je $f(-x) = \frac{(-x)^2-x-6}{-x-1}$, ni dana funkcija ne liha ne soda.

(e) Ker je $f(-x) = \frac{(-x)^2-4}{(-x)^2-9} = \frac{x^2-4}{x^2-9} = f(x)$, je funkcija soda.

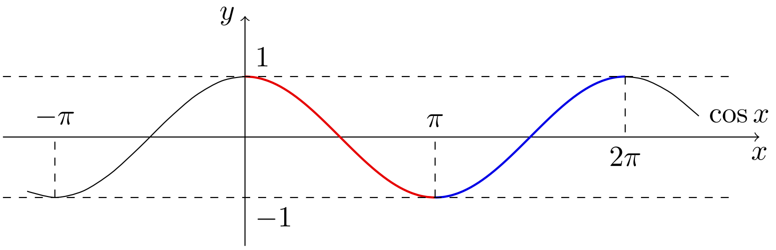
5. Izračunaj funkcijske predpise za $f \circ g$, $g \circ f$ in $f \circ f$, ko sta $f(x) = x^2 + 2$ in $g(x) = \sin x$.

Rešitev:

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sin x) = \sin^2 x + 2$
- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 2) = \sin(x^2 + 2)$
- $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x^2 + 2) = (x^2 + 2)^2 + 2 = x^4 + 4x^2 + 6$

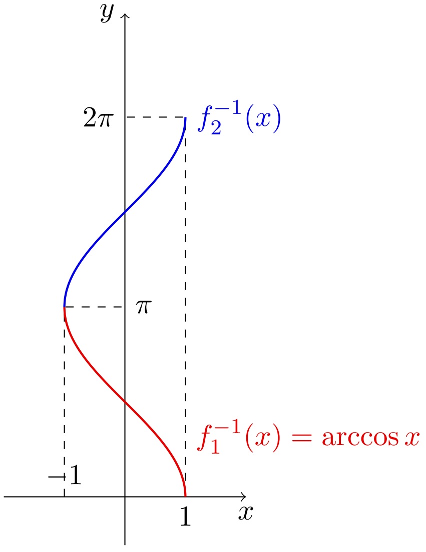
6. S pomočjo funkcije $\arccos x : [-1, 1] \to [0, \pi]$ izrazi inverz funkcije $f(x) = \cos x$, kjer je $f : [\pi, 2\pi] \to [-1, 1]$. Izračunaj, koliko je $\arccos(\cos 4)$.

Rešitev:



Pri bijektivnih funkcijah $f_1 : [0, \pi] \to [-1, 1]$ in $f_2 : [\pi, 2\pi] \to [-1, 1]$ s funkcijskima predpisoma $f_1(x) = f_2(x) = \cos x$ dobimo inverza, katerih grafa sta narisana spodaj (inverz f_1 imenujemo arkus kosinus).

Na kazalo



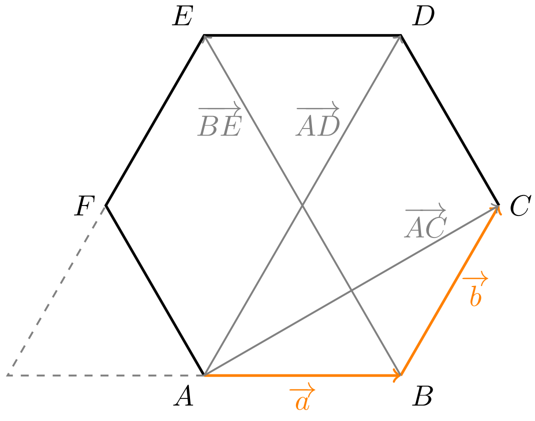
Vidimo, da je $f_2^{-1}(x) = 2\pi - \arccos x$, torej je $\arccos x = 2\pi - f_2^{-1}(x)$. Ker je $4 \in [\pi, 2\pi] = D_{f_2}$, je $f_2^{-1}(\cos 4) = 4$ in $\arccos(\cos 4) = 2\pi - f_2^{-1}(\cos 4) = 2\pi - 4$.

2 Vektorji

2.1 Osnovni pojmi

1. Dan je pravilni šestkotnik $ABCDEF$, v katerem označimo $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{b}$. Izrazi naslednje vektorje z vektorjema $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$: $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{DF}$.

Rešitev:

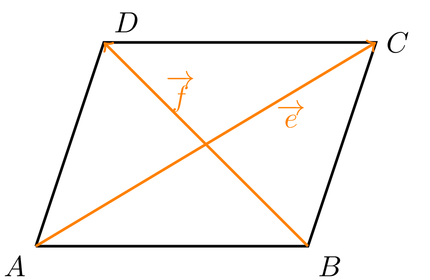


$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b},$$
$$\overrightarrow{AD} = 2\,\overrightarrow{b},$$
$$\overrightarrow{BE} = -2\overrightarrow{a} + 2\,\overrightarrow{b},$$
$$\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{a} + 2\,\overrightarrow{b},$$
$$\overrightarrow{BF} = -2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b},$$
$$\overrightarrow{DF} = -\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}.$$

OPOMBA: Zaradi preglednosti so na skici označeni le iskani vektorji $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ in $\overrightarrow{BE}$, preostale iskane vektorje naj si označi vsak študent sam.

2. Dan je paralelogram $ABCD$ z diagonalama $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{e}$ in $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{f}$. Izrazi z njima $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AD}$.

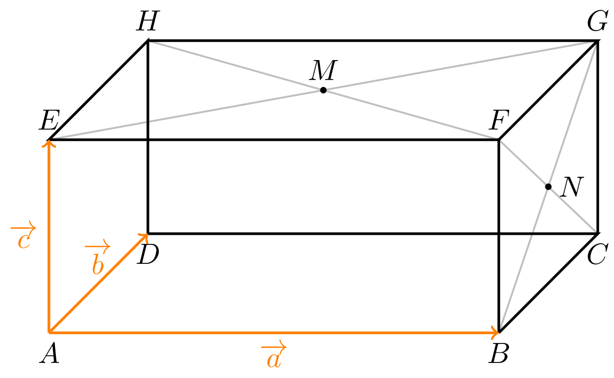
Rešitev: Pri tej nalogi uporabimo dejstvo, da se v poljubnem paralelogramu diagonali razpolavljata.



$$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{e} - \overrightarrow{f}),$$
$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{e} + \overrightarrow{f}).$$

3. Vektorji $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ in $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$ napenjajo kvader $ABCDEFGH$. Izrazi z njimi vektorje: $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{FH}$, $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{AM}$ in $\overrightarrow{AN}$ ($M=$ središče pravokotnika $EFGH$, $N=$ središče pravokotnika $BCGF$).

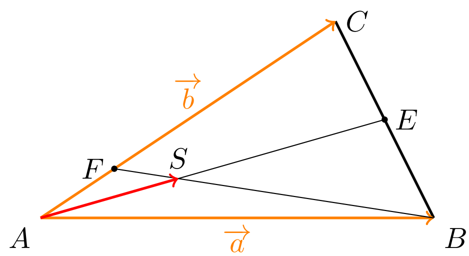
Rešitev:



$$\overrightarrow{AF} = \vec{a} + \vec{c},$$
$$\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c},$$
$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b},$$
$$\overrightarrow{FH} = -\vec{a} + \vec{b},$$
$$\overrightarrow{BH} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c},$$
$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c},$$
$$\overrightarrow{AN} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}.$$

4. V trikotniku ABC, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ je na stranici BC dana točka E, ki razpolavlja BC. Na stranici AC je točka F, ki deli AC v razmerju $1:3$. Naj bo S presečišče daljic BF in AE. Izrazi $\overrightarrow{AS}$ z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

Rešitev: Ker ne poznamo razmerja, v katerem točka S deli daljico AE, izrazimo vektor $\overrightarrow{AS}$ na dva načina.



$$(I)\ \overrightarrow{AS} = \lambda \overrightarrow{AE} = \lambda\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) =$$
$$= \lambda\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\left(-\vec{a} + \vec{b}\right)\right) =$$
$$= \frac{\lambda}{2}\vec{a} + \frac{\lambda}{2}\vec{b}$$
$$(II)\ \overrightarrow{AS} = \frac{1}{4}\vec{b} + \mu\overrightarrow{FB} =$$
$$= \frac{1}{4}\vec{b} + \mu\left(-\frac{1}{4}\vec{b} + \vec{a}\right) =$$
$$= \mu\vec{a} + \frac{1-\mu}{4}\vec{b}$$

Ker sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna (t.j. nevzporedna, saj bi v nasprotnem primeru imeli izrojen trikotnik), se vektor $\overrightarrow{AS}$ enolično izraža z njuno linearno kombinacijo. To pomeni, da sta pri (I) in (II) istoležna koeficienta pred vektorjema enaka. Dobimo sistem dveh enačb za dve neznanki: $\frac{\lambda}{2} = \mu$ (koeficienta pred $\overrightarrow{a}$) in $\frac{\lambda}{2} = \frac{1-\mu}{4}$ (koeficienta pred $\overrightarrow{b}$). Ker sta levi strani enakosti enaki, enačimo desni strani enakosti in izračunajmo μ.

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1-\mu}{4} \\ 5\mu &= 1 \\ \mu &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Dobljeni μ vstavimo v (II) in izrazimo vektor $\overrightarrow{AS}$.

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{5}\overrightarrow{a} + \frac{1-\frac{1}{5}}{4}\overrightarrow{b} = \frac{1}{5}\overrightarrow{a} + \frac{1}{5}\overrightarrow{b}$$

OPOMBA 1: Pri iskanju dveh načinov izražanja vektorja je treba paziti, da izberemo dve neodvisni poti. Poti $\overrightarrow{AS} = \lambda\overrightarrow{AE}$ in $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \mu\overrightarrow{AE}$ nista neodvisni, obe "uporabita" raztezek vektorja $\overrightarrow{AE}$. Vsak študent naj se za sebe prepriča, da nam predlagani poti ne data rešitve (t.j. da dobljeni sistem dveh enačb za dve neznanki nima natanko ene rešitve).
OPOMBA 2: Ko dobimo sistem enačb, nas v bistvu ne zanimata obe neznanki (kar bi potem predstavljalo rešitev sistema dveh enačb za dve neznanki), dovolj je izračunati le eno.

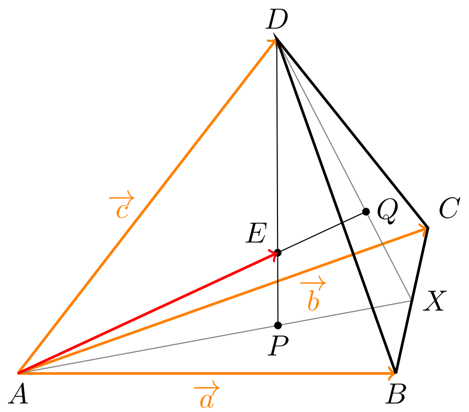
5. V pravilnem tetraedru $ABCD$ so dani vektorji $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AC}$ in $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{AD}$. Naj bo $\overrightarrow{DP}$ višina tetraedra iz vrha D na ploskev ABC ter $\overrightarrow{AQ}$ višina iz vrha A na ploskev BCD.

   (a) Izrazi vektorja $\overrightarrow{DP}$ in $\overrightarrow{AQ}$ z $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{c}$.

   (b) Pokaži, da se višini sekata v točki, ki jo označimo z E, ter izrazi vektor $\overrightarrow{AE}$ z $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{c}$.

Rešitev:

(a) Upoštevajmo dejstvo, da so stranske ploskve pravilnega tetraedra enakostranični trikotniki. Nožišče telesne višine je višinska točka osnovne ploskve. Višinska točka osnovne ploskve pa leži na višini in jo deli v razmerju 1:2 (kjer leži večji del ob oglišču, manjši del pa ob stranici).



$$\begin{aligned}\overrightarrow{DP} &= \overrightarrow{DA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AX} = \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{AQ} &= \overrightarrow{AX} + \frac{1}{3}\overrightarrow{XD} = \\ &= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right)\end{aligned}$$

(b) Točke A, P, Q in D ležijo na trikotniku AXD, kar pomeni, da je $APQD$ konveksni ravninski štirikotnik, v katerem se diagonali AQ in DP sekata.
Ker ne vemo, v kakšnem razmerju točka E deli daljici AQ in DP, izrazimo vektor $\overrightarrow{AE}$ na dva načina.

$$\begin{aligned}(I) \quad & \overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AQ} = \frac{\lambda}{3}\overrightarrow{a} + \frac{\lambda}{3}\overrightarrow{b} + \frac{\lambda}{3}\overrightarrow{c} \\ (II) \quad & \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{c} + \mu\overrightarrow{DP} = \frac{\mu}{3}\overrightarrow{a} + \frac{\mu}{3}\overrightarrow{b} + (1-\mu)\overrightarrow{c}\end{aligned}$$

Ker so vektorji $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{c}$ linearno neodvisni (t.j. nekomplanarni), lahko vektor $\overrightarrow{AE}$ enolično izrazimo z njihovo linearno kombinacijo. Ko enačimo istoležne koeficiente, dobimo sistem treh enačb za dve neznanki: $\frac{\lambda}{2} = \frac{\mu}{3}$ (koeficienta pred $\overrightarrow{a}$), $\frac{\lambda}{2} = \frac{\mu}{3}$ (koeficienta pred $\overrightarrow{b}$) in $\frac{\lambda}{2} = 1 - \mu$ (koeficienta pred $\overrightarrow{c}$). Ker sta prvi dve enačbi enaki, enačimo desni strani druge in tretje enačbe ter izračunamo vrednost neznanke μ.

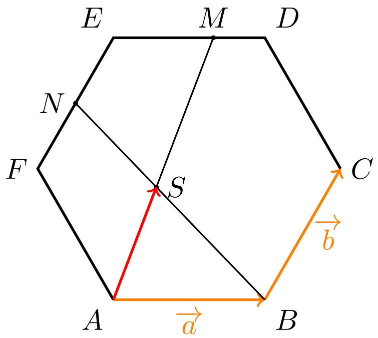
$$\begin{aligned}\frac{\mu}{3} &= 1 - \mu \\ 4\mu &= 3 \\ \mu &= \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad (II) \quad \overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{a} + \frac{1}{4}\overrightarrow{b} + \frac{1}{4}\overrightarrow{c}\end{aligned}$$

OPOMBA: Dejstvo, da se daljici AQ in DP sekata lahko pokažemo tudi računsko: dobljen sistem treh enačb z dvema neznankama ima v tem primeru natanko eno rešitev.

6. Točke A, B, C, D, E in F so zaporedna oglišča pravilnega šestkotnika. Točka M deli daljico ED v razmerju $2:1$, točka N pa je razpolovišče daljice FE. Naj bo S točka, v kateri se sekata daljici AM in BN. Označimo še $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{BC}$. Izrazi vektor $\overrightarrow{AS}$ z vektorjema $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$.

Na kazalo

Rešitev:



$$(I)\ \overrightarrow{AS} = \lambda\overrightarrow{AM} = -\frac{\lambda}{3}\overrightarrow{a} + 2\lambda\overrightarrow{b}$$

$$(II)\ \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{BN} = = (1-2\mu)\overrightarrow{a} + \frac{3\mu}{2}\overrightarrow{b}$$

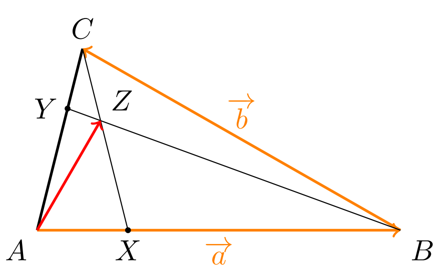
Iz linearne neodvisnosti vektorjev $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ sledi:

$$-\frac{\lambda}{3} = 1 - 2\mu \quad \text{in} \quad 2\lambda = \frac{3\mu}{2}.$$

Iz sistema izračunamo $\lambda = \frac{3}{7}$ ali $\mu = \frac{4}{7}$ in dobimo $\overrightarrow{AS} = -\frac{1}{7}\overrightarrow{a} + \frac{6}{7}\overrightarrow{b}$.

7. V trikotniku ABC točka X deli stranico AB v razmerju $1:3$, točka Y pa stranico CA v razmerju $1:2$. Daljici CX in BY se sekata v točki Z. Izrazi vektor $\overrightarrow{AZ}$ z vektorjema $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{BC}$.

Rešitev:



$$(I)\ \overrightarrow{AZ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{XC} = = \frac{1+3\lambda}{4}\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b}$$

$$(II)\ \overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{BY} = = \left(1 - \frac{\mu}{3}\right)\overrightarrow{a} + \frac{2}{3}\mu\overrightarrow{b}$$

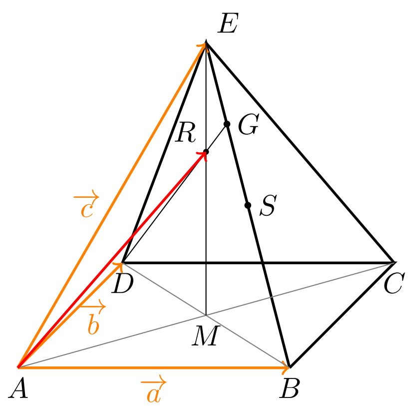
Zaradi linearne neodvisnosti vektorjev $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ velja $\frac{1+3\lambda}{4} = 1 - \frac{\mu}{3}$ in $\lambda = \frac{2}{3}\mu$. Izračunamo $\lambda = \frac{3}{5}$ ali $\mu = \frac{9}{10}$ in dobimo $\overrightarrow{AZ} = \frac{7}{10}\overrightarrow{a} + \frac{3}{5}\overrightarrow{b}$.

Na kazalo

8. V pravilni štiristrani piramidi $ABCDE$ označimo $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AD}$ in $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{AE}$. Naj bo S razpolovišče roba BE, G razpolovišče SE, M pa središče kvadrata $ABCD$.
   (a) Izrazi vektorje $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{DG}$, $\overrightarrow{AG}$ in $\overrightarrow{ME}$ z vektorji $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{c}$.
   (b) Označimo z R presečišče višine ME s premico skozi D in G. Izrazi vektor $\overrightarrow{MR}$ z vektorji $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{c}$.
   (c) Določi koordinate točke R, če so koordinate točk $A(1,-2,2)$, $B(3,0,2)$, $D(-1,0,2)$ in $E(1,0,-3)$.

Rešitev:

(a) Pravilna štiristrana piramida ima za osnovno ploskev kvadrat $ABCD$, točka E pa leži nad središčem kvadrata M.



$$\overrightarrow{BG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BE} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{a} + \frac{3}{4}\overrightarrow{c}$$
$$\overrightarrow{DG} = -\overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} + \overrightarrow{BG} = $$
$$= \frac{1}{4}\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} + \frac{3}{4}\overrightarrow{c}$$
$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{BG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{a} + \frac{3}{4}\overrightarrow{c}$$
$$\overrightarrow{ME} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{a} - \frac{1}{2}\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$$

(b)

$$(I)\ \overrightarrow{MR} = \lambda\overrightarrow{ME} = -\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{a} - \frac{\lambda}{2}\overrightarrow{b} + \lambda\overrightarrow{c}$$
$$(II)\ \overrightarrow{MR} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b} + \mu\overrightarrow{DG} = \frac{\mu-2}{4}\overrightarrow{a} + \left(\frac{1}{2} - \mu\right)\overrightarrow{b} + \frac{3}{4}\mu\overrightarrow{c}$$

Iz linearne neodvisnosti vektorjev $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{c}$ sledijo enačbe

$$-\frac{\lambda}{2} = \frac{\mu-2}{4},\ -\frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2} - \mu \,\text{in}\, \lambda = \frac{3}{4}\mu\,.$$

Izračunamo $\mu = \frac{4}{5}$ ali $\lambda = \frac{3}{5}$, iz česar sledi $\overrightarrow{MR} = -\frac{3}{10}\overrightarrow{a} - \frac{3}{10}\overrightarrow{b} + \frac{3}{5}\overrightarrow{c}$.

Na kazalo

(c) Izrazimo komponente krajevnega vektorja $\overrightarrow{r}_R$, saj so komponente krajevnega vektorja koordinate točke R.

$$\overrightarrow{r}_R = \overrightarrow{r}_A + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MR} = \overrightarrow{r}_A + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) - \frac{3}{10}\overrightarrow{a} - \frac{3}{10}\overrightarrow{b} + \frac{3}{5}\overrightarrow{c} =$$
$$= \overrightarrow{r}_A + \frac{1}{5}\overrightarrow{a} + \frac{1}{5}\overrightarrow{b} + \frac{3}{5}\overrightarrow{c}$$

Izračunajmo še komponente vektorjev $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{c}$.

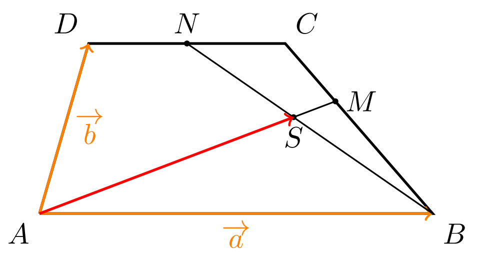
$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{r}_B - \overrightarrow{r}_A = (3,0,2) - (1,-2,2) = (2,2,0)$$
$$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AD} = (-2,2,0)$$
$$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{AE} = (0,2,-5)$$

Vstavimo dobljene rezultate v zgornji nastavek in dobimo

$$\overrightarrow{r}_R = (1,-2,2) + \frac{1}{5}(2,2,0) + \frac{1}{5}(-2,2,0) + \frac{3}{5}(0,2,-5) = (1,0,-1)\ .$$

9. V trapezu $ABCD$ velja $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DC}$. Označimo $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{b}$. Točka M deli daljico BC v razmerju 2:1, točka N pa razpolavlja stranico CD. Daljici AM in BN se sekata v točki, ki jo označimo s S. Izrazi vektor $\overrightarrow{AS}$ z vektorjema $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$.

Rešitev:



$$(I)\ \overrightarrow{AS} = \lambda\overrightarrow{AM} = \frac{2\lambda}{3}\overrightarrow{a} + \frac{2\lambda}{3}\overrightarrow{b}$$
$$(II)\ \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{BN} =$$
$$= \left(1 - \frac{3\mu}{4}\right)\overrightarrow{a} + \mu\,\overrightarrow{b}$$

Iz linearne neodvisnosti vektorjev $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ sledita enačbi $-\frac{2\lambda}{3} = 1 - \frac{3\mu}{4}$ in $\frac{2\lambda}{3} = \mu$. Izračunamo $\lambda = \frac{6}{7}$ ali $\mu = \frac{4}{7}$, iz česar sledi $\overrightarrow{AS} = \frac{4}{7}\overrightarrow{a} + \frac{4}{7}\overrightarrow{b}$.

Na kazalo

10. V prostoru so dani vektorji $\vec{a} = (1, 0, 2)$, $\vec{b} = (-2, -3, 1)$, $\vec{c} = (0, 0, 3)$ in $\vec{d} = (5, 6, 1)$.

    (a) Izrazi $\vec{d}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$.

    (b) Ali tvorijo $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ bazo prostora?

    (c)* Zapiši koordinate vektorja $\vec{d}$ glede na bazo $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$.

Rešitev:

(a) Iščemo taka realna števila α, β in γ, da bo veljalo $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$. Če zapišemo komponente vseh vektorjev dobimo sistem treh enačb za tri neznanke:

$$\begin{aligned}\vec{d} &= \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}\\ (5, 6, 1) &= \alpha(1, 0, 2) + \beta(-2, -3, 1) + \gamma(0, 0, 3) = (\alpha - 2\beta, -3\beta, 2\alpha + \beta + 3\gamma)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{prva komponenta: } & 5 = \alpha - 2\beta \qquad \Rightarrow \alpha = 5 + 2\beta = 5 + 2 \cdot (-2) = 1\\ \text{druga komponenta: } & 6 = -3\beta \Rightarrow \beta = -2\\ \text{tretja komponenta: } & 1 = 2\alpha + \beta + 3\\ & \qquad \Rightarrow \gamma = \frac{1}{3}(1 - 2\alpha - \beta) = \frac{1}{3}(1 - 2 + 2) = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Dobljene rešitve vstavimo v nastavek $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ in dobimo $\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$.

(b) Ti trije vektorji bodo baza prostora natanko tedaj, ko bodo linearno neodvisni. To bo pa res natanko tedaj, ko bo njihova linearna kombinacija $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ ničelni vektor le v primeru, ko bo veljalo $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}\\ (0, 0, 0) &= \alpha(1, 0, 2) + \beta(-2, -3, 1) + \gamma(0, 0, 3) = (\alpha - 2\beta, -3\beta, 2\alpha + \beta + 3\gamma)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow 0 = \alpha - 2\beta \qquad \Rightarrow \alpha = 2\beta = 2 \cdot 0 = 0\\ &\Rightarrow 0 = -3\beta \Rightarrow \beta = 0\\ &\Rightarrow 0 = 2\alpha + \beta + 3\gamma \qquad \Rightarrow \gamma = \frac{1}{3}(-2\alpha - \beta) = \frac{1}{3}(-2 \cdot 0 + 2 \cdot 0) = 0\end{aligned}$$

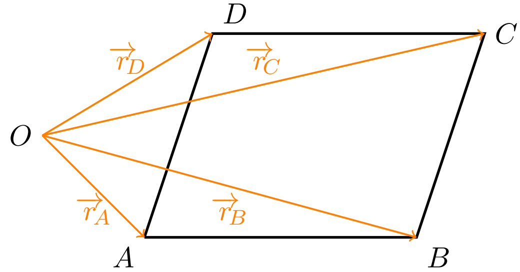
Pokazali smo, da so dani vektorji res baza prostora.

(c)* $\vec{d} = (1, -2, \frac{1}{3})$ (v bazi $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$).

Na kazalo

11. Podane so točke $A(-1,1,2)$, $B(1,-2,1)$ in $C(3,0,-1)$. Določi D tako, da bo $ABCD$ paralelogram.

Rešitev: V paralelogramu sta nasprotni stranici vzporedni in enako dolgi. To pomeni, da sta npr. vektorja $\overrightarrow{AD}$ in $\overrightarrow{BC}$ enaka. Enako velja za preostali par stranic (oz. vektorjev).

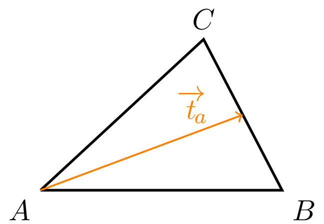


$$\overrightarrow{BC} = (2,2,-2)$$
$$\vec{r}_D = \vec{r}_A + \overrightarrow{AD} = \vec{r}_A + \overrightarrow{BC} = \\ = (1,3,0)$$

Koordinate točke D so $(1,3,0)$.

12. Oglišča trikotnika imajo koordinate $A(2,0,1)$, $B(1,-2,3)$ in $C(0,4,2)$. Izračunaj vektor $\vec{t}_a$ (orientiran je tako, da kaže od oglišča A proti stranici BC).

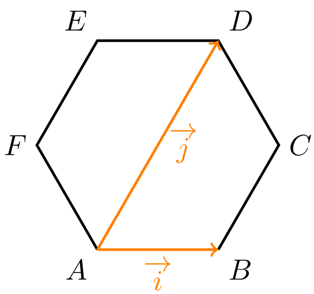
Rešitev: Nožišče težiščnice t_a je razpolovišče stranice BC.



$$\vec{t}_a = \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \left(-\tfrac{3}{2}, 1, \tfrac{3}{2}\right)$$

13. Dan je pravilni šestkotnik $ABCDEF$. Poišči koordinate oglišč v bazi $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \overrightarrow{AD}$ z izhodiščno točko A.

Rešitev:



$$A(0,0), \qquad D(0,1),$$
$$B(1,0), \qquad E(-1,1),$$
$$C\left(1,\frac{1}{2}\right), \qquad F\left(-1,\frac{1}{2}\right).$$

Na kazalo

14. Naj bosta $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ in $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$. Izračunaj:

    (a) $4\vec{a} - 2\vec{b}$,

    (b) $\vec{a} \cdot \vec{b}$,

    (c) $|4\vec{a} - 2\vec{b}|$.

Rešitev: Vseh računov se bomo lotili na dva načina: pri prvem načinu računamo z linearnimi kombinacijami vektorjev $\vec{i}$, $\vec{j}$ in $\vec{k}$, pri drugem pa uporabimo zapis obeh vektorjev (in računanje) po komponentah.

I. način:

(a)
$$4\vec{a} - 2\vec{b} = 4\left(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right) - 2\left(2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}\right) = \\ = 4\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k} - 4\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k} = -10\vec{j} + 6\vec{k}$$

(b) Pri izračunu skalarnega produkta bomo uporabili dejstvo, da je skalarni produkt dveh pravokotnih vektorjev enak nič in zato $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$. Uporabili bomo še:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}|^2 = 1$$
$$\vec{j} \cdot \vec{j} = |\vec{j}|^2 = 1$$
$$\vec{k} \cdot \vec{k} = |\vec{k}|^2 = 1.$$

Izračunajmo skalarni produkt:

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= \left(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)\cdot\left(2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}\right) = \\ &= \vec{i}\cdot(2\vec{i}) + \vec{i}\cdot(3\vec{j}) + \vec{i}\cdot(-\vec{k}) + (-\vec{j})\cdot(2\vec{i}) + (-\vec{j})\cdot(3\vec{j}) + \\ &\quad + (-\vec{j})\cdot(-\vec{k}) + \vec{k}\cdot(2\vec{i}) + \vec{k}\cdot(3\vec{j}) + \vec{k}\cdot(-\vec{k}) = \\ &= 2\vec{i}\cdot\vec{i} + 3\vec{i}\cdot\vec{j} - \vec{i}\cdot\vec{k} - 2\vec{j}\cdot\vec{i} - 3\vec{j}\cdot\vec{j} + \vec{j}\cdot\vec{k} + 2\vec{k}\cdot\vec{i} + \\ &\quad + 3\vec{k}\cdot\vec{j} - \vec{k}\cdot\vec{k} = 2 - 3 - 1 = -2\end{aligned}$$

(c) Ker za poljuben vektor $\vec{x}$ velja $\vec{x} \cdot \vec{x} = |\vec{x}|^2$, bomo dolžino vektorja $4\vec{a} - 2\vec{b}$ izračunali s pomočjo skalarnega produkta vektorja samega s seboj.

$$\begin{aligned}\left(4\vec{a} - 2\vec{b}\right)\cdot\left(4\vec{a} - 2\vec{b}\right) &= \left(-10\vec{j} + 6\vec{k}\right)\cdot\left(-10\vec{j} + 6\vec{k}\right) = \\ &= -10\vec{j}\cdot(-10\vec{j}) - 10\vec{j}\cdot(6\vec{k}) + \\ &\quad + 6\vec{k}\cdot(-10\vec{j}) + 6\vec{k}\cdot(6\vec{k}) = \\ &= 100\vec{j}\cdot\vec{j} - 120\vec{j}\cdot\vec{k} + 36\vec{k}\cdot\vec{k} = 100 + 36 = 136\end{aligned}$$

Tako je $|4\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{136} = 2\sqrt{34}$.

Na kazalo

II. način: Najprej zapišemo vektorja $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ v komponentah: $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} = (1,-1,1)$ in $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k} = (2,3,-1)$.

(a) $$\begin{aligned} 4\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b} &= 4(1,-1,1) - 2(2,3,-1) = (4,-4,4) + (-4,-6,2) = \\ &= (4-4,-4-6,4+2) = (0,-10,6) \end{aligned}$$

(b) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = (1,-1,1)\cdot(2,3,-1) = 1\cdot 2 + (-1)\cdot 3 + 1\cdot(-1) = -2$

(c) $\left|4\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right| = |(0,-10,6)| = 2\,|(0,-5,3)| = 2\sqrt{0^2+(-5)^2+3^2} = 2\sqrt{34}$.

15. Vzemimo podatke iz naloge 9. Naj bosta $\left|\overrightarrow{a}\right| = 2$ in $\left|\overrightarrow{b}\right| = 1$. Pokažite, da sta vektorja $\overrightarrow{AN}$ in $\overrightarrow{BD}$ pravokotna natanko tedaj, ko sta pravokotna vektorja $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$?

Rešitev: Neničelna vektorja sta pravokotna natanko tedaj, ko je njun skalarni produkt enak 0. Označimo kot med vektorjema $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ z φ.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BD} &= \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) = -\frac{1}{4}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a} + \frac{1}{4}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} - \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b} = \\ &= -\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{a}\right|\cdot\left|\overrightarrow{a}\right| - \frac{3}{4}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} + \left|\overrightarrow{b}\right|\cdot\left|\overrightarrow{b}\right| = -\frac{1}{\cancel{4}}\cdot\cancel{4} - \frac{3}{4}\left|\overrightarrow{a}\right|\cdot\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\varphi + 1 = \\ &= -\frac{3}{\cancel{4}^{2}}\cancel{2}\cos\varphi = -\frac{3}{2}\cos\varphi \end{aligned}$$

Vidimo, da je $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$ natanko tedaj, ko je $\cos\varphi = 0$, to pa je natanko tedaj, ko je $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

16. Določi kot, ki ga oklepata vektorja $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$ in $(1,0,1)$.

Rešitev: Da se bomo lažje izražali, poimenujmo dana vektorja: $\overrightarrow{a} = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$ in $\overrightarrow{b} = (1,0,1)$. Iz definicije skalarnega produkta vektorjev $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|\cos\varphi$ (kjer je φ kot med obema vektorjema) izrazimo

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|}.$$

Na kazalo

Ker je

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\cdot(1,0,1) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2} = \frac{1\cancel{-\sqrt{3}}+1+\cancel{\sqrt{3}}}{2} = 1,\\
|\vec{a}|^2 &= \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{3}+3}{4} + \frac{1-2\sqrt{3}+3}{4} = \frac{8}{4} = 2,\\
|\vec{a}| &= \sqrt{2},\\
|\vec{b}|^2 &= 1^2+1^2 = 2,\\
|\vec{b}| &= \sqrt{2},
\end{aligned}$$

je $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ in zato $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

17. Izračunaj skalarni produkt $(3\vec{a} - 2\vec{b})(5\vec{a} - 6\vec{b})$, kjer je kot med $\vec{a}$ in $\vec{b}$ enak $\frac{\pi}{3}$, $|\vec{a}| = 1$ in $|\vec{b}| = 2$.

Rešitev: Uporabimo distributivnostni zakon, komutativnost skalarnega množenja ter enakosti

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{a} &= |\vec{a}|^2 = 1,\\
\vec{b}\cdot\vec{b} &= |\vec{b}|^2 = 4,\\
\vec{a}\cdot\vec{b} &= |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3} = 1\cdot\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} = 1,
\end{aligned}$$

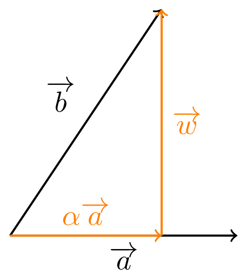
da poenostavimo dani skalarni produkt:

$$\begin{aligned}
(3\vec{a} - 2\vec{b})(5\vec{a} - 6\vec{b}) &= 3\cdot 5\cdot\vec{a}\cdot\vec{a} - 3\cdot 6\cdot\vec{a}\cdot\vec{b} - 2\cdot 5\cdot\vec{b}\cdot\vec{a} + 2\cdot 6\cdot\vec{b}\cdot\vec{b} =\\
&= 15\cdot 1 - 28\vec{a}\cdot\vec{b} + 12\cdot 4 = 15 - 28\cdot 1 + 48 = 35.
\end{aligned}$$

18. Podana sta vektorja $\vec{a} = (6,-3,2)$ in $\vec{b} = (2,-2,-2)$. Razstavi vektor $\vec{b} = \alpha\vec{a} + \vec{w}$, kjer je $\vec{w} \perp \vec{a}$. Izračunaj $\vec{w}$.

Rešitev:

Na kazalo



V vektorski enačbi $\overrightarrow{b} = \alpha\overrightarrow{a} + \overrightarrow{w}$ se "skrivajo" tri enačbe za štiri neznanke (α in vse tri komponente vektorja $\overrightarrow{w}$). Ker velja $\overrightarrow{w} \perp \overrightarrow{a}$, je $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{a} = 0$. Levo in desno stran dane enčbe zato (skalarno) pomnožimo z $\overrightarrow{a}$, da izničimo vektor $\overrightarrow{w}$ in dobimo linearno enačbo iz katere izračunamo α.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{b} &= \alpha\overrightarrow{a} + \overrightarrow{w} && \Big/ \cdot \overrightarrow{a}\\
\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a} &= \alpha\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} + \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{a}\\
\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a} &= \alpha\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} && \Big/ : \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}\\
\alpha &= \frac{\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}}{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}}
\end{aligned}$$

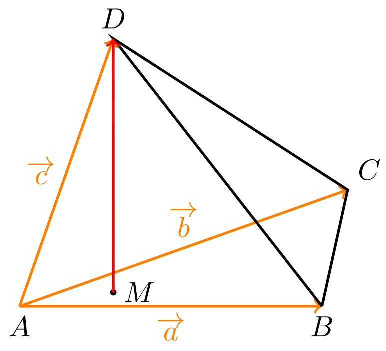
Opozorimo na dejstvo, da smo v predzadnji vrstici delili s številom $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}$, deljenje z vektorji namreč ni definirano. V zadnji vrstici torej ne smemo krajšati ulomka (saj bi to pomenilo, da smo števec in imenovalec delili z vektorjem $\overrightarrow{a}$). Ker velja

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a} &= (2, -2, -2) \cdot (6, -3, 2) = 12 + 6 - 4 = 14,\\
\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} &= (6, -3, 2) \cdot (6, -3, 2) = 6^2 + (-3)^2 + 2^2 = 49,
\end{aligned}$$

je $\alpha = \frac{14}{49} = \frac{2}{7}$ in $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{b} - \alpha\overrightarrow{a} = (2, -2, -2) - \frac{2}{7}(6, -3, 2) = \left(\frac{2}{7}, -\frac{8}{7}, -\frac{18}{7}\right)$.

19. V tristrani piramidi $ABCD$ so dani vektorji $\overrightarrow{AB} = (2, 1, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 3, 0)$ in $\overrightarrow{AD} = (0, -1, 2)$. Naj bo $\overrightarrow{MD}$ višina iz D na ploskev ABC. Izračunaj koordinate vektorja $\overrightarrow{MD}$.

Rešitev: Poimenujmo vektorje $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{c}$. Podobno kot v prejšnjem primeru bomo tudi tukaj uporabili dejstvo, da je vektor, ki leži na višini $\overrightarrow{MD}$, pravokoten na vektoja $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$.



$$\overrightarrow{MD} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \vec{c} \Big/ \cdot\vec{a}\ (I) \Big/ \cdot\vec{b}\ (II)$$

$$(I)\ \overrightarrow{MD}\cdot\vec{a} = \alpha\vec{a}\cdot\vec{a} + \beta\vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{c}\cdot\vec{a}$$
$$(II)\ \overrightarrow{MD}\cdot\vec{b} = \alpha\vec{a}\cdot\vec{b} + \beta\vec{b}\cdot\vec{b} + \vec{c}\cdot\vec{b}$$

Če uporabimo enakosti $\overrightarrow{MD}\cdot\vec{a} = 0$, $\overrightarrow{MD}\cdot\vec{b} = 0$, $\vec{a}\cdot\vec{a} = 5$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} = 1$, $\vec{a}\cdot\vec{c} = -1$, $\vec{b}\cdot\vec{b} = 10$ in $\vec{b}\cdot\vec{c} = -3$, se enačbi prepišeta v

$$(I)\ 0 = 5\alpha + \beta - 1$$
$$(II)\ 0 = \alpha + 10\beta - 3.$$

Rešitev sistema sta $\alpha = \frac{1}{7}$ in $\beta = \frac{2}{7}$. Tako je $\overrightarrow{MD} = \frac{1}{7}\vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b} + \vec{c} = (0, 0, 2)$.

20. Poenostavi izraz $(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} - \vec{a}) + (3\vec{b} + 2\vec{c}) \times (\vec{a} + \vec{b})$.

Rešitev: Za poenostavitev uporabimo distributivnostni zakon, antikomutativnost vektorskega množenja vektorjev ter enakosti $\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$ in $\vec{b}\times\vec{b} = \vec{0}$:

$$(2\vec{a} + \vec{b})\times(\vec{c} - \vec{a}) + (3\vec{b} + 2\vec{c})\times(\vec{a} + \vec{b}) =$$
$$= -\vec{b}\times\vec{c} + 2\vec{b}\times\vec{a} = \vec{b}\times(2\vec{a} - \vec{c}).$$

V zadnji vrstici smo na levo stran izpostavili vektor $\vec{b}$. Poudarimo le še, da je bilo izpostavljanje možno, ker je $\vec{b}$ v obeh členih nastopal kot levi faktor vektorskega produkta.

21. Vzemimo podatke iz naloge 9. Izrazi ploščini danega trapeza in $\triangle ABD$ z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Kolikšno je razmerje med obema ploščinama?

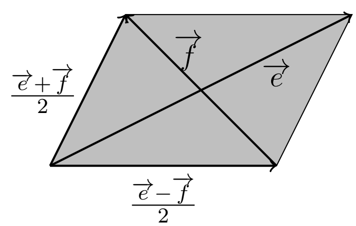
Rešitev: Dan trapez je sestavljen iz treh skladnih trikotnikov, ki jih napenjata vektorja $\frac{1}{2}\vec{a}$ in $\vec{b}$, ploščina vsakega trikotnika pa je polovica dolžine vektorskega produkta vektorjev

$\frac{1}{2}\vec{a}$ in $\vec{b}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{pl}_{\mathrm{trapez}} &= \frac{3}{2}\left|\frac{1}{2}\vec{a}\times\vec{b}\right| = \frac{3}{4}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| \\
\mathrm{pl}_{\triangle} &= \frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| \\
\mathrm{pl}_{\mathrm{trapez}}:\mathrm{pl}_{\triangle} &= \frac{\frac{3}{\cancel{4}^{2}}\cancel{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}}{\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}} = 3:2
\end{aligned}$$

> 22. Izračunaj ploščino paralelograma, katerega diagonali sta vektorja $\vec{e} = 2\vec{m} - \vec{n}$ in $\vec{f} = 4\vec{m} - 5\vec{n}$, $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$, $\angle(\vec{m},\vec{n}) = \frac{\pi}{4}$.

Rešitev:



Ploščina paralelograma je enaka dolžini vektorskega produkta vektorjev, ki napenjata paralelogram:

$$\begin{aligned}
\mathrm{pl} &= \left|\frac{\vec{e}-\vec{f}}{2}\times\frac{\vec{e}+\vec{f}}{2}\right| = \frac{1}{4}\left|\left(\vec{e}-\vec{f}\right)\times\left(\vec{e}+\vec{f}\right)\right| = \\
&= \frac{1}{4}\left|\left(2\vec{m}-\vec{n}-(4\vec{m}-5\vec{n})\right)\times\left(2\vec{m}-\vec{n}+4\vec{m}-5\vec{n}\right)\right| = \\
&= \frac{1}{4}\left|\left(-2\vec{m}+4\vec{n}\right)\times\left(6\vec{m}-6\vec{n}\right)\right| = \frac{\cancel{2}\cdot\cancel{6}^{3}}{\cancel{4}}\left|\left(-\vec{m}+2\vec{n}\right)\times\left(\vec{m}-\vec{n}\right)\right| = \\
&= 3\left|-\vec{m}\times\vec{m}+\vec{m}\times\vec{n}+2\vec{n}\times\vec{m}-2\vec{n}\times\vec{n}\right| = 3\left|-\vec{n}\times\vec{m}+2\vec{n}\times\vec{m}\right| = \\
&= 3\left|\vec{n}\times\vec{m}\right| = 3\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{m}\right|\cdot\sin\varphi.
\end{aligned}$$

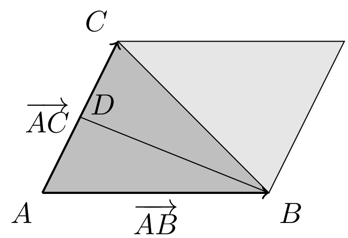
Uporabimo podatke, ki so podani v besedilu naloge, da izračunamo ploščino:

$$\mathrm{pl} = 3\cdot 1\cdot 1\cdot\sin\frac{\pi}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Na kazalo

23. Izračunaj ploščino $\triangle ABC$ in dolžino višine BD, če je $A(1,-2,8)$, $B(0,0,4)$ in $C(6,2,0)$.

Rešitev:



Ploščina $\triangle ABC$ je enaka polovici ploščine paralelograma, ki ga napenjata vektorja $\overrightarrow{AB}=(-1,2,-4)$ in $\overrightarrow{AC}=(5,4,-8)$, le-ta pa je enaka dolžini vektorskega produkta obeh vektorjev. Izračunajmo ga:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 2 & -4\\ 5 & 4 & -8\end{vmatrix}=(0,-28,-14)=-14(0,2,1).$$

Dolžina vektorskega produkta je

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\left|-14(0,2,1)\right|=14\left|(0,2,1)\right|=14\sqrt{4+1}=14\sqrt{5}$$

in ploščina trikotnika ABC je $7\sqrt{5}$.
Višino trikotnika bomo izračunali s pomočjo ploščine paralelograma. Vemo, da je ploščina paralelograma enaka dolžini vektorskega produkta, torej $14\sqrt{5}$. Ploščino paralelograma pa lahko izračunamo tudi s pomočjo formule $\mathrm{pl}_{\text{paralel}}=|AC|\cdot|BD|$, kar pomeni, da lahko zdaj izrazimo dolžino višine trikotnika $|BD|$:

$$|BD|=\frac{\mathrm{pl}_{\text{paralel}}}{|AC|}=\frac{14\sqrt{5}}{\sqrt{25+16+64}}=14\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{105}}=14\frac{\cancel{\sqrt{5}}}{\cancel{\sqrt{5}}\sqrt{21}}=\cancel{14}^{2}\frac{\sqrt{21}}{\cancel{21}^{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{21}.$$

24. Za $\vec{a}=(1,2,1)$, $\vec{b}=(1,-1,2)$ in $\vec{c}=(2,1,-1)$ pokaži, da $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$.

Rešitev:

$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=(-1,5,3),\qquad \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 5 & 3\end{vmatrix}=(1,-4,7),$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (5,-1,-3), \qquad (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (4,-1,7).$$

Očitno res velja $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \neq (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ (vektorski produkt ni asociativna operacija).

25. Ali ležijo točke $A(-3,-7,-5)$, $B(0,-1,-2)$ in $C(2,3,0)$ na isti premici?

Rešitev: Če točke ležijo na isti premici, je ploščina trikotnika, ki ga določajo, enaka 0. Ploščina $\triangle ABC$ je enaka polovici dolžine vektorskega produkta vektorjev $\overrightarrow{AB} = (3,6,3) = 3(1,2,1)$ in $\overrightarrow{AC} = (5,10,5) = 5(1,2,1)$. Ker sta vektorja (očitno) vzporedna, je njun vektorski produkt enak 0. Dane točke torej ležijo na isti premici.

26. Dokaži, da točke $A(2,-1,-2)$, $B(1,2,1)$, $C(2,3,0)$ in $D(5,0,-6)$ ležijo na isti ravnini.

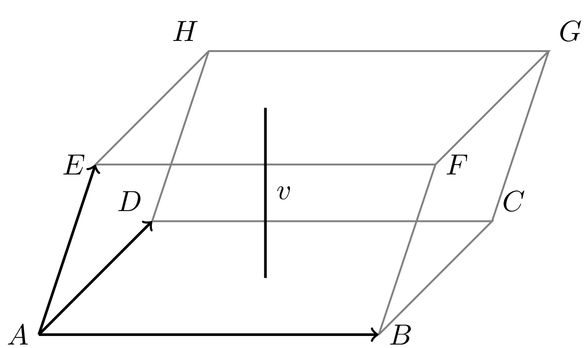
Rešitev: Če šiti točke ležijo na isti ravnini, je prostornina paralelepipeda, ki ga napenjajo vektorji $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ in $\overrightarrow{AD}$, enaka 0. Prostornina omenjenega paralelepipeda je enaka absolutni vrednosti mešanega produkta vektorjev $\overrightarrow{AB} = (-1,3,3)$, $\overrightarrow{AC} = (0,4,2)$ in $\overrightarrow{AD} = (3,1,-4)$.

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 18 + 18 - 36 = 0$$

Dane točke res ležijo na ravnini.

27. Izračunaj višino na ploskev $ABCD$ paralelepipeda, ki ga določajo točke $A(-1,2,3)$, $B(0,-1,2)$, $D(2,1,2)$ in $E(-2,-1,4)$.

Rešitev:



Na kazalo

Prostornino danega paralelepipeda znamo izračunati na (vsaj) dva načina:

$$V = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}]|,$$
$$V = \mathrm{pl}_{ABCD} \cdot v = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| \cdot v,$$

kjer je v iskana višina. Ker znamo izračunati ostale parametre, lahko izrazimo $v = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}]|}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|}$.

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}] = 12$$
$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = 2(1, -1, 4)$$
$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = 6\sqrt{2}$$

Torej je $v = \frac{12}{6\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

28.* Izračunaj volumen tetraedra, napetega na vektorje $\vec{a} = (1, 2\alpha, 1)$, $\vec{b} = (2, \alpha, \alpha)$ in $\vec{c} = (3\alpha, 2, -\alpha)$ kot funkcijo parametra α. Določi α tako, da bodo $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ linearno odvisni.

Rešitev: $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 2\alpha & 1 \\ 2 & \alpha & \alpha \\ 3\alpha & 2 & -\alpha \end{vmatrix} = 2(3\alpha^3 - \alpha + 2)$

Volumen tetraedra V_T je enak $1/6$ volumna paralelepipeda V_P, torej

$$V_T = \frac{1}{6} V_P = \frac{1}{6}|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = \frac{1}{3}|3\alpha^3 - \alpha + 2|\,.$$

Vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ so linerno odvisni natanko tedaj, ko je $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$. Ničle polinoma $3\alpha^3 - \alpha + 2$ bomo poiskali s pomočjo Hornerjevega algoritma.

	3	0	-1	2
		-3	3	-2
-1	3	-3	2	0

Zapišemo lahko faktorizirano obliko polinoma $3\alpha^3 - \alpha + 2 = (x + 1)(3\alpha^2 - 3\alpha + 2)$. Ker je diskriminanta kvadratnega polinoma $D = 9 - 4 \cdot 3 \cdot 2$ negativna, je -1 edina ničla polinoma $3\alpha^3 - \alpha + 2$ in tako edina vrednost α, za katero so dani vektorji linerno odvisni.

2.2 Analitična geometrija

1. V prostoru $\mathbb{R}^3$ so dane točke $A(0,2,-2)$, $B(3,-1,4)$, $P(0,2,2)$, $Q(1,1,0)$ in $R(-1,3,-4)$.

   (a) Poišči enačbo premice p skozi točki A in B in jo zapiši v vseh treh oblikah.

   (b) Zapiši še enačbo premice q skozi R in Q ter ugotovi ali je vzporedna premici p.

   (c) Ali katera od točk P, Q in R leži na premici p oziroma na daljici AB?

Rešitev:

(a) Premica je določena s smernim vektorjem in neko točko na njej. Za smerni vektor $\overrightarrow{s_p}$ lahko izberemo npr. kar vektor $\overrightarrow{AB}=(3,-3,6)$, za točko pa izberemo npr. točko $A(0,2,-2)$. Na enačbo premice lahko gledamo kot na test, ki pove, ali je točka s koordinatami (x,y,z) na premici p ali ne. Pri vektorski in parametrični enačbi se pojavi še pomožni parameter npr. λ, ki nam pove za kolikšen raztezek smernega vektorja $\overrightarrow{s_p}$ se moramo premakniti od točke A, da pridemo do točke (x,y,z) na premici. Zapišimo sedaj vse tri oblike enačbe premice.
Vektorska oblika: $\overrightarrow{r}=(0,2,-2)+\lambda(3,-3,6)$, $\lambda\in\mathbb{R}$
Parametrična oblika: $\left.\begin{aligned} x &= \ \ 3\lambda \\ y &= \ 2\ \ -3\lambda \\ z &= -2\ \ +6\lambda \end{aligned}\right\}\lambda\in\mathbb{R}$
Kanonska oblika: $\frac{x}{3}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+2}{6}$
OPOMBA: Ker bi za smerni vektor lahko izbrali katerikoli vektor, ki je vzporeden vektorju $\overrightarrow{AB}$, za točko pa tudi npr. točko B, je očitno, da enačba premice ni enolično določena.

(b) Izberimo smerni vektor $\overrightarrow{s_q}=\overrightarrow{QR}=(-2,2,-4)$ in točko $Q(1,1,0)$ ter sestavimo npr. vektorsko obliko enačbe premice q.

$$q:\ (x,y,z)=(1,1,0)+\mu(-2,2,-4),\ \mu\in\mathbb{R}$$

Premici p in q sta vzporedni, če sta vzporedna njuna smerna vektorja. Iz zapisov $\overrightarrow{s_p}=(3,-3,6)=3(1,-1,2)$ in $\overrightarrow{s_q}=(-2,2,-4)=-2(1,-1,2)$, vidimo, da sta smerna vektorja vzporedna. Torej sta vzporedni tudi premici p in q.

(c) Sedaj uporabimo npr. kanonsko enačbo premice p, da testiramo koordinate točke $P(0,2,2)$.

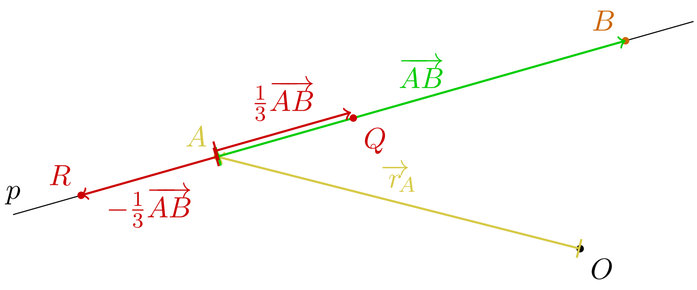
$$\frac{0}{3}=\frac{2-2}{-3}=\frac{2+2}{6}\ \Leftrightarrow\ 0=0=\frac{2}{3}$$

Na kazalo

Točka P torej ne leži na premici p. Vsak študent naj točko P testira še s preostalimi oblikami enačb.
Testiranje točke Q izvedemo npr. z vektorsko obliko enačbe premice p.

$$(1,1,0) = (0,2,-2) + \lambda(3,-3,6) = (3\lambda, 2-3\lambda, -2+6\lambda)$$

Enačimo istoležne komponente vektorjev na skrajni levi in skrajni desni strani enakosti. Iz prve komponente dobimo $\lambda = \frac{1}{3}$. Ta λ ustreza tudi enakosti, ki jo dobimo na drugi in na tretji komponenti. Točka Q leži na premici p. Ker smo dobili $\lambda = \frac{1}{3}$, nam to pove, da pridemo do točke Q tako, da se najprej premaknemo iz izhodišča do točke $A(0,2,-1)$ in se potem za $\frac{1}{3}$ vektorja $\overrightarrow{AB} = (3,-3,6)$ premaknemo po premici p. To seveda pomeni, da se točka Q nahaja na daljici AB (vemo celo, da daljico AB deli v razmerju 1:2).
Ker smo v točki (b) ugotovili, da sta premici p in q vzporedni, sedaj pa še, da imata skupno točko Q, nam to pove, da sta premici enaki. To pomeni, da tudi točka R leži na premici p. Ugotoviti je treba le še, ali leži na daljici AB ali ne. Če ponovimo postopek, ki smo ga uporabili pri točki Q, dobimo $\lambda = -\frac{1}{3}$, kar pomeni, da se od točke A po premici pomikamo za $\frac{1}{3}$ v nasprotni smeri vektorja $\overrightarrow{AB}$. Točka R ne leži na daljici AB.



2. Zapiši enačbo ravnine Σ, na kateri leži točka $A(-1,3,-2)$ in

   (a) je vzporedna ravnini $\Pi : z = 0$,

   (b) je vzporedna ravnini $\Pi : 2x - y + 4z = 1$,

   (c) vsebuje premico $p : x - 1 = y + 2 = 3 - z$.

Rešitev:

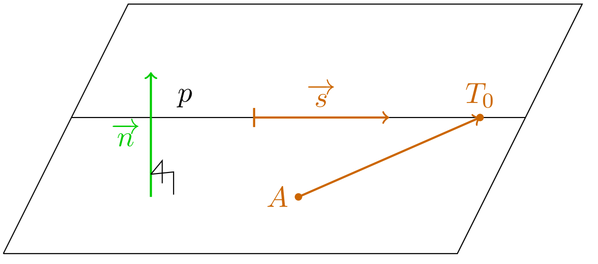
(a) Iskana ravnina je ravnina, ki vsebuje vse točke, katerih zadnja koordinata je enaka -2. Njena enačba je $z = -2$.

(b) Vzporedni ravnini imata vzporedne normalne vektorje. Normalni vektor ravnine Π : $2x - y + 4z = 1$ je npr. $\overrightarrow{n_\Pi} = (2,-1,4)$, kar pomeni, da je enačba iskane ravnine oblike $2x - y + 4z = d$. Ker leži točka $A(-1, 3, -2)$ na iskani ravnini, morajo njene koordinate ustrezati enačbi ravnine. Tako dobimo

$$\begin{aligned} 2 \cdot (-1) - 3 + 4 \cdot (-2) &= d, \\ -13 &= d, \end{aligned}$$

in enačba iskane ravnine je $2x - y + 4z = -13$.

(c) Iz enačbe premice $p : x - 1 = y + 2 = 3 - z$ odčitamo koordinate točke na premici $T_0(1, -2, 3)$ in komponente smernega vektorja premice $\vec{s} = (1, 1, -1)$.
Narišimo skico.



Ker je normalni vektor pravokoten na vsak vektor v ravnini, je pravokoten na smerni vektor premice p in na vektor $\overrightarrow{AT_0}$. Ker je tudi vektorski produkt vektorjev $\vec{s}$ in $\overrightarrow{AT_0} = (1, -2, 3) - (-1, 3, -2) = (2, -5, 5)$ pravokoten na oba vektorja, je vektorski produkt $\vec{s} \times \overrightarrow{AT_0}$ normalni vektor ravnine.

$$\vec{s} \times \overrightarrow{AT_0} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 5 \end{vmatrix} = (0, -7, -7) = -7(0, 1, 1)$$

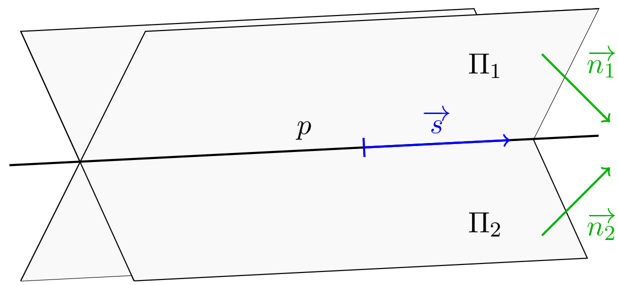
Izberimo $\vec{n} = (0, 1, 1)$. Enačba ravnine je zdaj delno določena: $0 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z = d$ oz. $y + z = d$. Upoštevajmo še dejstvo, da iskana ravnina vsebuje točko $A(-1, 3, -2)$ in dobimo $d = 1$. Enačba iskane ravnine je $y + z = 1$.

3. Zapiši presek danih ravnin.

$$\begin{array}{rrrcl} x & +2y & +3z & = & 13 \\ 3x & +y & +4z & = & 14 \end{array}$$

Rešitev: Poimenujmo ravnini $\Pi_1 : x+2y+3z = 13$ (z $\vec{n_1} = (1, 2, 3)$) in $\Pi_2 : 3x+y+4z = 14$ (z $\vec{n_2} = (3, 1, 4)$) in iskano premico p ter narišimo skico.

Na kazalo



I. način: Smerni vektor iskane premice mora biti pravokoten na $\overrightarrow{n_1}$ in na $\overrightarrow{n_2}$.

$$\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (5, 5, -5) = 5(1, 1, -1)$$

Izberimo $\overrightarrow{s} = (1, 1, -1)$. Poiščimo še kakšno točko na premici p, t.j. točko, ki leži hkrati na ravnini Π_1 in na ravnini Π_2. Če izberemo npr. točko, katere prva koordinata je $x = 0$, dobimo sistem dveh enačb za dve neznanki: (iz enačbe za Π_1) $2y + 3z = 13$ in (iz enačbe za Π_2) $y + 4z = 14$. Ko rešimo dobljeni sistem enačb, dobimo $y = 2$ in $z = 3$. Točka na premici ima torej koordinate $T_0(0, 2, 3)$. Zapišimo sedaj enačbo premice p: $x = \lambda$, $y = 2 + \lambda$, $z = 3 - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
II. način: Na iskani premici ležijo točke (x, y, z), ki ustrezajo pogojema $x+2y+3z = 13$ in $3x + y + 4z = 14$, torej so rešitev sistema dveh enačb za tri neznanke. Rešimo ta sistem.

$$\begin{array}{rl} x + 2y + 3z & = 13 \\ 3x + y + 4z & = 14 \,/ \cdot (-2) \\ \hline x + 2y + 3z & = 13 \\ -6x - 2y - 8z & = -28 \\ \hline -5x - 5z & = -15 / : (-2) \\ \hline x + z & = 3 \end{array}$$

Očitno obstaja neskončno mnogo parov x in z, ki ustrezajo pogoju $x + z = 3$. Če izberemo npr. $z = \lambda \in \mathbb{R}$, dobimo $x = 3 - \lambda$. Dobljena x in z vstavimo npr. v enačbo ravnine Π_1 in dobimo $y = 5-\lambda$. Dobili smo ravno enačbo premice p, torej $p:\ x = 3-\lambda$, $y = 5-\lambda$, $z = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
OPOMBA: Vsak študent naj se prepriča, da smo pri obeh načinih reševanja dobili enačbi iste premice.

4. Izračunaj kot med ravninama.

$$\begin{array}{lrrrcl} \Pi_1 : & -2x & +6y & -10z & = & 10 \\ \Pi_2 : & 3x & -9y & +15z & = & 32 \end{array}$$

Na kazalo

Rešitev: Kot med ravninama je enak kotu med njunima normalnima vektorjema. Normalna vektorja danih ravnin sta $\overrightarrow{n_1} = (-2, 6, -10) = -2(1, -3, 5)$ in $\overrightarrow{n_2} = (3, -9, 15) = 3(1, -3, 5)$. Vidimo, da sta vektoja vzporedna, torej sta tudi ravnini vzporedni. Kot med njima je 0.

5. Katera izmed premic $p_1 : \frac{x}{3} = y = \frac{z-2}{2}$ in $p_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = -z - 1$ seka premico $q : \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = 1 - z$? Določi kot med premico q in tisto premico, ki jo le-ta seka.

Rešitev: Zapišimo parametrično obliko enačbe premice za p_1 (odčitamo koordinate točke $T_1(0, 0, 2)$ in komponente smernega vektorja $\overrightarrow{s_1} = (3, 1, 2)$), p_2 ($T_2(1, 0, -1)$, $\overrightarrow{s_2} = (2, 2, -1)$) in q ($T_q(2, 3, 1)$, $\overrightarrow{s_q} = (2, 3, -1)$).

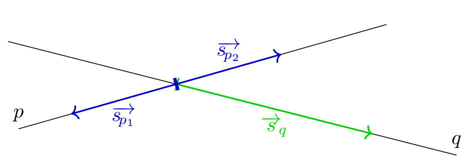
$$p_1 : \left.\begin{array}{rl} x = & 3\lambda \\ y = & \lambda \\ z = & 2 + 2\lambda \end{array}\right\} \lambda \in \mathbb{R} \qquad p_2 : \left.\begin{array}{rl} x = & 1 + 2\nu \\ y = & 2\nu \\ z = & -1 - \nu \end{array}\right\} \nu \in \mathbb{R} \qquad q : \left.\begin{array}{rl} x = & 2 + 2\mu \\ y = & 3 + 3\mu \\ z = & 1 - \mu \end{array}\right\} \mu \in \mathbb{R}$$

V parametričnih oblikah enačb izberemo različna parametra, saj se želimo po premicah premikati neodvisno. Da ugotovimo, ali se dve premici sekata, moramo rešiti sistem šestih enačb za pet neznank. Najprej se znebimo spremenljivk x, y in z tako, da enačimo nastavke, ki smo jih zapisali v parametrični obliki premic, za te neznanke. Začnimo s premicama p_1 in q.

$$\begin{array}{lrl} x : & 3\lambda & = 2 + 2\mu \\ y : & \lambda & = 3 + 3\mu \\ z : & 2 + 2\lambda & = 1 - \mu \end{array}$$

Če nastavek iz prve enačbe $\lambda = 3 + 3\mu$ vstavimo v prvo enačbo, dobimo $\mu = -1$. Vrednost vstavimo nazaj v drugo enačbo, da dobimo še $\lambda = 0$. Hitro preverimo, da vrednosti ustrezata pogoju tretje enačbe. Koordinate presečišča dobimo tako, da vstavimo npr. dobljen λ v enačbo premice p: $T(0, 0, 2)$.
Kot med premicama je enak kotu med njunima smernima vektorjema, kadar je le-ta oster in suplementarnemu kotu kota med premicama, kadar je le-ta top. [2]

[2] V spodnjem primeru je kot med smernima vektorjema $\overrightarrow{s}_{p_1}$ in $\overrightarrow{s}_q$ top, zato je kot med premicama p in q enak kotu med vektorjema $\overrightarrow{s}_{p_2}$ in $\overrightarrow{s}_q$.



Na kazalo

Poimenujmo kot med smernima vektorjema φ.

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{s_1}\cdot\overrightarrow{s_q}}{|\overrightarrow{s_1}|\cdot|\overrightarrow{s_q}|} = \frac{(3,1,2)\cdot(2,3,-1)}{\sqrt{9+1+4}\cdot\sqrt{4+9+1}} = \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{1}{2}$$

Kot med vektorjema je enak $\varphi = \frac{\pi}{3}$ in prav to je tudi kot med premicama.
Poglejmo še ali se sekata premici p_2 in q.

$$\begin{aligned} x:&\quad 1+2\nu &&= 2+2\mu \\ y:&\quad 2\nu &&= 3+3\mu \\ z:&\quad -1-\nu &&= 1-\mu \end{aligned}$$

Če nastavek iz druge enačbe $2\nu = 3+3\mu$ vstavimo v prvo enačbo, dobimo $4+3\mu = 2+2\mu$, oz. $\mu = -2$. Potem je $2\nu = -3$ oz. $\nu = -\frac{3}{2}$. Oba rezultata vstavimo v tretjo enačo, kjer dobimo $-1-\frac{3}{2} = 1-(-2)$, kar pa je protislovje. Premici se torej ne sekata.

6. Premica p in ravnina Π sta podani z enačbami

$$p:\ x+y=0,\ z+y=0, \qquad \Pi:\ x+y+z=10\,.$$

(a) Izračunaj kot med premico p in ravnino Π.

(b) Poišči presečišče med premico p in ravnino Π.

(c) Zapiši enačbo pravokotne projekcije premice p na ravnino Π.

Rešitev:

(a) Kot med premico p in ravnino Π je enak $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$, kjer je α kot med premico p in nosilko normalnega vektorja $\overrightarrow{n}$ ravnine Π. Premica p je podana kot presečišče ravnin $x+y=0$ in $z+y=0$. Če enačbi preoblikujemo v $x=-y$ in $z=-y$ ter izberemo $y=\lambda\in\mathbb{R}$, dobimo parametrično obliko enačbe premice.

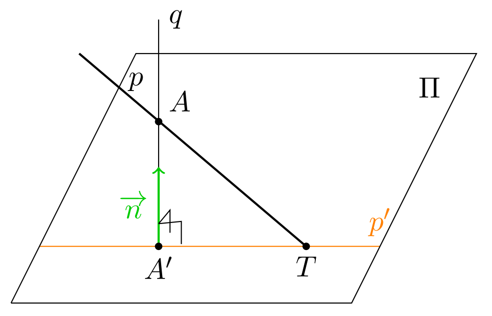
$$p:\ \left.\begin{aligned} x &= -\lambda \\ y &= \lambda \\ z &= -\lambda \end{aligned}\right\}\ \lambda\in\mathbb{R}$$

Iz enačbe premice in ravnine odčitamo $\overrightarrow{s} = (-1,1,-1)$ in $\overrightarrow{n} = (1,1,1)$ ter izračunamo $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$. Ker imajo negativen kosinus topi koti, bomo za kot α vzeli kot, za katerega je $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, t.j. $\alpha = \arccos\frac{1}{3}$. Kot med ravnino in premico je tako $\varphi = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{1}{3} \approx 19,5°$.

(b) V presečišču premice p in ravnine Π leži točka $T(x,y,z)$, ki ustreza pogojem enačbe premice in enačbe ravnine. Ker leži na premici p, so njene koordinate $T(-\lambda,\lambda,-\lambda)$.

Ker leži še na ravnini Π, velja $-\lambda+\lambda-\lambda = 10$ oz. $\lambda = -10$. Točka T ima koordinate $T(10,-10,10)$.

(c) Pravokotna projekcija p' premice p na ravnino Π vsebuje točko presečišča $T(10,-10,10)$. Poiščimo še kako točko, ki leži na pravokotni projekciji. To točko bomo dobili tako, da bomo projicirali neko točko A iz premice p na ravnino Π. Iz točke A se moramo premakniti pravokotno, t.j. v smeri normalnega vektorja ravnine Π. Tak premik poteka po premici, imenujmo jo q, ki poteka skozi točko A in je pravokotna na ravnino Π (t.j. njen smerni vektor je vzporeden normalnemu vektorju ravnine Π).



Izberimo koordinate točke $A(0,0,0)$ (ko izberemo $\lambda = 0$ v enačbi premice p). Zdaj lahko zapišemo enačbo premice q.

$$q: \left.\begin{aligned} x &= \mu \\ y &= \mu \\ z &= \mu \end{aligned}\right\} \mu \in \mathbb{R}$$

Koordinate točke A' dobimo tako, da izračunamo presečišče premice q in ravnine Π.

$$\mu+\mu+\mu = 10 \Leftrightarrow \mu = \frac{10}{3} \Leftrightarrow A'\left(\frac{10}{3},\frac{10}{3},\frac{10}{3}\right)$$

Premica p' poteka skozi točko T v smeri vektorja $\overrightarrow{A'T} = \frac{20}{3}(1,-2,1)$ (za smerni vektor izberemo $\overrightarrow{s}_q = (1,-2,1)$).

$$p': \left.\begin{aligned} x &= 10+\alpha \\ y &= -10-2\alpha \\ z &= 10+\alpha \end{aligned}\right\} \alpha \in \mathbb{R}$$

7. Določi razdaljo točk $T_1(1,2,8)$ in $T_2(3,-1,1)$ od premice $\frac{x-1}{2} = -y = z$.

Rešitev: Hitro vidimo, da točka T_1 ne leži na premici, točka T_2 pa leži. To pomeni, da je razdalja premice od točke T_2 enaka 0. Razdaljo točke T_1 od premice p bomo izračunali na dva načina.

I. način: Poimenujmo premico p in zapišimo njeno parametrično obliko.

$$p: \left.\begin{aligned} x &= 1+2\lambda \\ y &= \quad -\lambda \\ z &= \quad \lambda \end{aligned}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

Iz enačbe premice lahko odčitamo smerni vektor $\overrightarrow{s_p} = (2,-1,1)$. Razdaljo lahko izračunamo npr. s pomočjo "pomožne" ravnine. To je ravnina Σ, ki poteka skozi točko T_1 in seka premico p pod pravim kotom. To pomeni, da lahko za njen normalni vektor izberemo kar smerni vektor premice p: $\overrightarrow{n}_\Sigma = \overrightarrow{s_p} = (2,-1,1)$. Ker poznamo njen normalni vektor in točko skozi katero poteka, lahko zapišemo enačbo ravnine Σ .

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= d \\ T_1 \in \Sigma \Rightarrow\; 2\cdot 1 - 2 + 8 &= d \\ d &= 8 \\ \Sigma:\; 2x - y + z &= 8 \end{aligned}$$

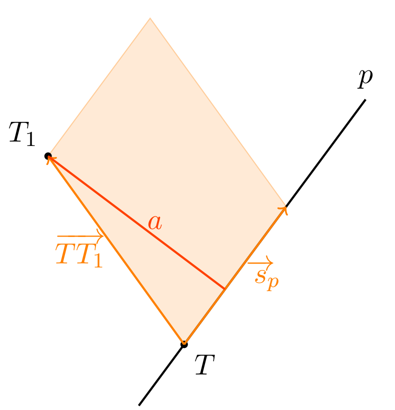
Pravokotna projekcija T_1' točke T_1 na ravnino je presečišče ravnine Σ s premico p .

$$T_1' :\; 2(1+2\lambda) - (-\lambda) + \lambda = 8 \;\Rightarrow\; \lambda = 1 \;\Rightarrow\; T_1'(3,-1,1)$$

Razdalja točke T_1 od premice p je enaka oddaljenosti točke T_1 od točke T_1'.

$$d(T_1,p) = d(T_1,T_1') = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-2)^2 + (1-8)^2} = \sqrt{62}$$

II. način: Ploščina paralelograma P, ki ga napenjata vektorja $\overrightarrow{s_p}$ in $\overrightarrow{TT_1}$ (kjer je točka $T(1,0,0)$ točka na premici p, njene koordinate odčitamo iz enačbe premice) je enaka $\mathrm{pl}_P = \left|\overrightarrow{s_p} \times \overrightarrow{TT_1}\right|$.



Na kazalo

Po drugi strani, pa lahko isto ploščino izračunamo po formuli $\mathrm{pl}_P = |\overrightarrow{s_p}| \cdot a$, kjer je pa višina a ravno razdalja točke T_1 od premice p. Tako je

$$\left|\overrightarrow{s_p} \times \overrightarrow{TT_1}\right| = |\overrightarrow{s_p}| \cdot a$$

oziroma

$$a = \frac{\left|\overrightarrow{s_p} \times \overrightarrow{TT_1}\right|}{|\overrightarrow{s_p}|}.$$

Ker je $\overrightarrow{TT_1} = (0,2,8)$, $\left|\overrightarrow{s_p} \times \overrightarrow{TT_1}\right| = |2(-5,-8,2)| = 2\sqrt{93}$ in $|\overrightarrow{s_p}| = \sqrt{6}$, je

$$a = \frac{2\sqrt{93}}{\sqrt{6}} = \sqrt{62}.$$

OPOMBA: Pri prvem načinu reševanja sicer izračunamo marsikateri nepotreben podatek (enačba pomožne ravnine, koordinate presečišča,...), je pa prvi način reševanja vzorčen primer kako izračunati koordinate pravokotne projekcije točke T na premico p.

8. Poišči točko na ravnini $\Pi : 3x-y+2z = 8$, ki je najbljižja točki $T(1,1,1)$. Kolikšna je razdalja točke T od ravnine Π? Poišči točki T zrcalno točko T' čez Π.

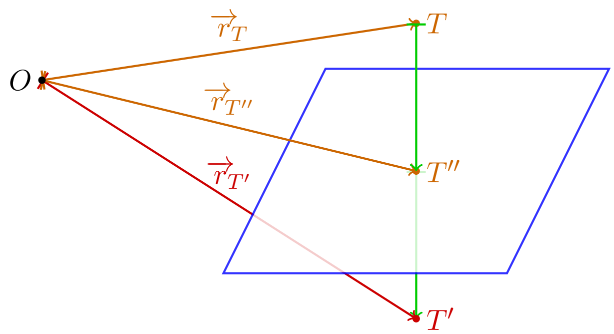
Rešitev: Najbližja točka točki T na ravnini Π je pravokotna projekcija točke T na ravnino Π. Le-to izračunamo podobno kot v nalogi 6.

$$\begin{aligned}
\Pi : 3x - y + 2z = 8 \;\Rightarrow\; \overrightarrow{n}_\Pi &= (3,-1,2) \\
\text{(pomožna premica) } q : x &= 1 + 3\lambda \\
y &= 1 - \lambda \\
z &= 1 + 2\lambda \\
\text{(točki } T \text{ najbližja točka) } T'' = \Pi \cap q : 3(1+3\lambda) - (1-\lambda) + 2(1+2\lambda) &= 8 \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{2}{7} \\
\Rightarrow T''\left(\frac{13}{7}, \frac{5}{7}, \frac{11}{7}\right)
\end{aligned}$$

Razdalja točke T od ravnine Π je enaka razdalji med točkama T in T''.

$$d(T,\Pi) = d(T,T'') = \left|\overrightarrow{TT''}\right| = \left|\left(\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{4}{7}\right)\right| = \frac{2}{7}\,|(3,-1,2)| = \frac{2}{7}\sqrt{14}$$

Ko iščemo koordinate točke T' v bistvu iščemo koponente njenega krajevnega vektorja. Na skici je iskani vektor označen z rdečo, znana krajevna vektorja pa sta označena z oranžno barvo.



Na skici je z zeleno barvo obarvan vektor $\overrightarrow{TT'''}$. Izrazimo krajevno vektor točke T'.

$$\overrightarrow{r}_{T'} = \overrightarrow{r}_T + 2\overrightarrow{TT'''} = (1,1,1) + 2\left(\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{4}{7}\right) = \left(\frac{19}{7}, \frac{3}{7}, \frac{15}{7}\right)$$

9. Preverite, da sta premica p in ravnina Π vzporedni ter izračunajte razdaljo med njima.

$$p: \ (x,y,z) = (1,0,1) + \lambda(1,-1,1),\ \lambda \in \mathbb{R},$$

$$\Pi: \ y + z = 3\,.$$

Rešitev: Premica in ravnina sta vzporedni, kadar je smerni vektor premice pravokoten na normalni vektor ravnine. Smerni vektor naše premice je $\overrightarrow{s} = (1,-1,1)$, normalni vektor ravnine je $\overrightarrow{n} = (0,1,1)$. Njun skalarni produkt je enak 0, kar pomeni, da sta pravokotna in ravnina Π je vzporedna premici p.
Za razdaljo med premico in ravnino na premici izberimo točko, npr. $(1,0,1)$ in izračunamo razdaljo med to točko in ravnino. Le-ta je $\sqrt{2}$.

10. Napiši enačbo premice, ki gre skozi točko $A(3,-2,-4)$, je vzporedna ravnini $3x - 2y - 3z = 7$ in seka premico $\frac{x-2}{3} = -\frac{y+4}{2} = \frac{z-1}{2}$.

Rešitev: Poimenujmo iskano premico q. Za njeno enačbo potrebujemo komponentne smernega vektorja ter koordinate neke točke, skozi katero naj premica poteka. Le-ta točka je lahko kar podana točka A.
Podano ravnino poimenujmo Π, podano premico pa p. Ker mora biti premica q vzporedna ravnini Π, leži na ravnini Σ, ki je vzporedna ravnini Π (torej je njen normalni vektor $\overrightarrow{n}_\Sigma = (3,-2,-3)$) ter poteka skozi točko A.

$$\Sigma: 3x - 2y - 3z = d$$

$$A \in \Sigma \Rightarrow 3\cdot 3 - 2\cdot(-2) - 3\cdot(-4) = d \ \Rightarrow \ d = 25$$

$$\Rightarrow \Sigma: \ 3x - 2y - 3z = 25$$

Na kazalo

Iskana premica q leži na ravnini Σ in hkrati seka premico p. To pomeni, da premica q vsebuje presečišče premice p ter ravnine Σ. Zapišimo parametrično enačbo premice p ter izračunajmo presečišče T premice p z ravnino Σ.

$$\begin{aligned} p:\ x &= 2+3\lambda \\ y &= -4-2\lambda \\ z &= 1+2\lambda \\ T = p\cap\Sigma : 3(2+3\lambda) &- 2(-4-2\lambda) - 3(1+2\lambda) = 25 \Rightarrow \lambda = 2 \\ &\Rightarrow T(8,-8,5) \end{aligned}$$

Smerni vektor iskane premice q je vzporeden vektorju $\overrightarrow{AT} = (5,-6,9)$. Enačba premice q je

$$\overrightarrow{r} = (3,-2,-4) + \lambda(5,-6,9),\ \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Na kazalo

3 Matrike

1. Podane so matrike:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{in} \quad X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Kateri izmed produktov AB, BA, CD, DC, AC, CA, AX, XA, BX, XB so definirani? Za produkte, ki so definirani določi dimenzije.

(b) Izračunaj matrike AB, CD, DC, $T = 2C + BA$, TX in $B^T X$.

Rešitev: Množenje dveh matrik je definirano tako, da za element i-te vrstice j-tega stolpca produkta vzamemo i-to vrstico leve matrike in j-to vrstico desne matrike in izbrani vrstici skalarno pomnožimo, kot da bi šlo za vektorja. Tak skalarni produkt je definiran le, če sta vektorja enake dolžine, t.j. le če imata enako število komponent. Če pogledamo nazaj na matriki, ki jih množimo, to pomeni, da mora imeti leva matrika enako število stolpcev kot ima desna matrika vrstic. To se zgodi v primerih AB (rezultat je 3×3 matrika), BA (2×2 matrika), CD (2×2 matrika), DC (2×2 matrika), AC (3×2 matrika), AX (3×1 matrika). Za izračun produkta CA bi morali skalarno pomnožiti vrstico matrike C, ki ima dve komponenti ter stolpec matrike A s tremi komponentami. Ker se število komponent ne ujema, ju ne moremo pomnožiti. Podobno velja za XA, BX in XB.
Prvega primera množenja se lotimo počasneje. Za element prve vrstice prvega stolpca matrike AB vzamemo prvo vrstico matrike A in jo skalarno pomnožimo s prvim stolpcem matrike B. Podobno nadaljujemo pri preostalih elementih matrike AB.

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \cdot 0 + 3 \cdot 1) & (2 \cdot 1 + 3 \cdot 0) & (2 \cdot 2 + 3 \cdot 1) \\ 0 + 1 & 1 + 0 & 4 + 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Preostali rezultati so brez dodatne razlage zapisani spodaj.

$$CD = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}, DC = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, TX = 3 \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ in } B^T X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Na kazalo

2. Naj bosta $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Izračunaj AA^T, A^3 in B^4.

Rešitev: V tem primeru bomo spoznali nekaj posebnih matrik. Samo množenje poteka brez posebnosti.

$$AA^T = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & bc & 0 \\ bc & c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

OPOMBA: Dobljeno matriko imenujemo *simetrična matrika* (vrednost v i-ti vrstici j-tem stolpcu je enaka vrednosti v j-ti vrstici i-tem stolpcu.

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

OPOMBA: Matriko A, ki jo lahko "uničimo" s potenciranjem, imenujemo *nilpotent*. To je nekaj povsem novega, nekaj, česar nismo vajeni iz realnih števil. Pri realnih številih namreč velja, da je vsaka potenca neničelnega števila tudi sama neničelna.

$$B^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3 = I$$

OPOMBA: Enotsko matrike I_3 včasih poimenujemo kar I. Njene dimenzije (t.j. število vrstic in stolpcev) so razvidne iz konteksta. Matriko B, katere potenca je enotska matrika, imenujemo *idempotent*. Spet se srečamo z lastnostjo, ki je ne poznamo pri realnih številih[3]. Potenca realnega števila bo enaka 1 natanko tedaj, kadar je samo realno število enako ± 1 (torej je število po absolutni vrednosti enako 1), ali kadar je njegov eksponent enak 0.

3. Določi skalarje α, β in γ tako, da bo $A = B$, če sta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha - 1 & 1 & 0 \\ 1 & \beta + 2 & \gamma + \beta \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & \alpha + \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev: Matriki sta enaki natanko tedaj, ko sta enaki po dimenzijah in ko imata enake istoležne elemente. Tako matrika A kot matrika B sta dimenzije 3×3. Poskrbeti moramo le še za to, da bo vseh 9 istoležnih elementov enakih.

$$1 = 1,\ 0 = \alpha + \beta,\ 0 = 0,\ \alpha - 1 = 0,\ 1 = 1,\ 0 = 0,\ 1 = \alpha,\ \beta + 2 = 1,\ \gamma + \beta = 1$$

[3]Tukaj moramo razumeti, da sta tako 1 kot matrika I nevtralna elementa za množenje: prva za množenje z realnimi števili, druga za množenje z matrikami primerne dimenzije.

Na kazalo

Prva, tretja, peta in šesta enačba so trivialne. Iz četrte in sedme enačbe sledi , da je $\alpha = 1$. Če ta nastavek vstavimo v drugo enačbo, dobimo, da je $\beta = -1$, kar pa nam pove tudi osma enačba. Preostane nam le še deveta enačba, ki pa pove, da je $\gamma = 2$.

4. Reši sisteme.

(a)
$$\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & -4 \\ 2x & - & y & = & 7 \\ 7x & + & 4y & = & 2 \\ 5x & + & 3y & = & 1 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 4 \\ 3x & + & y & = & -3 \\ 5x & + & 3y & = & 1 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & y & - & 3z & = & 0 \\ 4x & - & 5y & - & 6z & = & 0 \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ x & + & 5y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & + & 8y & + & 6z & = & 0 \end{array}$$

(e)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 2\,, \\ x & & & - & z & = & 3\,, \\ & & y & + & 3z & = & -4\,. \end{array}$$

(f)*
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & z & + & w & = & 0 \\ 3x & + & 6y & - & 2z & + & w & = & 0 \\ x & + & 2y & - & 4z & - & w & = & 0 \\ 2x & + & 4y & - & 3z & & & = & 0 \end{array}$$

(g)*
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 4 \\ x_1 & + & 3x_2 & & & - & 3x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -3 \\ & - & 7x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & -3 \end{array}$$

Rešitev:

(a) Sistemu

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & -4 \\ 2x & - & y & = & 7 \\ 7x & + & 4y & = & 2 \\ 5x & + & 3y & = & 1 \end{array}$$

pripada razširjena matrika

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 7 \\ 7 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{array}\right].$$

Z Gaussovo eliminacijsko metodo poiščemo zgornje trikotno matriko, ki je ekvivalentna naši matriki.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 7 \\ 7 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{lll} (-2) & (-7) & (-5) \\ + & & \\ & + & \\ & & + \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -5 & 15 \\ 0 & -10 & 30 \\ 0 & -7 & 21 \end{array}\right]$$

Zaenkrat smo dosegli, da je "očiščen" zgolj prvi stolpec (v prvem stolpcu je le prvi element stolpca neničelen). Postopek nadaljujemo tako, da dobimo "stopnička" katerih višina je največ eno vrstica, globina pa je lahko poljubna.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -5 & 15 \\ 0 & -10 & 30 \\ 0 & -7 & 21 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \mid :(-5) \\ \mid :(-10) \\ \mid :(-7) \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{ll} \\ (-1) & (-1) \\ + & \\ & + \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dobljena matrika pripada sistemu enačb $x + 2y = -4$ in $y = -3$, ki je ekvivalenten prvotnemu sistemu t.p. sistema imata isto množico rešitev. Rešitev novega, preprostejšega sistema, je par

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

OPOMBA: Geometrijsko lahko reševanje danega sistema interpretiramo kot iskanje presečišča premic z enačbami $x + 2y = -4$, $2x - y = 7$, $7x + 4y = 2$ in $5x + 3y = 1$. Te premice se sekajo v točki $T(2, -3)$.

(b) Za vse nadaljne primere kar takoj zapišimo razširjeno matriko ter se lotimo Gaussove eliminacijske metode.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \\ 5 & 3 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{ll} (-3) & (-5) \\ + & \\ & + \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -15 \\ 0 & -7 & -19 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \mid :(-5) \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -19 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ 7 \\ + \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Tudi sedaj smo dobili zgornjetrikotno matriko, ki ustreza prvotnemu sistemu enačb ekvivalenten sistem enačb. Ta sistem je enak: $x + 2y = 4$, $y = 3$ in $0 = 2$. Ker zadnja

enačba nima smisla, dani sistem ni rešljiv.
OPOMBA: Geometrijsko gledano se premice $x+2y=4$, $3x+y=-3$ in $5x+3y=1$ ne sekajo v skupni točki.

(c) Tudi pri sistemu treh enačb za tri neznanke je postopek podoben. Ker je pred nami t.i. homogeni sistem enačb (vse desne strani so enake 0), pa vemo že na začetku, da bo sistem zagotovo imel vsaj eno rešitev. Vsak študent naj razmisli katera je ta rešitev.[4]

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & -6 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Dobljena matrika pripada sistemu $x-3y-z=0$, $7y-z=0$ in $-z=0$. Rešitev zadnje enačbe je $z=0$, če ta nastavek vstavimo v drugo enačbo, dobimo $y=0$, če pa obe delni rešitvi vstavimo še v prvo enačbo, pa dobimo $x=0$. Torej je $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ edina rešitev danega sistema enačb.
OPOMBA: Geometrijsko gledano z izvornim sistemom enačb iščemo presečišče ravnin z enačbami $x-3y-z=0$, $2x+y-3z=0$ in $4x-5y-6z=0$. Vse tri ravnine potekajo skozi izhodišče koordinatnega sistema, torej imajo skupno vsaj izhodiščno točko. Izkaže se, da je v tem primeru to tudi edina skupna točka.

(d) Tudi naslednji sistem enačb je homogeni sistem, vendar se bo izkazalo, da t.i. trivialna rešitev $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ni edina rešitev sistema.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \\ 2 & 8 & 6 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dobljena matrika pripada sistemu $x+y+3z=0$ in $y=0$ (Zadnja enačba $0=0$ je zmeraj resnična in ne vpliva na množico rešitev). Dejansko imamo sistem dveh enačb za tri neznanke, kar se ne zdi dovolj. Če vstavimo $y=0$ v prvo enačbo, dobimo $x+3z=0$ oz.[5] $x=-3z$. Za dve neznanki (x in y) smo dobili pogoja, za z pa nimamo nobenega pogoja. To pomeni, da je z prosta oz. $z=\alpha\in\mathbb{R}$. Tako je $x=-3\alpha$. Trojica (ali bolje rečeno: neskončno mnogo trojic), ki reši naš sistem enačb je $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, kjer je $\alpha\in\mathbb{R}$.

[4]Trojica $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ je zagotovo rešitev danega sistema.

[5]Lahko bi zapisali tudi $z=-\frac{x}{3}$. V tem primeru, bi zapis rešitve izgledal drugače. Seveda pa gre za isto množico rešitev, le da le-ta nima enoličnega zapisa.

Na kazalo

Dogovor: Večparametrično rešitev sistema enačb bomo pisali v obliki $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{c} + \ldots + \omega\mathbf{r}$, kjer so α, β, ... , ω elementi množice $\mathbb{R}$. Iz take oblike zlahka vidimo, koliko parametrov ima dobljena rešitev.
OPOMBA: Geometrijsko gledano z izvornim sistemom enačb iščemo presečišče ravnin z enačbami $x + y + 3z = 0$, $x + 5y + 3z = 0$ in $2x + 8y + 6z = 0$. Ravnine se sekajo v premici, ki poteka skozi izhodišče koordinatnega sistema, s smernim vektorjem $\overrightarrow{s} = (-3, 0, 1)$.

(e) Naslednji sistem je nehomogeni sistem. Ker je prvi element prve vrstice 2, prvi element druge vrstice pa 1, bi nam seveda ustrezalo, da bi bil vrstni red vrstic ravno obraten. Zamenjava vrstnega reda vrstic v matriki ustreza zamenjavi vrstnega reda enačb v pripadajočem sistemu enačb. Zamenjava vrstnega reda vrstic ne vpliva na množico rešitev.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ker dobljena reducirana matrika predstavlja sistem dveh enačb za tri neznanke, že iz tega podatka vidimo, da ima sistem neskončno mnogo rešitev. Ker "manjka" ena enčba, to pomeni, da bo ena izmed neznank prosta. Rešitev bo torej enoparametrična.

$$\begin{aligned} x - z = 3 &\Rightarrow x = 3 + z \\ y + 3z = -4 &\Rightarrow y = -4 - 3z \end{aligned}$$

Določimo $z = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) in dobimo $x = 3 + \alpha$ in $y = -4 - 3\alpha$. Trojica, ki reši dani sistem enačb, je $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+\alpha \\ -4-3\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, kjer je $\alpha \in \mathbb{R}$.
OPOMBA: Geometrijsko gledano smo za presek ravnin $2x + y + z = 2$, $x - z = 3$ in $y + 3z = -4$ dobili premico, ki poteka skozi točko $T(3, -4, 0)$ v smeri smernega vektorja $\overrightarrow{s} = (1, -3, 1)$.

(f)* Pred sabo imamo sistem štirih enačb za štiri neznanke. Z vsako enačbo bi si lahko predstavljali množico točk v prostoru $\mathbb{R}^4$, ki ustreza določenem pogoju. Vabljeni ste, da uporabite svojo domišljijo in si poskušate predstavljati, kako izgleda taka množica točk (nasvet: neznanka w naj predstavlja parameter časa). Pri zadnjih dveh primerih bomo izpustili geometrijsko interpretacijo, saj za samo reševanje naloge le-ta ni potrebna.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-3)\ (-1)\ (-2) \\ + \\ + \\ + \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ (-1)\ (-1) \\ + \\ + \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Sistem dveh enačb za štiri neznanke, ki ga dobimo, se glasi $x + 2y + z + w = 0$ in $-5z - 2w = 0$. Če iz druge enačbe izrazimo $w = -\frac{5}{2}z$ in vstavimo ta pogoj v prvo enačbo, dobimo $x + 2y + z - \frac{5}{2}z = 0$ oz. $x + 2y - \frac{3}{2}z = 0$. Iz dobljene enačbe lahko izrazimo npr. $x = -2y + \frac{3}{2}z$. Dve neznanki (x in w) torej izrazimo z preostalima dvema (y in z). Ker imamo zgolj dve enačbi za štiri neznanke, ostaneta dve neznanki prosti in lahko določimo npr. $y = \alpha$ in $z = \beta$ ter izrazimo $x = -2\alpha + \frac{3}{2}\beta$ ter $w = -\frac{5}{2}\beta$.

Četverica, ki reši dan sistem enačb, je $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha + \frac{3}{2}\beta \\ \alpha \\ \beta \\ -\frac{5}{2}\beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$, kjer sta $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(g)* Tokrat imajo neznanke neka druga imena, kar pa seveda ne vpliva na način reševanja sistema enačb.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-1) \\ + \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ (-5)\ (7) \\ + \\ + \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \mid :2 \\ \mid :(-4) \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ (-1) \\ + \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Na kazalo

Ker smo dobili sistem treh enačb za štiri neznanke, bo rešitev enoparametrična.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= -3 \\ x_3 - 2x_4 &= 6 \;\Rightarrow\; x_3 = 6 + 2x_4 \end{aligned}$$

Če vstavimo nastavek $x_3 = 6 + 2x_4$ v drugo enačbo, dobimo

$$x_2 = -3 + 6 + 2x_4 - x_4 = 3 + x_4.$$

Če dobljeni rešitvi vstavimo še v prvo enačbo, pa dobimo

$$x_1 = 4 + 2(3 + x_4) - 3(6 + 2x_4) + 4x_4 = -2.$$

Četverica, ki reši dani sistem enačb, je $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

5. Obravnavaj in reši sistem naslednjih enačb v odvisnosti od parametra a.

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & az & = & -1 \\ x & + & ay & + & 3z & = & 13 \end{array}$$

Rešitev:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a & -1 \\ 1 & a & 3 & 13 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-2)\;(-1) \\ + \\ + \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & -3 \\ 0 & a-1 & 4 & 12 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ (-(a-1)) \\ + \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & -3 \\ 0 & 0 & -(a+3)(a-2) & 3(a+3) \end{array}\right]$$

Elemente zadnje vrstce poračunamo tako:

$$\begin{aligned} 1 \cdot (-(a-1)) + a - 1 &= 0 \\ (a+2)(-(a-1)) + 4 = -a^2 - a + 2 + 4 = -(a^2 + a - 6) &= -(a+3)(a-2) \\ -3 \cdot (-(a-1)) + 12 = 3a - 3 + 12 &= 3(a+3) \end{aligned}$$

- Če v zadnjo, reducirano, matriko vstavimo $a = -3$, dobimo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Na kazalo

Vidimo, da pri $a = 3$ ”uničimo” celotno spodnjo vrstico matrike. To pomeni, da nam ostaneta zgolj dve enačbi za tri neznanke. Sistem ima torej neskončno mnogo rešitev. Le-te so odvisne od enega parametra. Ko poračunamo, dobimo npr. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, kjer je $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Tudi z izbiro $a = 2$ dobimo v reducirani matriki nekaj več ničelnih vrednosti:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{array}\right] .$$

Zadnja vrstica matrike pripada enačbi $0 = 15$, kar pa nima smisla. Pri $a = 2$ torej sistem nima rešitev.

- Za izbiro $a \neq -3, 2$ imamo pri reducirani matriki lepo, zgornjetrikotno obliko. Pripadajoči sistem enačb ima torej tri enačbe (za tri neznanke), zato ima sistem natanko eno rešitev. Izračunajmo jo. Pri vseh računih upoštevamo, da $a \neq -3, 2$ (in zato smemo deliti z $(a + 3)$ in $(a - 2)$).

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ y + (a + 2)z &= -3 \\ -(a + 3)(a - 2)z &= 3(a + 3) \Big/ : (-(a + 3)(a - 2)) \Rightarrow z = -\frac{3}{a - 2} \end{aligned}$$

Ko vstavimo dobljen nastavek za z v drugo enačbo, dobimo $y = \frac{12}{a-2}$ in, če oba dobljena rezultata vstavimo še v prvo enačbo, dobimo še $x = \frac{a-17}{a-2}$. Trojica, ki reši sistem enačb pri $a \neq -3, 2$ je torej $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2-a} \begin{bmatrix} 17 - a \\ -12 \\ 3 \end{bmatrix}$.

6. Obravnavaj sistem enačb glede na parameter a.

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & ay & + & z & = & a \\ ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & + & az & = & 2 \end{array}$$

Na kazalo

Rešitev:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & -1-a & a-1 & 2-a \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a \\ 0 & -(1+a) & a-1 & 2-a \\ 0 & (1-a)(1+a) & 1-a & 1-a^2 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a \\ 0 & -(1+a) & a-1 & 2-a \\ 0 & 0 & a(1-a) & 3(1-a) \end{array}\right]$$

- Če v zadnjo, reducirano, matriko vstavimo $a=-1$, dobimo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right].$$

  Vidimo, da sistem ni rešljiv.

- Če v zadnjo, reducirano, matriko vstavimo $a=0$, dobimo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right].$$

  Tudi ta sistem nima rešitve.

- Če v zadnjo, reducirano, matriko vstavimo $a=1$, dobimo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

  Ta sistem ima neskončno mnogo rešitev. Rešitev je odvisna od enega parametra. Ko poračunamo, dobimo npr. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, kjer je $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Če izberemo $a \neq \pm 1, 0$ je reducirana matrika zgornjetrikotne oblike. Pripadajoči sistem enačb ima tri enačbe (za tri neznanke) in le-ta ima natanko eno rešitev. Trojica, ki reši sistem enačb pri $a \neq \pm 1, 0$ je torej

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{a(1+a)} \\ \frac{a^2+a-3}{a(1+a)} \\ \frac{3}{a} \end{bmatrix} = \frac{1}{a(1+a)} \begin{bmatrix} -3 \\ a^2+a-3 \\ 3(a+1) \end{bmatrix}.$$

Na kazalo

7. Izračunaj inverz dane matrike.

$$\text{(a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \qquad \text{(b) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Rešitev: Inverz matrike izračunamo po ”receptu” $[A|I] \sim [I|A^{-1}]$, kjer je I enotska matrika primerne dimenzije in razširjeno matriko $[I|A^{-1}]$ dobimo s pomočjo Gaussove eliminacijske metode. Tokrat bomo po tem, ko uničimo vse neničelne vrednosti pod diagonalo, poskrbeli še za neničelne vrednosti nad diagonalo.

(a)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} (-2) & (-4) \\ + & \\ & + \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ (1) \\ + \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} + \\ \\ (2) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ |\cdot(-1) \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

Inverz dane matrike je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} (-1) & (-5) \\ + & \\ & + \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & 12 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ (-3) \\ + \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

Ker smo v zadnji vrstici levo od vertikalne črte dobili same ničle, ne moremo izvesti Gaussove eliminacije tako, da dobimo levo od vertikalne črte enotsko matriko I. To pomeni, da dana matrika A nima inverza. Rečemo tudi, da matrika ni obrnljiva.

Na kazalo

8. Za matriki iz prejšnje naloge reši enačbo $Ax = b$, kjer je $b = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Rešitev: Treba je rešiti sistem enačb $Ax = b$, kjer je pri primeru (a) znana inverzna matrika A^{-1}. Že iz te informacije lahko sklepamo na dejstvo, da je sistem enačb za matriko A iz primera (a) enolično rešljiv t.j. ima eno samo rešitev. To rešitev dobimo tako, da obe strani enačbe $Ax = b$ iz leve strani pomnožimo z A^{-1} in dobimo $A^{-1}Ax = A^{-1}b$. Ker je $A^{-1}A = I$ in $Ix = x$, dobimo $x = A^{-1}b$. Vsak študent naj razmisli[6] kaj bi se zgodilo, če obe strani enačbe iz desne strani pomnožimo z A^{-1}. Izračunajmo rešitev za matriko iz primera (a).

$$x = A^{-1}b = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 10 \\ -16 \end{bmatrix}$$

Za primer (b) pa je znano dejstvo, da inverz ne obstaja. Iz tega lahko sklepamo le na to, da ne obstaja enolična rešitev danega sistema. Preostaneta nam dve možnosti: sistem ima neskončno mnogo rešitev, ali pa sistem ni rešljiv. Odgovor poiščimo s pomočjo Gaussove eliminacijske metode. Opazimo, da izvajamo iste korake kot v prejšnji nalogi.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & -3 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-1)\ (-5) \\ + \\ + \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -4 & 4 & 4 \\ 0 & -12 & 12 & 12 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ (-3) \\ + \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vidimo, da je sistem rešljiv, torej ima sistem neskončno mnogo rešitev. Ker smo v reducirani matriki dobili matriko sistema dveh enačb za tri neznanke, vidimo, da ima sistem enoparametrično rešitev.

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= -2 \\ -4y + 4z &= 4 \Rightarrow y = z - 1 \end{aligned}$$

Ko izrazimo še $x = z$ in določimo $z = \alpha \in \mathbb{R}$, dobimo rešitev

$$x = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

[6]Dobimo enačbo $AxA^{-1} = bA^{-1}$, kjer matrični produkti sploh niso definirani (razen v primeru 1×1 matrike) in nas to ne pripelje bliže rešitvi.

Na kazalo

9. Reši matrično enačbo

(a) $AX + B = 0$, kjer sta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

(b) $2I + XA = B$, kjer sta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -5 \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ -5 & 3 & 10 \end{bmatrix}.$$

(c) $AX - 2X = A + I$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev: Preproste matrične enačbe najprej zapišemo v obliko (I) $A \cdot X = B$ ali (II) $X \cdot A = B$. Način, na katerega se bomo lotili reševanja, je najprej odvisen od tega, na kateri strani produkta stoji neznana matrika X. Če stoji na desni (kot v možnosti (I)), potem je "recept" za reševanje tale $[A|B] \sim [I|X]$. Če pa neznana matrika X stoji na levi strani produkta, pa moramo obe strani enačbe najprej transponirati $(X \cdot A)^T = B^T$ oz. $A^T \cdot X^T = B^T$, s čimer pa dobimo matrično enačbo tipa (I). Zdaj sledimo le še "receptu" $[A^T|B^T] \sim [I|X^T]$. Matriko X^T še enkrat transponiramo, da dobimo rešitev X.
Lahko pa enostavno izračunamo inverz matrike A in pomnožimo enačbo z leve (za enačbo tipa (I)) ali iz desne (za enačbo tipa (II)) strani z A^{-1}. Dobimo $X = A^{-1}B$ (pri enačbi tipa (I)) ali $X = BA^{-1}$ (pri enačbi tipa (II)). Količina dela je pri obeh načinih približno enaka.

(a) Enačbo $AX + B = 0$ zapišemo v $AX = -B$. Lotimo se reševanja po prvem načinu. Vsak študent naj za vajo reši isto matrično enačbo še s pomočjo inverza matrike A.

$$[A|-B] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & b & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \\ \cdot(-b) \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 0 & -1 & -2 & 4b-1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \cdot(-a) \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3a-1 & -2 & 4b-1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right] = [I|X]$$

Rešitev matrične enačbe je

$$X = \begin{bmatrix} 3a-1 & -2 & 4b-1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} .$$

(b) Pri enačbi $2I + XA = B$ oz. $XA = B - 2I$ gre za matrično enačbo tipa (II). Ko transponiramo levo in desno stran dobimo $A^T X^T = (B-2I)^T$. Spet bomo reševali na prvi način. Drugi način naj ostane za domačo vajo.

$$[A^T|(B-2I)^T] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & -5 & 3 & 7 & 8 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 7 & -2 \end{array}\right] = [I|X^T]$$

Rešitev matrične enačbe je

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 9 & 7 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} .$$

(c) V enačbi $AX - 2X = A + I$ se iskana matrika X sicer pojavi na desni strani matričnega produkta, ampak se pojavi v dveh členih. Matriko X izpostavimo[7] na desno stran: $AX - 2X = AX - 2IX = (A-2I)X$. Dobljeno enačbo lahko zdaj zapišemo v matrično enačbo oblike (I) $(A-2I)X = A + I$. Rešimo je spet na prvi način, drugi način naj ostane za domačo vajo.

$$[A-2I|A+I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{array}\right] = [I|X]$$

Rešitev matrične enačbe je

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 3 & 1 & 6 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} .$$

10. Izračunaj determinante.

(a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ -2 & -5 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

[7] Ko izpostavljamo matriko X iz člena $2X$, moramo to storiti previdno. Če bi pisali kar $AX - 2X = (A-2)X$, bi naredili napako, saj odštevanje matrike in števila $A - 2$ ni definirano.

Na kazalo

Rešitev:

(a) Determinanto lahko izračunamo s pomočjo razvoja po vrstici ali po stolpcu. Poglejmo si razvoj po 3. stolpcu za dano matriko[8].

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = +0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = *$$

Vidimo, da se z razvojem po stolpcu zaradi ničelnih elementov uničijo trije od štirih členov. Torej se razvoj po stolpcu in vrstici najbolj splača v stolpcih in vrsticah, ki imajo veliko ničelnih elementov. Nadaljujmo z razvojem po 3. vrstici. V 3. vrstici je le en neničelni element, kar pomeni, da imamo le en neničelni člen v razvoju po vrstici. Dobljeno determinanto 2×2 matrike izračunamo po formuli $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

$$* = -4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4 \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -24 \cdot (-6) = 144$$

(b) V drugem primeru imamo matriko, ki sploh nima ničelnih vrednosti. Da pridobimo več ničelnih vrednosti, se lahko poslužimo lastnosti, da se determinanta ne spremeni, če večkratnik vrstice (ali stolpca) prištejemo drugi vrstici (ali stolpcu). Torej izvajamo neke vrste Gaussovo eliminacijo (brez množenja ali deljenja samih vrstic ali stolpcev[9]). V našem primeru lahko npr. prištejemo drugemu stolpcu prvi stolpec pomnožen z (-1) ter tretjemu stolpcu prvi stolpec pomnožen z (-3).

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

Ker je zadnji stolpec dobljene matrike ničelen, je vrednost determinante enaka 0. (Na to bi lahko sklepali tudi po dejstvu, da je tretji stolpec originalne matrike trikratnik prvega stolpca.)

[8]Predznak, ki pripada posameznemu elementu določimo po shemi $\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$. Za matrike drugih dimenzij uporabimo analogne sheme, ki imajo v prvi vrstici, prvem stolpcu $+$.

[9]Če že želimo pomnožiti kako vrstico ali kak stolpec z neničelnim skalarjem, se vrednost determinante matrike deli s tem skalarjem. Drugače pogledano: če izpostavimo skalar iz neke vrstice ali stolpca v matriki, ga "pišemo" pred determinanto matrike.

(c) Pri dani matriki je v tretjem stolpcu samo en neničelni element, zato za začetek izvedemo razvoj po tretjem stolpcu. Nadaljujemo podobno kot v prejšnjem primeru.

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -1 \overset{\begin{array}{ccc} + & & (2) \end{array}}{\begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 2(15-14) = 2$$

(d) Zadnji primer naj vsak študent reši na svoj način.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ -2 & -5 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -61$$

11. Ali je $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ lastni vektor matrike $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$? Kaj je ustrezna lastna vrednost?

Rešitev: Neničelni vektor v je lastni vektor matrike A natanko tedaj, ko obstaja realno število λ, da je $Av = \lambda v$. To pomeni, da deluje množenje matrike A na vektor v v smislu raztezka (torej se vektorju pri množenju z matriko ne spremeni smer). Preverimo, ali je naš vektor lastni vektor.

$$Av = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 2v$$

Pokazali smo, da je vektor v res lastni vektor matrike A. Pripadajoča lastna vrednost je 2.

12. Poišči vse lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Ali A lahko diagonaliziramo? Če lahko, poišči kako obrnljivo matriko P, da bo $P^{-1}AP$ diagonalna.

Rešitev: Sprašujemo se, ali obstaja tak neničelni vektor v, in tako realno število λ, da je $Av = \lambda v$. Enačbo lahko prepišemo v $Av - \lambda v = 0$ oz. $(A - \lambda I)v = 0$. Dobili smo homogeni sistem enačb, za katerega se sprašujemo, ali ima še kakšno drugo rešitev poleg ničelne. To se zgodi le v primeru, ko je determinanta matrike $A - \lambda I$ enaka 0. Poglejmo, ali obstaja tak realen λ.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda) - 4 = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$$

Dobili smo dve lastni vrednosti: $\lambda_1 = 3$ in $\lambda_2 = -2$.
OPOMBA: Polinom $p_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6$ imenujemo *karakteristični polinom* matrike A.

Na kazalo

Lastni vektor, ki pripada določeni lastni vrednosti, je neničelni vektor v, ki reši matrično enačbo $(A-\lambda I)v=0$. Rešimo sistem enačb za posamezno lastno vrednost.

- $\lambda_1 = 3$:

$$[A-3I|0]=\left[\begin{array}{cc|c}-1 & 2 & 0\\ 2 & -4 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c}-1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

  Prvi vrstici reducirane matrike pripada enačba $-x+2y=0$ oz. $x=2y$. Rešitev dobljenega sistema je $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Neničelni vektor, ki reši homogeno enačbo, in naš iskani lastni vektor, je npr. $v_1=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$.

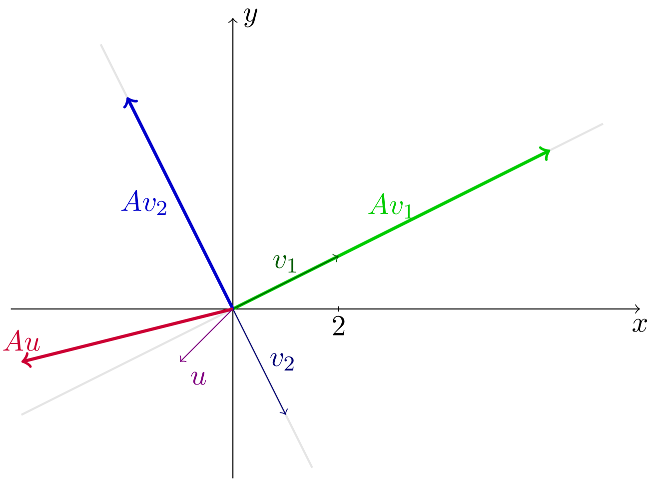
- $\lambda_2=-2$:

$$[A+2I|0]=\left[\begin{array}{cc|c}4 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c}0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{array}\right]$$

  Rešitev dobljenega sistema je $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Neničelni vektor, ki reši homogeno enačbo in naš iskani lastni vektor je npr. $v_2=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$.

OPOMBA: Vidimo, da sta lastni vrednosti sicer enolično določeni, lastna vektorja pa smo izbrali med neskončno mnogo neničelnimi vektorji.
Obrnljiva matrika P, ki ustreza pogojem naloge, je matrika, katere stolpca sta lastna vektorja, torej $P=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$. Iz teorije vemo, da je $P^{-1}AP=D=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$. Vsak študent naj se sam prepriča, da omenjena enakost velja (t.j. izračunajte P^{-1} in pomnožite matrike $P^{-1}AP$).
OPOMBA: Matriki P in D bi lahko sestavili tudi tako: $P=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$ in $D=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$. Pri sestavljanju matrike P in D moramo paziti le, da sta vrstna reda stolpcev, ki pripadata prvi in drugi lastni vrednosti usklajena v obeh matrikah.
OPOMBA: Geometrijsko gledano deluje množenje z matriko A na vektorje $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ v smislu raztega za faktor 3, na vektorje $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$ pa v smislu raztega za faktor -2 (torej sprememba orientacije in razteg za faktor 2). Vsem ostalim vektorjem ravnine pa spremeni smer. Na primer, če vektor $u=\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$ množimo z matriko A, dobimo $Au=\begin{bmatrix}-4\\-1\end{bmatrix}$

Na kazalo



13. Kaj lahko poveš o lastnih vrednostih matrike $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$? Ali se jo da diagonalizirati?

Rešitev: Izračunajmo lastne vrednosti.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

Vidimo, da karakteristični polinom $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$ nima realnih ničel[10]. To pomeni, da se matrike A ne da diagonalizirati. Rečemo, da je matrika A *nediagonalizabilna*.

[10]Polinom $p_A(\lambda)$ ima kompleksni ničli $\lambda_1 = i$ in $\lambda_2 = -i$.

Na kazalo

14. Ali je matrika diagonalizabilna?

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, izračunaj C^{1978}

(d) $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, izračunaj E^5

Rešitev: Matrika dimenzij $n \times n$ se da diagonalizirati natanko tedaj, ko ima n linearno neodvisnih lastnih vektorjev. Lastna vektorja, ki pripadata različnima lastnima vrednostima sta zagotovo linearno neodvisna. Vse kar moramo preveriti pri tem delu naloge je ali imajo morebitne večkratne lastne vrednosti (to so lastne vrednosti, ki so večkratne ničle karakterističnega polinoma dane matrike) dovolj lastnih vektorjev. Na splošno: lastna vrednost, ki je k-kratna ničla karakterističnega polinoma, ima najmanj enega in največ k (linearno neodvisnih) lastnih vektorjev.

(a) Najprej poiščimo lastne vrednosti matrike A.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 4 \\ 2 & 2-\lambda & 3 \\ 2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (2-\lambda)((1-\lambda)(3-\lambda) - 8) = (2-\lambda)(\lambda-5)(\lambda+1) = 0$$
$$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 5$$

Matrika A ima tri različne (realne) lastne vrednosti. Ker ima vsaka lastna vrednost zagotovo en lastni vektor in ker so lastni vektorji, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim zagotovo medsebojno linearno neodvisni, ima matrika A tri linearno neodvisne lastne vektorje. To pa pomeni, da se da matriko A diagonalizirati.

(b) Najprej poiščimo lastne vrednosti matrike B.

$$\det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = 1$$

Zdaj moramo preveriti samo še ali ima $\lambda_{2,3}$ enega ali dva lastna vektorja.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Rešitev dobljenega sistema je $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Neničelni vektor, ki reši homogeno enačbo in naš iskani lastni vektor je npr. $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Ker smo za (dvakratno) lastno vrednost $\lambda_{2,3} = 1$ dobili zgolj en lastni vektor, ima matrika B samo dva linearno neodvisna lastna vektorja in je zato nediagonalizabilna.

(c) Lastne vrednosti matrike C so $\lambda_1 = 0$ in $\lambda_{2,3} = 1$. Izračunajmo lastne vektorje, ki pripadajo lastni vrednosti $\lambda_{2,3} = 1$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Rešitev dobljenega sistema je $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Neničelna (linearno neodvisna) vektorja, ki rešita homogeno enačbo in naša iskana lastna vektorja sta npr. $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ in $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ker smo za (dvakratno) lastno vrednost $\lambda_{2,3} = 1$ dobili dva linearno neodvisna lastna vektorja, ima matrika C (skupaj z lastnim vektorjem, ki pripada $\lambda_1 = 0$) tri linearno neodvisne lastne vektorje in je zato diagonalizabilna.
Matriko C^{1978} bomo izračunali s pomočjo računa:

$$\begin{aligned} C^{1978} &= (PDP^{-1})^{1978} = \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})\ldots(PDP^{-1})}_{1978-\text{krat}} = \\ &= PD\underbrace{P^{-1}P}_{I}D\underbrace{P^{-1}P}_{I}DP^{-1}\ldots PD\underbrace{P^{-1}P}_{I}DP^{-1} = P\underbrace{DD\ldots D}_{1978-\text{krat}}P^{-1} = \\ &= PD^{1978}P^{-1}\,. \end{aligned}$$

Formula $C^{1978} = PD^{1978}P^{-1}$ je ugodna, ker bi za 1978 potenco matrike C morali slednjo 1978 krat pomnožiti samo s seboj, za 1978 potenco (diagonalne) matrike D pa je potrebno potencirati zgolj njene diagonalne elemente.

Na kazalo

Vidimo, da moramo (za matriko P) izračunati še lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti $\lambda_1 = 0$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Rešitev dobljenega sistema je $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Neničelni vektor, ki reši homogeno enačbo in naš iskan lastni vektor, je npr. $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Sestavimo matriki P in D.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ker je $D^{1978} = D$, je $C^{1978} = PD^{1978}P^{-1} = PDP^{-1} = C$.

(d) Spet najprej izračunajmo lastne vrednosti dane matrike.

$$\det(E - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \left((2-\lambda)^2 - 4 \right) =$$
$$= -\lambda \left(4 - 4\lambda + \lambda^2 - 4 \right) = -\lambda^2 \left(\lambda - 4 \right) = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 4$$

Najprej odgovorimo na vprašanje, ali se da matrika E diagonalizirati t.j. preverimo, ali ima lastna vrednost $\lambda_{1,2} = 0$ enega ali dva lastna vektorja.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

Rešitev dobljenega sistema je $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, α, $\beta \in \mathbb{R}$. Neničelna (linearno neodvisna) vektorja, ki rešita homogeno enačbo in naša iskana lastna vektorja sta npr. $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ in $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Izračunajmo še lastni vektor, ki pripada $\lambda_3 = 4$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

Na kazalo

Rešitev dobljenega sistema je $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, iskani lastni vektor pa npr. $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Sestavimo matriki P in D.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Uporabimo formulo $E^5 = PD^5P^{-1}$ in dejstvo, da je $D^5 = 4^5 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2^8 D$, da dobimo $E^5 = P2^8DP^{-1} = 2^8PDP^{-1} = 2^8E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^9 & 2^9 \\ 0 & 2^9 & 2^9 \end{bmatrix}$.

15. Poišči lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ali lahko matriko A diagonaliziramo? Če jo lahko, poišči tako matriko P, da bo matrika $P^{-1}AP$ diagonalna. Izračunaj A^{12} in A^{13}.

Rešitev: Ničli karakterističnega polinoma, $\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)^2(1 + \lambda)$, sta $\lambda_{1,2} = 1$ in $\lambda_3 = -1$. To sta tudi lastni vrednosti dane matrike. Lastni vrednosti $\lambda_{1,2}$ pripadata lastna vektorja $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ in $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Lastni vrednosti $\lambda_3 = -1$ pripada lastni vektor $v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Matriki P in D sta:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{in} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Izračunamo $D^{12} = I$ in $D^{13} = D$, kar nas privede do končnih rezultatov $A^{12} = PD^{12}P^{-1} = PP^{-1} = I$ in $A^{13} = PD^{13}P^{-1} = PDP^{-1} = A$.

Na kazalo

16. Določi parameter a tako, da bo ena izmed lastnih vrednosti matrike A enaka 2. Poišči še ostale lastne vrednosti ter lastni vektor, ki pripada največji lastni vrednosti.

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Rešitev: Ničle karakterističnega polinoma, $\det(A - \lambda I) = (a - \lambda)(\lambda + 1)(\lambda - 3)$, so $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = -1$ in $\lambda_3 = 3$. Ker besedilo naloge od nas zahteva, da določimo parameter a tako, da bo ena izmed lastnih vrednosti enaka 2, moramo postaviti $\lambda_1 = a = 2$.
Zdaj moramo izračunati le še lastni vektor lastne vrednosti $\lambda_3 = 3$ (ki je največja med lastnimi vrednostmi). Dobimo lastni vektor $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Na kazalo

4 Številska zaporedja in vrste

4.1 Zaporedja

1. Zapiši splošni člen zaporedja:
   (a) $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots)$
   (b) $(1, -4, 9, -16, \ldots)$
   (c) $(1, 0, 1, 0, \ldots)$
   (d) $(1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, \ldots)$

Rešitev: Zaporedja, podana v besedilu naloge, so podana zelo nekorektno. Iz zapisa posameznega zaporedja se namreč ne da na enoličen način sklepati na poljuben člen zaporedja. S to nalogo želimo raziskati pojem *splošnega člena* $a_n = f(n)$. Iskali bomo povezavo med *indeksom* n posameznega člena zaporedja a_n in njegovo vrednostjo.

(a) Za zaporedje $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots)$ iščemo funkcijski predpis, za katerega je $\frac{1}{2} = a_1 = f(1)$, $\frac{2}{3} = a_2 = f(2)$ in $\frac{3}{4} = a_3 = f(3)$. Eden takih predpisov je $a_n = \frac{n}{n+1}$.

(b) Členi zaporedja $(1, -4, 9, -16, \ldots)$ $a_1 = 1$, $a_2 = -4$, $a_3 = 9$ in $a_4 = -16$ menjajo predznak, torej gre za t.i. *alternirajoče zaporedje*. Alternirajoči predznak lahko dosežemo tako, da v splošni člen zaporedja uvedemo faktor $(-1)^{n+1}$ (-1 na sodo potenco je enak 1, -1 na liho potenco pa -1). Absolutna vrednost posameznega člena pa je enaka kvadratu indeksa člena zaporedja n^2. Splošni člen je tako enak $a_n = (-1)^{n+1} n^2$.

(c) Zaporedje $(1, 0, 1, 0, \ldots)$ bi lahko opisali $a_{2k-1} = 1$ in $a_{2k} = 0$, za $k \in \mathbb{N}$ ali

$$a_n = \begin{cases} 1 & ; \quad n \text{ je liho} \\ 0 & ; \quad n \text{ je sodo} \end{cases} .$$

Lahko pa bi poiskali kompaktnejšo obliko splošnega člena, npr. $a_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$ ali $a_n = |\sin \frac{n\pi}{2}|$

(d) Če zaporedje $(1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, \ldots)$ zapišemo $\left(1^{(-1)^0}, 2^{(-1)^1}, 3^{(-1)^2}, 4^{(-1)^3}, \ldots\right)$, lažje vidimo zvezo med indeksom n člena a_n in njegovo vrednostjo. Splošni člen zaporedja je $a_n = n^{(-1)^{n-1}}$.

2. Zapiši prve tri člene zaporedja $a_n = \frac{n-1}{n+2}$ in dokaži, da je naraščajoče in navzgor omejeno.

Rešitev:

Na kazalo

- Prvi trije členi so:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1-1}{1+2} = 0, \\ a_2 &= \frac{2-1}{2+2} = \frac{1}{4}, \\ a_3 &= \frac{3-1}{3+2} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

- Zaporedje narašča natanko tedaj, ko za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja neenakost $a_n \leq a_{n+1}$. Preverimo.

$$\begin{aligned} a_n &\leq a_{n+1} \\ \frac{n-1}{n+2} &\leq \frac{(n+1)-1}{(n+1)+2} \\ \frac{n-1}{n+2} &\leq \frac{n}{n+3} \Big/ \cdot (n+2)(n+3)\ (>0) \\ (n-1)(n+3) &\leq n(n+2) \\ n^2+2n-3 &\leq n^2+2n \\ -3 &\leq 0 \end{aligned}$$

  Ker je -3 res manjši od 0, velja $a_n \leq a_{n+1}$ (za vsak $n \in \mathbb{N}$). Hitro lahko razmislimo, da velja celo stroga neenakost $a_n < a_{n+1}$ (torej zaporedje celo strogo narašča).

- Zaporedje je navzgor omejeno z 1, saj je v ulomku $\frac{n-1}{n+2}$ števec $n-1$ manjši od imenovalca $n+2$ (za vsak naravni n).

3.* Ali je zaporedje $a_n = n^2 \left(\frac{9}{10}\right)^n$ naraščajoče ali padajoče? Kje narašča in kje pada?

Rešitev: Prvi člen zaporedja je $a_1 = \frac{9}{10}(< 1)$, drugi pa $a_2 = 4 \cdot \frac{81}{100} = \frac{81}{25}\left(> \frac{50}{25} = 2\right)$. Zaporedje vsaj na začetku narašča. Preverimo, ali gre za naraščujoče zaporedje, t.j. ali za vsak naravni n velja $a_n \leq a_{n+1}$.

$$\begin{aligned} a_n &\leq a_{n+1} \\ n^2\left(\frac{9}{10}\right)^n &\leq (n+1)^2\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1} \Big/ \cdot \frac{10^{n+1}}{9^n} \\ 10n^2 &\leq 9(n^2+2n+1) \\ n^2-18n-9 &\leq 0 \end{aligned}$$

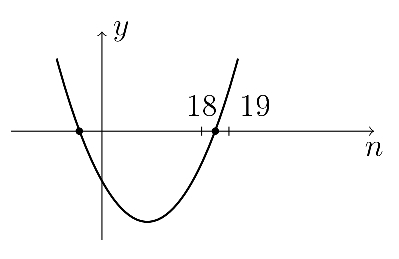
Zanima nas, za katera naravna števila n je vrednost izraza $n^2-18n-9$ negativna (in ker gre za kvadratni polinom s pozitivnim vodilnim koeficientom vemo, da omenjeni izraz ni vedno negativen). Za trenutek pozabimo na dejstvo, da je n naravno število in zanalizirajmo ter narišimo krivuljo z enačbo $y = n^2 - 18n - 9$ (v koordinatni sistem z osema n in y). Krivulja seka n os v

$$n_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 + 4 \cdot 9}}{2} = \frac{18 \pm \sqrt{2^2 \cdot 9^2 + 4 \cdot 9}}{2} = \frac{18 \pm 2 \cdot 3\sqrt{9+1}}{2} = 9 \pm 3\sqrt{10}\,.$$

Ker je $\sqrt{10}$ večje od 3 in manjše od 4, je $n_1 = 9 - 3\sqrt{10}$ manjše od 0, število $9 + 3\sqrt{10}$ pa nekje med 18 in 21. Ker želimo vedeti točno med katerima naravnima številoma leži preverimo ali je manjše od 19.

$$\begin{aligned} 9 + 3\sqrt{10} &< 19 \\ 3\sqrt{10} &< 10 \end{aligned}$$

Ker je $3\sqrt{10} = \sqrt{90}$ in $10 = \sqrt{100}$, je število $n_2 = 9 + 3\sqrt{10}$ med 18 in 19. Skicirajmo zdaj krivuljo $y = n^2 - 18n - 9$.



Vidimo, da je za vse naravne $n \leq 18$ izraz $n^2 - 18n - 9$ manjši od nič in zato zanje velja $a_n < a_{n+1}$. Za naravne $n \geq 19$ pa je $n^2 - 18n - 9 > 0$ in velja $a_n > a_{n+1}$. Za $n = 18$ torej velja $a_{18} < a_{19}$, za $n = 19$ pa $a_{19} > a_{20}$. Zaporedje narašča do a_{19}, potem pa pada.

4. Limita zaporedja $a_n = \frac{2n-1}{5n+1}$ je enaka $a = \frac{2}{5}$. Koliko členov zaporedja leži zunaj okolice $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, če je $\varepsilon = 10^{-2}$?

Rešitev: Zunaj dane t.i. ε-*okolice* ležijo tisti členi zaporedja a_n, za katere velja $\left|\frac{2}{5} - a_n\right| \geq$

10^{-2}. Izračunajmo, za katere n drži dobljena neenakost.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{2}{5} - a_n\right| &\geq 10^{-2} \\
\left|\frac{2}{5} - \frac{2n-1}{5n+1}\right| &\geq \frac{1}{100} \\
\left|\frac{2(5n+1) - 5(2n-1)}{5(5n+1)}\right| &\geq \frac{1}{100} \\
\left|\frac{10n+2-10n+5}{5(5n+1)}\right| &\geq \frac{1}{100} \\
\frac{7}{5(5n+1)} &\geq \frac{1}{100} \\
\frac{7}{5} \cdot 100 &\geq 5n+1 \\
140 - 1 &\geq 5n \\
28 - \frac{1}{5} &\geq n
\end{aligned}$$

Neenakost drži za prvih 27 naravnih števil. Torej je prvih 27 členov danega zaporedja zunaj danega intervala t.i. *ε-okolice*.

5. Dokaži, da je zaporedje $a_n = \frac{2n-1}{3n-1}$ naraščajoče in navzgor omejeno. Pokaži, da je limita zaporedja enaka $a = \frac{2}{3}$. Kateri členi zapredja ležijo v ε okolici limite, če je $\varepsilon = 0.02$?

Rešitev:

- Za dokaz naraščanja pokažemo, da za vsak naraven n velja $a_n \leq a_{n+1}$.

$$\begin{aligned}
\frac{2n-1}{3n-1} &\leq \frac{2n+1}{3n+2} \\
(2n-1)(3n+2) &\leq (2n+1)(3n-1) \\
6n - 5n + 1 &\leq 6n + n - 1 \\
1 &\leq 3n
\end{aligned}$$

  Ker je $1 \leq 3n$ res za vsak $n \in \mathbb{N}$, zaporedje narašča.

- Ker je imenovalec $(3n-1)$ večji od števca $(2n-1)$ je vrednost ulomka $\frac{2n-1}{3n-1}$ (za vsak naraven n) manjša od 1. Zaporedje je navzgor omejeno z 1.
- Limita je enaka $\frac{2}{3}$ natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da bodo vsi členi a_n za $n \geq n_0$ v epsilon okolici $\frac{2}{3}$ oz. bo za njih veljalo $\left|\frac{2}{3} - a_n\right| < \varepsilon$. Prepričajmo se,

da tak n_0 obstaja za poljuben $\varepsilon > 0$. Pri računu bomo upoštevali, da je $3n - 1 > 0$ za vsak naraven n in zato smemo opustiti absolutno vrednost, ki se pojavi.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{2}{3} - a_n\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{2}{3} - \frac{2n-1}{3n-1}\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{2(3n-1) - 3(2n-1)}{3(3n-1)}\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{1}{3(3n-1)}\right| &< \varepsilon \\
\frac{1}{3(3n-1)} &< \varepsilon \\
\frac{1}{3\varepsilon} &< 3n - 1 \\
\frac{1}{9\varepsilon} + \frac{1}{3} &< n
\end{aligned}$$

Ker za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja naravno število n, ki je večje od števila $\frac{1}{9\varepsilon} + \frac{1}{3}$, je $\frac{2}{3}$ res limita danega zaporedja.

- V prej dobljeno formulo $\frac{1}{9\varepsilon} + \frac{1}{3} < n$ vstavimo $\varepsilon = 0.02 = \frac{1}{50}$ in dobimo $\frac{1}{9 \cdot \frac{1}{50}} + \frac{1}{3} = \frac{53}{9} = 5 + \frac{8}{9}$. Prvo naravno število, ki ustreza dobljenemu pogoju je 6. Torej znotraj dane ε-okolice ležijo vsi členi razen prvih 5.

6. Zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je podano z rekurzivno formulo $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1$.

   (a) Zapiši prve štiri člene zaporedja.

   (b) Pokaži, da je navzgor omejeno z 2 in naraščajoče. Utemelji konvergenco in izračunaj njegovo limito.

   (c)* Zapiši splošni člen tega zaporedja.

Rešitev:

(a) Prvi štirje členi:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{a_1}{2} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}, \quad a_3 = \frac{\frac{3}{2}}{2} + 1 = \frac{7}{4} \text{ in } a_4 = \frac{\frac{7}{4}}{2} + 1 = \frac{15}{8}.$$

(b) Ker nimamo splošnega člena, imamo pa zvezo med dvema zaporednima členoma zaporedja, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1$, bomo trditve v zvezi z zaporedjem dokazovali s pomočjo matematične indukcije[11].

- Zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je navzgor omejeno z 2 natanko tedaj, ko za vsako naravno število n drži $a_n \leq 2$.
  $a_n \leq 2$
  - $n = 1$: $a_1 = 1 \leq 2$ ✓
  - $n = k$: (IP) $a_k \leq 2$
  - $n = k+1$: $a_{k+1} \leq 2$
    $a_{k+1} = \frac{a_k}{2} + 1 \overset{(IP)}{\leq} \frac{2}{2} + 1 = 2$ ✓
    Zaporedje je res navzgor omejeno z 2.
- Zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ narašča natanko tedaj, ko za vsako naravno število n drži $a_n \leq a_{n+1}$.
  $a_n \leq a_{n+1}$
  - $n = 1$: $a_1 = 1 \leq \frac{3}{2} = a_2$ ✓
  - $n = k$: (IP) $a_k \leq a_{k+1}$
  - $n = k+1$: $a_{k+1} \leq a_{k+2}$
    $a_{k+1} = \frac{a_k}{2} + 1 \overset{(IP)}{\leq} \frac{a_{k+1}}{2} + 1 = a_{k+2}$ ✓
    Zaporedje je res navzgor omejeno z 2.
- Ker zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ narašča in je navzgor omejeno, je tudi konvergentno, t.j. obstaja limita zaporedja $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. Spet se naslonimo na zvezo $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1$, da izračunamo limito A. Če limitiramo levo in desno stran omenjene enakosti, dobimo
  $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{2} + 1\right) \quad \text{oz.} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{2} + 1.$$
  Če upoštevamo še dejstvo[12], da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$, dobimo zvezo $A = \frac{A}{2} + 1$. Izračunamo $A = 2$.

(c)* Še enkrat prepišimo prvih nekaj členov zaporedja

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{a_1}{2} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}, \quad a_3 = \frac{\frac{3}{2}}{2} + 1 = \frac{7}{4} \text{ in } a_4 = \frac{\frac{7}{4}}{2} + 1 = \frac{15}{8}.$$

Ugibamo, da bi splošni člen lahko bil $\hat{a}_n = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}$. Dokažimo, da je uganjen izraz zares splošni člen našega zaporedja. Ker imamo zgolj zvezo med dvema sosednjima členoma, bo dokaz spet potekal s pomočjo matematične indukcije.

- $n = 1$: $a_1 = 1 = \frac{2^1 - 1}{2^{1-1}} = \hat{a}_1$ ✓
- $n = k$: (IP) $a_k = \hat{a}_k$

[11] Matematično indukcijo smo obravnavali v poglavju v poglavju 1.2 Naravna števila (matematična indukcija).
[12] Pri splošnem členu a_{n+1} gre za podzaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}}$ zaporedja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in ima kot tako isto limito.

- $n = k+1$: $a_{k+1} = \hat{a}_{k+1}$

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{2} + 1 \overset{(IP)}{=} \frac{\hat{a}_k}{2} + 1 = \frac{\frac{2^k-1}{2^{k-1}}}{2} + 1 = \frac{2^k-1}{2^k} + 1 = \frac{2^k - 1 + 2^k}{2^k} =$$
$$= \frac{2 \cdot 2^k - 1}{2^k} = \frac{2^{k+1}-1}{2^{(k+1)-1}} = \hat{a}_{k+1} \checkmark$$

Torej je splošni člen rekurzivno podanega zaporedja $a_n = \frac{2^n-1}{2^{n-1}}$.

7. Zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je podano z rekurzivno formulo $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$. Pokaži, da je monotono, navzgor omejeno z 2 in poišči njegovo limito.

Rešitev: Zapišimo najprej prvih nekaj členov zaporedja, da vidimo, ali zaporedje (vsaj v prvih nekaj členih) narašča ali pada.

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \quad a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$$

Vidimo, da zaporedje vsaj na začetku narašča. Preden pa se lotimo dokazovanja, da zaporedje narašča, dokažimo, da je navzgor omejeno z 2. Dokaz poteka s pomočjo matematične indukcije.

- $n = 1$: $a_1 = \sqrt{2} \leq \sqrt{4} = 2$ ✓
- $n = k$: (IP) $a_k \leq 2$
- $n = k+1$: $a_{k+1} \leq 2$

$$a_{k+1} = \sqrt{2+a_k} \overset{(IP)}{\leq} \sqrt{2+2} = 2$$

Zdaj bomo pa dokazali naraščanje zaporedja s pomočjo dejstva, da je $a_n \leq 2$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Dokazujemo, da velja $a_n \leq a_{n+1}$. Uporabimo nastavek $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ in dobimo neenačbo $a_n \leq \sqrt{2+a_n}$. Ker je $a_1 > 0$ in $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} > 0$, smemo neenačbo kvadrirati in dobimo $a_n^2 \leq 2+a_2$ oz. $a_n^2 - a_n - 2 \leq 0$. če to neenačbo prepišemo v $(a_n-2)(a_n+1) \leq 0$. Dobljeno neenačbo rešijo vsi a_n, za katere je $a_n \in [-1, 2]$. Vemo pa, da velja celo $a_n \in (0, 2]$. Torej zaporedje zares narašča.
Ker zaporedje narašča je navzdol omejeno s prvim členom.
Opravka imamo torej z omejenim in monotonim zaporedjem, kar pomeni, da obstaja njegova limita $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, za katero velja zveza $A = \sqrt{2+A}$. Po kvadriranju in preoblikovanju dobimo enačbo $(A-2)(A+1) = 0$, ki ima dve rešitvi $A_1 = 2$ in $A_2 = -1$. Ker je $a_1 = \sqrt{2}$ in zaporedje narašča, je limita našega zaporedja $A_1 = 2$.

8. Izračunaj limito zaporedja:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+4}{7n^2-n}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

(d)* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n^2-n+1)}{\ln(n^5+5n+7)}$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-e^n}{n+e^n}$

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+\ln n}{n}$

(h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!-n!}$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{k}{n}\right)^n$

(j) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n-1}\right)^{n+1}$

(k)* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2n}{n^2+1}\right)^n$

(l) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

(m) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\frac{9}{10}\right)^n$

Rešitev:

(a) Ker n narašča preko vseh meja, se podobno obnašata tudi člena $2n^2$ in $7n^2$. Števec ulomka gre torej proti neskončno, prav tako narašča tja tudi imenovalec $7n^2-n=n(7n-1)$, saj naraščata tja oba faktorja n in $7n-1$. Zanima nas kam grejo vrednosti ulomka, kjer tako števec, kot imenovalec naraščata preko vseh mej. Tak problem imenujemo nedoločenost tipa "$\frac{\infty}{\infty}$" in izkaže se, da je lahko rešitev katerokoli (nenegativno) realno število ali pa ∞ . Delimo števec in imenovalec z izrazom, ki "gre najhitreje proti ∞" in uporabimo dejstvo, da veljata limiti $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+4}{7n^2-n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+\frac{4}{n^2}}{7-\frac{1}{n}}=\frac{2}{7}$

(b) V tem primeru imamo nedoločenost tipa "$\infty-\infty$", ki se je znebimo oz. nadomestimo z limito tipa "$\frac{1}{\infty}$".

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}+1\cancel{-n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$$

(c) Tokrat imamo nedoločenost tipa "$0\cdot\infty$". Sprašujemo se, kaj dobimo, ko množimo majhno število z velikim. Izkaže se, da v splošnem lahko dobimo katerokoli nenegativno realno število ali pa ∞. Za funkcijo $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ uporabimo postopek iz točke (b). Uporabimo še dejstvo, da je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}+1}=\frac{1}{2}$

Na kazalo

(d)* V tem primeru uporabimo pravili za računanje z logaritmi $\ln(a\cdot b)=\ln a+\ln b$ in $\ln a^b = b\ln a$. Upoštevamo še, da je $\ln 1 = 0$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n^2-n+1)}{\ln(n^5+5n+7)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(n^2\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right)}{\ln\left(n^5\left(1+\frac{5}{n^4}+\frac{7}{n^5}\right)\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n^2+\ln\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\ln n^5+\ln\left(1+\frac{5}{n^4}+\frac{7}{n^5}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\ln n+\ln\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{5\ln n+\ln\left(1+\frac{5}{n^4}+\frac{7}{n^5}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\ln n}}{5+\frac{\ln\left(1+\frac{5}{n^4}+\frac{7}{n^5}\right)}{\ln n}}=\frac{2}{5}$$

(e) Tokrat uporabimo naše znanje o geometrijskih zaporedjih. Za geometrijsko zaporedje s splošnim členom $a_n = q^n$ namreč velja, da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ natanko tedaj, ko je $|q|<1$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ natanko tedaj, ko je $q=1$ in zaporedje divergira v vseh preostalih primerih (t.j. za $q=-1$ in $|q|>1$).
Nasvet: na geometrijsko zaporedje pomislimo, ko imamo potenco s številsko osnovo in n-jem v eksponentu.
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{3^n}+3}{\frac{2^n}{3^n}+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}=3$

(f) V tem primeru uporabimo $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{e^n}=0$.
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-e^n}{n+e^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{e^n}-1}{\frac{n}{e^n}+1}=-1$

(g) Preoblikujemo izraz ter uporabimo $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$.
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+\ln n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\ln n}{n}\right)=1$

(h) Splošni člen iz tega primera najprej poenostavimo tako, da upoštevamo

$$(n+1)!=1\cdot 2\cdot 3\ldots n\cdot(n+1)=(n+1)\cdot n!.$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)n!-n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1-1}=0$

(i) V tem primeru uporabimo znano limito $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=e$.
Sedaj ločimo tri primere:

- ko je $k>0$, velja $\frac{n}{k}\xrightarrow{n\to\infty}\infty$ in zato $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{k}}\right)^{\frac{n}{k}\cdot k}=e^k$,
- ko je $k<0$, velja $\frac{n}{k}\xrightarrow{n\to\infty}-\infty$ oz. $-\frac{n}{k}\xrightarrow{n\to\infty}\infty$ in limito lahko zapišemo

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{k}}\right)^{\frac{n}{k}\cdot k}=\lim_{-\frac{n}{k}\to\infty}\left(1-\frac{1}{-\frac{n}{k}}\right)^{-(-\frac{n}{k})\cdot k}=e^k,$$

- ko pa je $k=0$, pa imamo limito $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{0}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}1^n=1=e^0$.

Na kazalo

Torej velja $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k$.

OPOMBA: Na limito $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = e$ pomislimo, ko n nastopa v osnovi in eksponentu potence, kjer se osnova bliža 1, eksponent pa ∞. Pozor! Tukaj vas intuicija lahko zavede. Če razmišljate tako: ker je $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$ in $\left(1\right)^n = 1$ je $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1$ boste naredili napako. Zapomnite si: za zaporedje $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ zlahka pokažemo, da narašča od $a_1 = 2$, zato njegova limita nikakor ne more biti 1.

(j) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n-1}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{n}}{1-\frac{1}{n}}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n+1}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$

Izračuna limit izrazov v števcu in imenovalcu se lotimo posebej. Pri obeh lahko uporabimo rezutat iz točke (i), kjer vstavimo $k=3$ in $k=-1$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{3}{n}\right) = e^3$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n\cdot(-1)}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) = e^{-1}$$

Dobimo $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n-1}\right)^{n+1} = \frac{e^3}{e^{-1}} = e^4$.

(k)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n}{n^2+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n}$

Izračuna limit izrazov v števcu in imenovalcu se lotimo posebej:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = e^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2\cdot\frac{1}{n}} = 1$$

Zadnji rezultat dobimo s pomočjo t.i. "sendvič teorema". Uporabimo dejstvi, da je zaporedje $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$ navzgor omejeno z e (in $\lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$) ter navzdol omejeno z 1 (in $\lim\limits_{n\to\infty} 1^{\frac{1}{n}} = 1$). Limita zaporedja $\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$ je torej 1.

Dobimo $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n}{n^2+1}\right)^n = e^2$.

(l) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^n$

Ker velja $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, gre osnova v potenci $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^n$ proti e, eksponent pa proti ∞. Zato vrednosti potenc rastejo preko vseh meja, ko $n\to\infty$.

Dobimo $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \infty$.

(m) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\frac{9}{10}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{\left(\frac{10}{9}\right)^n} = 0$

4.2 Vrste

1. Opazuj zaporedje delnih vsot. Če je vrsta konvergentna, izračunaj njeno vsoto.

   (a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}})$

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$

   (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

Rešitev:

(a) Zapišimo prvih nekaj členov zaporedja delnih vsot s_n in uganimo splošni člen. Seštevamo člene zaporedja $a_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}$.

$$
\begin{aligned}
s_1 =& a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1\\
s_2 =& a_1 + a_2 = s_1 + a_2 = \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - 1\\
s_3 =& a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3 = \cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{4}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} - 1\\
&\vdots\\
\widehat{s}_n =& \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1
\end{aligned}
$$

Dokažimo, da je predpis, ki smo ga uganili, zares splošni člen zaporedja (s_n). Uporabimo matematično indukcijo.

$s_n = \widehat{s}_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$

- $n = 1$: $s_1 = a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = \widehat{s}_1$
- $n = k$: (IP) $s_k = \widehat{s}_k \left(= \frac{1}{\sqrt{k+1}} - 1\right)$
- $n = k+1$: $s_{k+1} = \widehat{s}_{k+1}$

  $s_{k+1} = s_k + a_{k+1} \overset{(IP)}{=} \cancel{\frac{1}{\sqrt{k+1}}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{k+2}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{k+1}}} = \frac{1}{\sqrt{k+2}} - 1 = \widehat{s}_{k+1}$

  Vidimo, da res velja $s_n = \widehat{s}_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Izračunajmo limito zaporedja delnih vsot $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1\right) = -1$. Očitno dana vrsta konvergira in velja $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) = -1$

Na kazalo

(b) Postopamo podobno kot v prejšnjem primeru. Poiščimo splošni člen zaporedja delnih vsot za zaporedje $a_k = \ln(1+\frac{1}{k})$.

$$\begin{aligned}
s_1 =& a_1 = \ln\left(1+\frac{1}{1}\right) = \ln 2\\
s_2 =& a_1 + a_2 = s_1 + a_2 = \ln 2 + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) = \ln 2 + \ln\frac{3}{2} = \ln 2\cdot\frac{3}{2} = \ln 3\\
s_3 =& a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3 = \ln 3 + \ln\left(1+\frac{1}{3}\right) = \ln 3 + \ln\frac{4}{3} = \ln 3\cdot\frac{4}{3} = \ln 4\\
&\vdots\\
\widehat{s}_n =& \ln(n+1)
\end{aligned}$$

Dokažimo, da je predpis, ki smo ga uganili, zares splošni člen zaporedja (s_n).
$s_n = \widehat{s}_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$

- $n = 1$: $s_1 = a_1 = \ln 2 = \widehat{s}_1$
- $n = k$: (IP) $s_k = \widehat{s}_k\ (= \ln(k+1))$
- $n = k+1$: $s_{k+1} = \widehat{s}_{k+1}$

  $s_{k+1} = s_k + a_{k+1} \overset{(IP)}{=} \ln(k+1) + \ln\left(1+\frac{1}{k+1}\right) = \ln(k+1) + \ln\frac{k+2}{k+1} = \ln \cancel{(k+1)}\frac{k+2}{\cancel{k+1}} = \ln(k+2) = \widehat{s}_{k+1}$

  $\Rightarrow s_n = \widehat{s}_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$

Ker je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$, dana vrsta divergira.

(c) Ponovimo vajo za zaporedje $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$.

$$\begin{aligned}
s_1 =& a_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}\\
s_2 =& a_1 + a_2 = s_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{3+1}{2\cdot 3} = \frac{4}{2\cdot 3} = \frac{2}{3}\\
s_3 =& a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{2\cdot 4+1}{3\cdot 4} = \frac{9}{3\cdot 4} = \frac{3}{4}\\
&\vdots\\
\widehat{s}_n =& \frac{n}{n+1}
\end{aligned}$$

Dokažimo, da je predpis, ki smo ga uganili, zares splošni člen zaporedja (s_n).
$s_n = \widehat{s}_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$

- $n = 1$: $s_1 = a_1 = \frac{1}{2} = \widehat{s}_1$
- $n = k$: (IP) $s_k = \widehat{s}_k \left(= \frac{k}{k+1}\right)$

- $n = k+1$: $s_{k+1} = \widehat{s}_{k+1}$

  $s_{k+1} = s_k + a_{k+1} \stackrel{(IP)}{=} \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(k+1)}(k+2)} = \frac{k+1}{k+2} = \widehat{s}_{k+1}$

  $\Rightarrow s_n = \widehat{s}_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Ker je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ velja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ (vrsta konvergira).

2. Ugotovi, katere od naslednjih vrst konvergirajo, tako da jih primerjaš z znanimi vrstami.

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{5^n}$,

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$,

Rešitev:

(a) Zaporedje $a_n = \frac{|\sin n|}{5^n}$ (≥ 0) primerjajmo z zaporedjem $b_n = \frac{1}{5^n}$. Ker je $|\sin n| \leq 1$ (za vsak $n \in \mathbb{N}$), je $a_n \leq b_n$. Zaporedje b_n je geometrijsko zaporedje, saj je $b_n = \frac{1}{5^n} = \left(\frac{1}{5}\right)^n$. Ker je $\left|\frac{1}{5}\right| < 1$, je (geometrijska) vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ konvergentna. Vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{5^n}$ je njena minoranta in tudi konvergira (saj je vsota manjših členov še manjša).

(b) Zaporedje $a_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ (≥ 0) primerjajmo z zaporedjem $b_n = \frac{1}{n}$. Ker je $\sqrt[4]{n} \leq n$ (za vsak $n \in \mathbb{N}$), je $a_n \geq b_n$. Zaporedje b_n je harmonično zaporedje, njegova (harmonična) vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira. Vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ je njena majoranta in tudi divergira (saj je vsota večjih členov še večja).

3. Določi, katere izmed naslednjih vrst so konvergentne?

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1+\frac{1}{n})^n$

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$

   (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$

   (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} (\frac{n+1}{n})^{n^2}$

   (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} (\frac{n+1}{n})^{n^2}$

   (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n^2}\right)$

   (g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\frac{2n+1}{3n})^n$

   (h) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\frac{2}{n})^n$

   (i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\frac{1}{n3^n})$

   (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{4n} n}$

   (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)}{n^n}$

   (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n^n}$

Na kazalo

Rešitev: V tej nalogi moramo zgolj uporabiti primeren kriterij, da ugotovimo, ali dana vrsta konvergira ali ne. Na žalost s tem ne izvemo niti približne vrednosti vsote konvergentne vrste ampak le, da le-ta obstaja. V splošnem so pri vsakem primeru te naloge na razpolago trije od obravnavanih štirih kriterijev. Do primera (h) smo rešitve predstavili podrobneje, potem pa smo podali zgolj eno izmed možnih rešitev. Vsak študent naj se za posamezen primer sam prepriča, kateri pristop je za njih bolj in kateri manj primeren.

(a) Ker je $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e\left(\neq 0\right)$, dana vrsta divergira.

(b) Za vrsto zaporedja $a = \frac{n^3}{n!}$ uporabimo kvocientni kriterij.

$$q_n = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{(n+1)^3}{(n+1)!}}{\frac{n^3}{n!}}\right| = \frac{n!(n+1)^3}{(n+1)!n^3} = \frac{\cancel{n!}(n+1)^{\cancel{3}2}}{\cancel{(n+1)n!}n^3} = \frac{(n+1)^2}{n^3}$$

Ker velja $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^3} = 0 < 1$, dana vrsta konvergira.

(c) Pozoren bralec takoj ugotovi, da zaporedje $a = \frac{2^n}{n}$ divergira in je zato dana vrsta divergenta. Ker pa želimo ilustrirati uporabo kriterijev pa tudi za to vrsto uporabimo kvocientni kriterij.

$$q_n = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}}\right| = \frac{n\cancel{2^n}2}{(n+1)\cancel{2^n}} = \frac{2n}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 2 > 1$$

Dana vrsta divergira.

(d) Za vrsto zaporedja $a = \frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ uporabimo korenski kriterij.

$$q_n = \sqrt[n]{\left|\frac{1}{2^n}(\frac{n+1}{n})^{n^2}\right|} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{e}{2} > 1$$

Dana vrsta divergira.

(e) Ta primer se od prejšnjega razlikuje le v prvem faktorju. Sedaj imamo $\frac{1}{3^n}$, namesto $\frac{1}{2^n}$, kar pomeni, da pri uporabi korenskega kriterija dobimo:

$$q_n = \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{e}{3} < 1$$

Dana vrsta konvergira.
OPOMBA: vidimo, da bi lahko namesto števila 3 postavili katerokoli realno število večje od e, pa bi bila vrsta še vedno konvergentna.

(f) Za ta primer uporabimo Leibnizov kriterij, pri katerem je $c_n = \frac{n+1}{n^2}$. Potrebno je pokazati, da je zaporedje c_n padajoče z limito 0.

1) (c_n) pada

$$
\begin{aligned}
c_n &\geq c_{n+1} \\
\frac{n+1}{n^2} &\geq \frac{n+2}{(n+1)^2} \qquad \Big/ \cdot n^2(n+1)^2 \\
(n+1)^3 &\geq (n+2)n^2 \\
\cancel{n^3} + 3n^2 + 3n + 1 &\geq \cancel{n^3} + 2n^2 \\
n^2 + 3n + 1 &\geq 0
\end{aligned}
$$

To pa je (očitno) res za vsako naravno število n. Zaporedje (c_n) res pada.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ (To je tudi potreben pogoj za konvergenco poljubne vrste.)

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = 0.$

Dana vrsta konvergira.

(g) Tokrat uporabimo korenski kriterij. Vsak študent naj sam preizkusi kvocientni in Leibnizov kriterij, da se prepriča, da sta za ta primer nerodna.
$q_n = \sqrt[n]{\left|(-1)^n(\frac{2n+1}{3n})^n\right|} = \frac{2n+1}{3n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow$ vrsta konvergira.

(h) Na tem primeru se poigrajmo s tremi pristopi. Uporabimo kvocientni, korenski in Leibnizov kriterij.
Kvocientni kriterij:
$q_n = \left|\frac{(-1)^{n+1}(\frac{2}{n+1})^{n+1}}{(-1)^n(\frac{2}{n})^n}\right| = \frac{2}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{2}{n+1}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \cdot \frac{1}{e} = 0 < 1 \Rightarrow$ vrsta konvergira.
Korenski kriterij:
$q_n = \sqrt[n]{\left|(-1)^n(\frac{2}{n})^n\right|} = \frac{2}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1 \Rightarrow$ vrsta konvergira.
Leibnizov kriterij: $c_n = (\frac{2}{n})^n$

1) $\frac{2^n}{n^n} > \frac{2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$ $2^n(n+1)^{n+1} > 2^{n+1}n^n$
$(n+1)^{n+1} > 2n^n$ $(n+1)(n+1)^n$ Ker je $n+1 \geq 2$ in $(n+1)^n > n^n$ je zaporedje (c_n) padajoče.

2) $c_n = (\frac{2}{n})^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Leibnizov kriterij nam pove, da dana vrsta konvergira.

(i) Kvocientni kriterij: $q_n = \frac{1}{3}\frac{n}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow$ vrsta konvergira.

(j) Korenski kriterij: $q_n = \frac{3}{4\sqrt[n]{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3}{4} < 1 \Rightarrow$ vrsta konvergira.

(k) Primerjalni kriterij: $q_n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow$ vrsta konvergira.

Na kazalo

5 Zveznost in limita funkcije

1. Izračunaj levo in desno limito funkcije $f(x)$ v točki x_0.

   (a) $f(x) = \frac{x-3}{|x-3|}$, $x_0 = 3$

   (b) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$, $x_0 = 2$

   (c) $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}$, $x_0 = 1$

Rešitev:

(a) Za izračun leve limite v točki $x_0 = 3$ moramo ugotoviti kateri vrednosti se bližajo funkcijske vrednosti funkcije $f(x) = \frac{x-3}{|x-3|}$, ko se vrednosti x bližajo 3 iz leve strani t.j. za $x < 3$. V funkcijskem predpisu nastopa absolutna vrednost, ki jo lahko opustimo (saj je $x < 3$ oz. $x - 3 < 0$): $|x - 3| = -(x - 3)$.

$$\lim_{x\uparrow 3} f(x) = \lim_{x\uparrow 3} \frac{x-3}{|x-3|} = \lim_{x\uparrow 3} \frac{\cancel{x-3}}{-\cancel{(x-3)}} = \lim_{x\uparrow 3}(-1) = -1$$

Za izračun desne limite v točki $x_0 = 3$ upoštevamo $x > 3$ in opustimo absolutno vrednost, ki nastopa v funkcijskem predpisu (saj je $x > 3$ oz. $x - 3 > 0$): $|x - 3| = x - 3$.

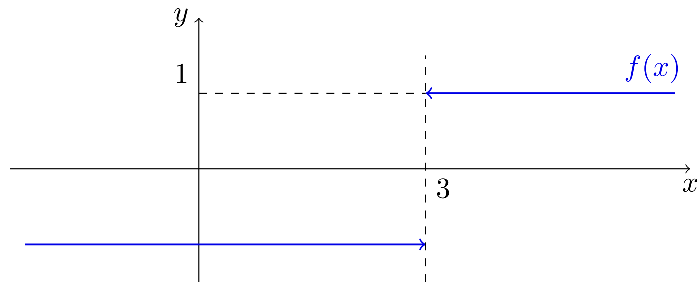
$$\lim_{x\downarrow 3} f(x) = \lim_{x\downarrow 3} \frac{x-3}{|x-3|} = \lim_{x\downarrow 3} \frac{\cancel{x-3}}{\cancel{x-3}} = \lim_{x\downarrow 3} 1 = 1$$

OPOMBA 1: V obeh primerih smo krajšali ulomka z $(x-3)$, ki ima v $x_0 = 3$ vrednost 0, vendar krajšanje ulomka ni problematično, saj nas pri izračunu limite ne zanima funkcijska vrednost v sami točki (v $x_0 = 3$ je namreč $x - 3 = 0$ in $f(x)$ ni definirana), ampak v okolici opazovane točke (v okolici pa velja $x - 3 \neq 0$).
OPOMBA 2: Limita v točki $x_0 = 3$ ne obstaja, saj leva in desna limita nista enaki.
OPOMBA 3: V računskem postopku smo videli, da zlahka opustimo absolutno vrednost, tako se funkcijski predpis naše funkcije zapiše tudi

$$f(x) = \begin{cases} -1 & ; \quad x < 3 \\ 1 & ; \quad x > 3 \end{cases}.$$

Njen graf izgleda tako

Na kazalo



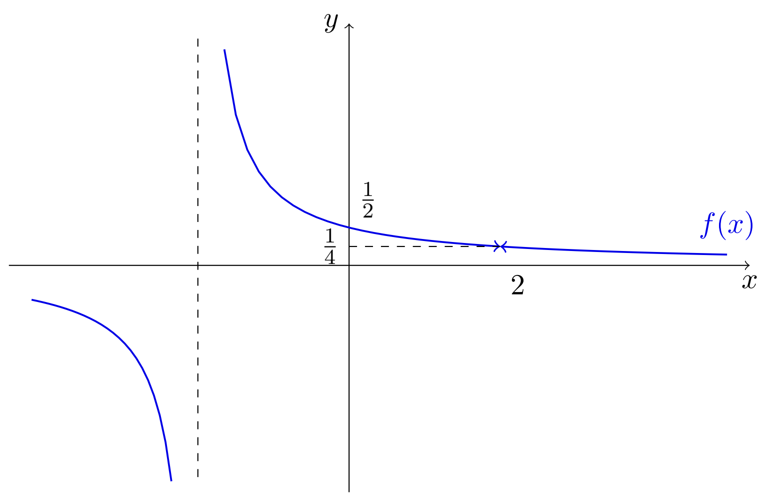
(b) Funkcija $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ na prvi pogled izgleda kot racionalna funkcija, vendar to ni. Racionalne funkcije imajo namreč obliko ulomka, s poljubnima, tujima si polinomoma v števcu in imenovalcu. Polinoma $x-2$ in $x^2-4 = (x-2)(x+2)$ pa nista tuja.

$$\lim_{x\uparrow 2} f(x) = \lim_{x\uparrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x\uparrow 3} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\uparrow 3} \frac{1}{x+2}$$

Funkcija $g(x) = \frac{1}{x+2}$ je racionalna funkcija in kot taka zvezna povsod, kjer je definirana. To seveda pomeni, da sta leva in desna limita v vsaki točki definicijskega območja enaki funkcijski vrednosti, tudi v $x_0 = 2$. Torej je $\lim\limits_{x\uparrow 3} \frac{1}{x+2} = g(2) = \frac{1}{4}$. Ker v računskem postopku nikoli nismo upoštevali dejstva, da se x nahaja levo od 2, je limita očitno neodvisna od strani na kateri se nahajamo. Torej je leva limita enaka desni.

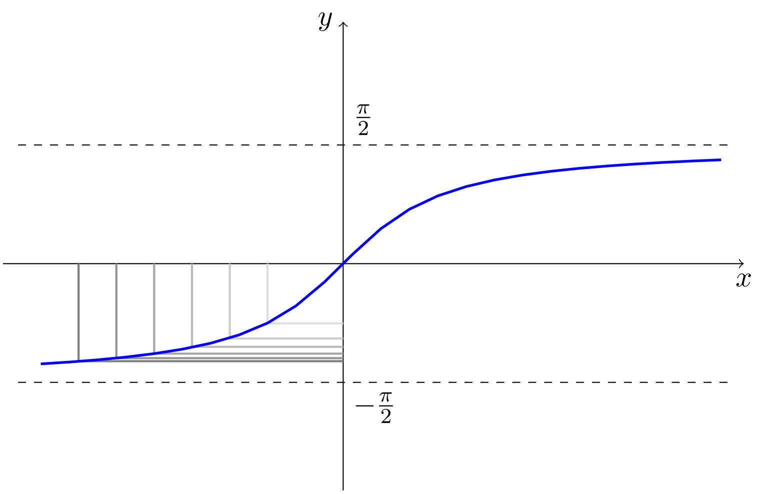
$$\lim_{x\uparrow 3} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{1}{4} = \lim_{x\downarrow 3} \frac{x-2}{x^2-4}$$

OPOMBA 1: Limita v točki x_0 obstaja in je enkaka $\frac{1}{4}$.
OPOMBA 2: Funkciji f in g se razlikujeta le v $x_0 = 2$, funkcija g doseže tukaj vrednost $\frac{1}{4}$, funkcija f pa v tej točki sploh ni definirana. To pomeni, da se bosta tudi grafa funkcij ujemala povsod, razen v $x_0 = 2$. Tako zlahka pridemo do grafa funkcije f.



Na kazalo

(c) Leve limite se bomo v tem primeru lotili malo drugače kot desne, da si ogledamo čimveč različnih prijemov.
Vidimo, da ulomek $\frac{1}{x-1}$ ni definiran v $x_0 = 1$. Ker opazujemo njegove vrednosti v okolici x_0, za katere velja $x < 1$ oz. $x - 1 < 0$, so vrednosti opazovanega ulomka negativne. Ker se z bližanjem spremenljivke x številu 1 vrednost imenovalca približa proti 0, dobivajo vrednosti ulomka ekstremne (negativne) vrednosti. Tako je $\lim\limits_{x\uparrow 1} \frac{1}{x-1} = -\infty$. Treba je razmisliti samo še koliko je $\lim\limits_{t\to-\infty} \operatorname{arctg} t$. Tokrat si bomo pomagali z grafom funkcije $g(t) = \operatorname{arctg} t$ in upoštevali dejstvo, da je višina točke na grafu funkcije enaka funkcijski vrednosti v x, ki je abscisa opazovane točke. Na grafu torej odčitamo kateri vrednosti se bližajo višine točk na grafu, ko se x pomika proti $-\infty$.

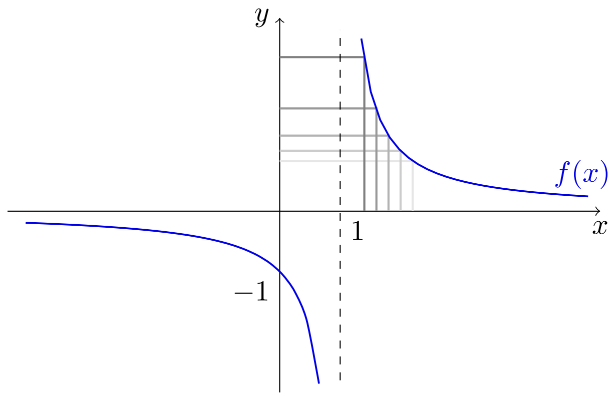


Vidimo, da je

$$\lim_{x\uparrow 1} \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1} = \lim_{t\to-\infty} \operatorname{arctg}\, t = -\frac{\pi}{2}\,.$$

Pri desni limiti se bomo tudi razmisleka o $\lim\limits_{x\downarrow 1} \frac{1}{x-1}$ lotili grafično. Narišimo krivuljo z enačbo $y = \frac{1}{x-1}$ (ničel nima, pol lihe stopnje pri $x = 1$, vodoravna asimptota je x os ter $f(0) = -1$) in odčitajmo h kateri višini se bližajo točke na krivulji, ko se x bliža 1 iz desne strani.

Na kazalo



Ker je $\lim\limits_{x\downarrow 1}\frac{1}{x-1}=\infty$ je (razmislek je podoben prejšnjemu)

$$\lim_{x\downarrow 1} f(x)=\frac{\pi}{2}\,.$$

2. Določi definicijsko območje dane funkcije. V točkah, kjer funkcija ni definirana izračunaj levo in desno limito.

   (a) $f(x)=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

   (b) $f(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$

   (c) $f(x)=\frac{e^{\frac{1}{x-1}}-1}{e^{\frac{1}{x-1}}+1}$

Rešitev:

(a) Predpis $f(x)=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ ni definiran, ko sta nedefinirana ulomka $\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ in $\frac{1}{x}$. Prvi ni definiran, ko je $1+e^{\frac{1}{x}}=0$ oz. $e^{\frac{1}{x}}=-1$, kar pa ni nikoli. Drugi pa ni definiran, ko je $x=0$. Torej $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
Pri izračunu leve in desne limite bomo uporabili limite $\lim\limits_{x\uparrow 0}\frac{1}{x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\downarrow 0}\frac{1}{x}=\infty$, $\lim\limits_{t\to\infty}e^t=\infty$, $\lim\limits_{t\to-\infty}e^t=0$ in $\lim\limits_{u\to\infty}\frac{1}{1+u}=0$. Tako sta

$$\lim_{x\uparrow 0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1 \quad \text{in} \quad \lim_{x\downarrow 0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0\,.$$

(b) Naravno definicijsko območje za $f(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$ je $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$ (namig: definirana morata biti ulomka $\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$ in $\frac{1}{x}$). Pri izračunu limite si pomagamo z razrešitvijo dvojnega ulomka $\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{x+1}{x}} = \frac{x}{1+x}$.

$$\lim_{x\uparrow -1} f(x) = \lim_{x\uparrow -1} \frac{x}{1+x} = \infty$$
$$\lim_{x\downarrow -1} f(x) = \lim_{x\downarrow -1} \frac{x}{1+x} = -\infty$$
$$\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\uparrow 0} \frac{x}{1+x} = 0$$
$$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} \frac{x}{1+x} = 0$$

(c) Naravno definicijsko območje za $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}}-1}{e^{\frac{1}{x-1}}+1}$ je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (namig: definirana morata biti ulomka $\frac{e^{\frac{1}{x-1}}-1}{e^{\frac{1}{x-1}}+1}$ in $\frac{1}{x-1}$). Ker veljajo limite $\lim_{x\uparrow 1} \frac{1}{x-1} = -\infty$, $\lim_{x\downarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$, $\lim_{t\to -\infty} e^t = 0$, $\lim_{t\to\infty} e^t = \infty$ in $\lim_{u\to\infty} \frac{1}{u} = 0$ sta limiti

$$\lim_{x\uparrow 1} f(x) = \lim_{t\to -\infty} \frac{e^t - 1}{e^t + 1} = -1\,,$$
$$\lim_{x\downarrow 1} f(x) = \lim_{t\to \infty} \frac{e^t - 1}{e^t + 1} = \lim_{t\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^t}}{1 + \frac{1}{e^t}} = \lim_{u\to\infty} \frac{1-\frac{1}{u}}{1+\frac{1}{u}} = 1\,.$$

3. Izračunaj limite.

(a) $\lim_{x\to 2} \frac{x}{x+1}$

(b) $\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$

(c) $\lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x(x-2)^2} - \frac{1}{x^2-3x+2}\right)$

(d) $\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1}$, $m, n \in \mathbb{N}$

(e) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

(f) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$

(g) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2-1} - \frac{x^2}{2x+1}\right)$

(h) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

(i) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-1} - x\right)$

(j) $\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2-1} - x\right)$

(k) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$

(l) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$

(m) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x - 1}$

Rešitev:

Na kazalo

(a) V prvem primeru imamo opravka s funkcijo, ki je zvezna v $x = 2$, kar pomeni, da je njena limita enaka njeni funkcijski vrednosti v točki $x = 2$.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x}{x+1} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$

(b) V drugi nalogi dobimo nedoločenost tipa "$\frac{0}{0}$". Ničli v števcu in imenovalcu dobimo v polinomih $x-1$ in $x^2-1 = (x-1)(x+1)$. Kadar je ničla x_0 v polinomu, se da polinom vedno faktorizirati z izrazom $(x - x_0)$ (osnovni izrek algebre).

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}\sqrt{2-x}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2-x}}{(x+1)} = \frac{\sqrt{2-1}}{1+1} = \frac{1}{2}$$

(c) Tukaj imamo nedoločenost tipa "$\infty - \infty$". Ulomka razširimo na na skupen imenovalec, seštejemo ter izračunajmo limito. Uporabimo še dejstvo, da je $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$.

$$\lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x^2-3x+2} - \frac{1}{x(x-2)^2} \right) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+1}{x(x-2)^2(x-1)} = -\infty$$

V zadnji limiti imamo $\frac{x^2-3x+1}{x(x-2)^2(x-1)}$, kar nam da limito tipa "$\frac{1}{0}$". Ker gre števec ulomka proti -1, v ulomku pa $x \to 2$, $(x-1) \to 1$ in $(x-2)^2 \downarrow 0$ (saj je $(x-2)^2 > 0$), je predznak ulomka v limiti vedno negativen, zato je limita enaka $-\infty$.

(d) Zopet imamo limito tipa "$\frac{0}{0}$", kjer je ničla tako v števcu kot v imenovalcu v polinomu. Uporabimo formulo za razliko potenc ter okrajšamo ulomek.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+x+1)}{\cancel{(x-1)}(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)} = \frac{1+1+\ldots+1}{1+1+\ldots+1} =$$
$$= \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} 1}{\sum\limits_{i=1}^{n} 1} = \frac{m}{n}$$

(e) Tudi tokrat imamo limito tipa "$\frac{0}{0}$", vendar tokrat nimamo ničel v polinomu. S pomočjo formule za razliko kvadratov $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ razširimo ulomek tako, bo problem ničel le še v polinomih.

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)} =$$
$$= \lim_{x\to 4} \frac{(1+2x-9)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)} = \lim_{x\to 4} \frac{2\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)}{\cancel{(x-4)}(\sqrt{1+2x}+3)} = \frac{4}{3}$$

Na kazalo

(f) V primeru, ko imamo limito tipa "$\frac{\infty}{\infty}$", postopamo podobno kot pri računanju limit zaporedij: števec in imenovalec ulomka delimo z x^4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x^3+x):x^4}{(x^4-3x^2+1):x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}}=0$$

(g) Tokrat moramo najprej preoblikovati funkcijski predpis, da dobimo limito tipa "$\frac{\infty}{\infty}$".

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3(2x+1)}{(2x^2-1)(2x+1)}-\frac{x^2(2x^2-1)}{(2x^2-1)(2x+1)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{2x^4}+x^3\cancel{-2x^4}+x^2}{(2x^2-1)(2x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2}{(2x^2-1)(2x+1)}=\frac{1}{4}$$

(h) Tukaj bomo uporabili faktorizacijo: $x^4-x=x(x^3-1)=x(x-1)(x^2+x+1)$.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-\sqrt{x})(x^2+\sqrt{x})(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x^2+\sqrt{x})(\sqrt{x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)(x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x^2+\sqrt{x})}=3$$

(i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0$

(j) V tem primeru ni treba nič računati, limita je jasna. Ker gre x^2 proti ∞, gre tudi $\sqrt{x^2-1}$ proti ∞. Prav tako gre proti ∞ tudi $-x$. Imamo limito tipa "$\infty+\infty$".

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)=\infty$$

(k) V tem primeru bomo uporabili znano funkcijsko limito $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$.

$$\lim_{x\to0}\frac{3\cdot\sin 3x}{3x}=3\lim_{3x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}=3$$

(k) Pri tej limiti uporabimo enakosti $\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$ in $1-\cos^2 x=\sin^2 x$.

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1-\cos x}{\cos x}}{\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\cos x\sin^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\cos x\sin^2 x(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{\cos x\,\sin^2 x(1+\cos x)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x\,(1+\cos x)}=\frac{1}{2}$$

Na kazalo

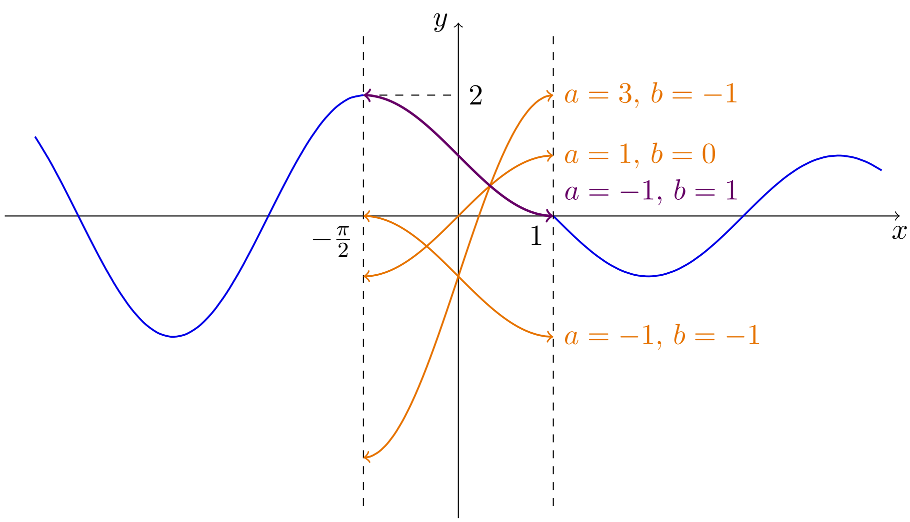
(l) Tudi tokrat imamo limito tipa "$\frac{1}{0}$". Vrednosti imenovalca $\sin x - 1$ so v okolici $\frac{\pi}{2}$ negativne.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x - 1} = -\infty$$

4. Določi parametra a in b tako, da bo dana funkcija zvezna.

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x & ; \quad x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a \sin x + b & ; \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & ; \quad x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Rešitev: Podana funkcija je zlepek treh zveznih funkcij $f_1(x) = -2\sin x$ za $x \leq -\frac{\pi}{2}$, $f_2(x) = a \sin x + b$ za $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ in $f_3(x) = \cos x$ za $x \geq \frac{\pi}{2}$. Edini problem za zveznost dane funkcije sta točki $x = -\frac{\pi}{2}$ in $x = \frac{\pi}{2}$. Nalogo lahko zlahka rešimo grafično.



Vidimo, da je primerna izbira za parametra $a = -1$ in $b = 1$.

5. Določi parametra a in b tako, da bo dana funkcija zvezna.

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{x}{x+1} & ; \quad x < -1 \\ ax + b & ; \quad -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{\sin(2x)}{x^2 - 2x} & ; \quad 0 < x. \end{cases}$$

Rešitev: Podobno kot v prejšnjem primeru imamo tudi tukaj opravka s tremi funkcijami, ki so zvezne, kjer so definirane: $f_1(x) = \arctan \frac{x}{x+1}$ za $x < -1$, $f_2(x) = ax + b$ za $-1 \leq x \leq 0$ in $f_3(x) = \frac{\sin(2x)}{x^2-2x}$ za $0 < x$. Zveznost v točkah $x = -1$ in $x = 0$ bomo dosegli, kadar bosta veljali enakosti:

$$\lim_{x\uparrow -1} f(x) = f(-1) = \lim_{x\downarrow -1} f(x),$$
$$\lim_{x\uparrow 0} f(x) = f(0) = \lim_{x\downarrow 0} f(x).$$

Zaradi zveznosti funkcije f_2 za $-1 \leq x \leq 0$ veljata enakosti

$$\lim_{x\downarrow -1} f(x) = \lim_{x\downarrow -1} f_2(x) = f_2(-1) = b - a,$$
$$\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\uparrow 0} f_2(x) = f_2(0) = b.$$

Izračunajmo preostali limiti:

$$\lim_{x\uparrow -1} f(x) = \lim_{x\uparrow -1} f_1(x) = \lim_{x\uparrow -1} \arctan\frac{x}{x+1} = \lim_{t\to\infty} \arctan t = \frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} f_3(x) = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x^2 - 2x} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{2\sin(2x)}{2x(x-2)} = -1$$

Za zveznost v $x = -1$ mora veljati $\frac{\pi}{2} = b - a$, za zveznost v $x = 0$ pa $-1 = b$. Ko rešimo dobljen sistem dveh enačb za dve neznanki, dobimo $a = -1 - \frac{\pi}{2}$ in $b = -1$.

6 Odvod funkcije

1. Odvajaj

(a) $f(x) = \frac{1}{3x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{5}{x^5} - 2x + 4x^4 - 3$,

(b) $f(x) = 4\sqrt[4]{x^3} - 3\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}} + 2$,

(c) $f(x) = e^x \cos x$,

(d) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$,

(e) $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$,

(f) $f(x) = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$,

(g) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$,

(h) $f(x) = e^{\sin(3x)}$,

(i) $f(x) = (x^2+1)^2 \sin(2x)$,

(j) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$,

(k)* $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

Rešitev:

(a) Funkcijski predpis malce preoblikujemo, da dobimo $f(x) = \frac{1}{3}x^{-2} - 2x^{-3} + 5x^{-5} - 2x + 4x^4 - 3$.
Pri odvajanju uporabimo najprej pravilo za odvajanje vsote, potem pa še pravilo odvajanja funkcije pomnožene s skalarjem. Spomnimo se, da je odvod konstante enak 0 in da velja še $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$. Pri tem primeru zapišemo vse korake.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{1}{3}x^{-2} - 2x^{-3} + 5x^{-5} - 2x + 4x^4 - 3\right)' = \\
&= \left(\frac{1}{3}x^{-2}\right)' + \left(-2x^{-3}\right)' + \left(5x^{-5}\right)' + (-2x)' + \left(4x^4\right)' + (-3)' = \\
&= \frac{1}{3}\left(x^{-2}\right)' - 2\left(x^{-3}\right)' + 5\left(x^{-5}\right)' - 2\,(x)' + 4\left(x^4\right)' = \\
&= \frac{1}{3}(-2)x^{-2-1} - 2(-3)x^{-4} + 5(-5)x^{-6} - 2 + 4 \cdot 4x^3 = \\
&= -\frac{2}{3x^3} + \frac{6}{x^4} - \frac{25}{x^6} - 2 + 16x^3
\end{aligned}$$

(b) Tudi v tem primeru najprej preoblikujemo funkcijski predpis, da dobimo $f(x) = 4x^{\frac{3}{4}} - 3x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{-\frac{1}{2}} + 2$. Uporabimo vsa v primeru (a) opisana pravila, vendar tokrat ne pišemo vseh korakov.

$$f'(x) = \frac{3}{\sqrt[4]{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{2\sqrt{x^3}}$$

(c) V tem primeru uporabimo pravilo za odvajanje produkta

$$\Big(fg\Big)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

in tabelo odvodov za izračun obeh odvodov elementarnih funkcij.

$$f'(x) = (e^x \cos x)' = (e^x)' \cos x + e^x (\cos x)' = e^x \cos x + e^x (-\sin x) = e^x (\cos x - \sin x)$$

(d) Tokrat uporabimo pravilo za odvajanje kvocienta

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} .$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{(1+x)'(1-x) - (1+x)(1-x)'}{(1-x)^2} = \\ &= \frac{1-x-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

(e) V danem primeru uporabimo pravilo za odvajanje kompozituma $\Big(g \circ h\Big)'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$. Vlogo funkcije $g(x)$ ima $\sqrt{x}$, vlogo $h(x)$ pa $\frac{1+x}{1-x}$. Odvoda funkcij sta

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{in} \quad h'(x) = \frac{2}{(1-x)^2} \text{ (to smo izračunali v primeru (d)),}$$

prvi faktor v pravilu za odvajanje kompozituma pa je enak

$$g'(h(x)) = g'\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} .$$

Tako izračunamo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{1-x}{(1+x)(1-x)^2}} \cdot \frac{1}{(1-x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}(1-x)} \end{aligned}$$

(f) Poleg pravila za odvajanje kvocienta in tabele osnovnih odvodov tukaj uporabimo še formuli za računanje s kotnimi funkcijami: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ in $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(-\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x) - (\cos x + \sin x)(-\sin x - \cos x)}{(\cos x - \sin x)^2} = \\ &= \frac{(\cos x - \sin x)^2 + (\cos x + \sin x)^2}{\cos^2 x - 2\cos x \sin x + \sin^2 x} = \frac{2}{1 - \sin(2x)} \end{aligned}$$

Na kazalo

(g) V tej nalogi uporabimo še formulo $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.

$$f'(x) = 4\sin^3 x \cos x + 4\cos^3 x(-\sin x) = 4\sin x \cos x \left(\sin^2 x - \cos^2 x\right) =$$
$$= -2\sin(2x)\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = -2\sin(2x)\cos(2x) = -\sin(4x)$$

(h) Odvajanja kompozituma treh funkcij se lotimo podobno kot odvajanja kompozituma dveh funkcij, z uporabo pravila za odvajanje kompozituma.

$$f'(x) = e^{\sin(3x)}(\sin(3x))' = e^{\sin(3x)}\cos(3x)\cdot(3x)' = 3e^{\sin(3x)}\cos(3x)$$

(i) Najprej uporabimo pravilo produkta, potem pravilo kompozituma.

$$f'(x) = \left((x^2+1)^2\right)'\sin(2x) + (x^2+1)^2\,(\sin(2x))' =$$
$$= 2(x^2+1)(2x)\sin(2x) + (x^2+1)^2\cos(2x)\cdot 2 =$$
$$= 2(x^2+1)\left(2x\sin(2x) + (x^2+1)\cos(2x)\right)$$

(j) Ker v funkciji nastopa izraz $\frac{1+x}{1-x}$, bomo uporabili rezultat iz naloge (d): $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{2}{(1-x)^2}$. Tako dobimo:

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}}\cdot\frac{2}{(1-x)^2} =$$
$$= \frac{(1-x)^2}{(1-x)^2+(1+x)^2}\cdot\frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

(k)* Najprej odvajajmo $g(x) = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

$$g'(x) = \frac{1+\sqrt{1-x^2} - x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{(1+\sqrt{1-x^2})^2} = \frac{\frac{\sqrt{1-x^2}+1-x^2+x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{(1+\sqrt{1-x^2})^2} = \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}(1+\sqrt{1-x^2})^2} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}(1+\sqrt{1-x^2})}$$

Na kazalo

Zdaj pa izračunamo še odvod funkcije $f(x)$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+\left(\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}(1+\sqrt{1-x^2})} = \\
&= \frac{1}{1+\frac{x^2}{\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}(1+\sqrt{1-x^2})} = \\
&= \frac{\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2}{\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2+x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}(1+\sqrt{1-x^2})} = \\
&= \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+2\sqrt{1-x^2}+1-x^2+x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \\
&= \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2(1+\sqrt{1-x^2})}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

2. Izračunaj enačbo tangente na graf dane funkcije v točki x_0:
   (a) $f(x) = x^2 + 2x + 6$, $x_0 = 1$,
   (b) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$,
   (c) $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$, $x_0 = 0$.

Rešitev: Smerni koeficient tangente na graf funkcije $f(x)$ v točki x_0 je enak $k = f'(x_0)$.

(a) Najprej izračunamo odvod $f'(x) = 2x + 2$. Smerni koeficient tangente je enak $k = 2\cdot 1 + 2 = 4$. Da izračunamo še začetno vrednost n v enačbi tangente $y = 4x + n$, upoštevamo, da se tangenta dotakne grafa funkcije v točki $T(1, f(1))$ oziroma $T(1, 9)$. To je točka, ki leži tudi na tangenti, torej mora veljati $9 = 4\cdot 1 + n$, kar nam da $n = 5$. Enačba tangente je tako $y = 4x + 5$.

(b) Odvod dane funkcije je $f'(x) = -\sin x$, smerni koeficient tangente pa $k = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Manjka le še začetna vrednost n v enačbi tangente $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + n$. Tangenta poteka skozi točko $T\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$, torej mora veljati $n = \frac{3+\pi\sqrt{3}}{6}$. Enačba tangente je tako $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3+\pi\sqrt{3}}{6}$.

(c) Odvod dane funkcije je $f'(x) = 3\cos x - 4\sin x$, smerni koeficient tangente pa $k = 3$. začetna vrednost pa $n = 4$. Enačba tangente je tako $y = 3x + 4$.

3. Pokaži, da se krivulji $y = x - x^2$ in $y = x^2 - x$ sekata pravokotno.

Na kazalo

Rešitev: Najprej opazimo, da sta obe krivulji (paraboli) $y_1 = x - x^2 = x(1-x)$ in $y_2 = x^2 - x = x(x-1)$ simetrični glede na premico $x = \frac{1}{2}$, zato je dovolj pokazati, da se v enem izmed dveh presečišč sekata pod pravim kotom. Vidimo, da obe paraboli sekata abscisno os v $x_1 = 0$ in $x_2 = 1$, kar sta hkrati tudi presečišči parabol. Vzemimo npr. presečišče $x_1 = 0$. Kot pod katerim se sekata krivulji, je enak kotu, pod katerim se sekata tangenti na krivuljo v točki presečišča. Če se tangenti sekata pravokotno, mora za njuna smerna koeficienta k_1 in k_2 veljati zveza $k_1 = -\frac{1}{k_2}$. Za izračun obeh smernih koeficientov potrebujemo najprej oba odvoda: $y_1' = 1 - 2x$ in $y_2' = 2x - 1$. V točki $x_1 = 0$ sta torej smerna koeficienta enaka $k_1 = y_1'(0) = 1$ in $k_2 = y_2'(0) = -1$. Paraboli se res sekata pod pravim kotom.

4. Določi skalar a tako, da bo graf funkcije $f(x) = \text{arctg}\,(ax)$ sekal x os pod kotom $\frac{\pi}{3}$.

Rešitev: Najprej poglejmo kje je presečišče grafa funkcije $f(x)$ z osjo x, torej kje so ničle funkcije $f(x)$. Te bo funkcija dosegla, ko bo $f(x) = 0$ oziroma $\text{arctg}\,(ax) = 0$, torej $a = 0$ ali $x = 0$. Prva možnost nam vrne ničelno funkcijo (saj je $f(x) = \text{arctg}\,(0x) = 0$, ki pa z abscisno osjo oklepa kot 0), kar pa za nas ni zanimivo. Če želimo, da graf funkcije $f(x)$ seka x os pod kotom $\frac{\pi}{3}$, mora za smerni koeficient tangente v točki presečišča veljati $k_T = \text{tg}\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ ali $k_T = \text{tg}\,\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$. Izračunajmo odvod $f'(x) = \frac{a}{1+a^2x^2}$ in smerni koeficient tangente v točki $x = 0$: $k_T = f'(0) = \frac{a}{1+0} = a$. Veljati mora torej $a = \pm\sqrt{3}$.

5. Poišči globalne ekstreme na danem intervalu.

(a) $f(x) = x^3 + 3x^2$ na $[-1, 1]$,

(b) $f(x) = \text{arctg}\,(x^2 - 1)$ na $[-1, \sqrt{2}]$,

(c) $f(x) = x + 2\sqrt{x}$ na $[0, 4]$.

Rešitev: Pri vseh treh primerih se bomo naslonili na izrek, ki pravi, da se globalni ekstremi funkcije na $[a, b]$, ki je zvezna na danem intervalu in odvedljiva na (a, b), nahajajo ali v stacionarnih točkah v notranjosti intervala, ali pa v krajiščih intervala.

(a) Odvod dane funkcije je $f'(x) = 3x^2 + 6x$. Stacionarne točke ima dana funkcija, ko velja $0 = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$, torej v $x_1 = 0$ in $x_2 = -2$. Ker x_2 ne leži na $[-1, 1]$, jo zavržemo. Kandidati za globalne ektreme so tako $x_1 = 0$, kjer je $f(0) = 0$, $a = -1$, kjer je $f(-1) = -1 + 3 = 2$ in $b = 1$, kjer je $f(1) = 1 + 3 = 4$.
Funkcija f doseže globalni minimum 0 v $x_1 = 0$, globalni maksimum 4 pa v desnem krajišču $b = 1$.

(b) Odvod dane funkcije je $f'(x) = \frac{2x}{1+(x^2-1)^2}$, stacionarne točke ima dana funkcija pri pogoju $0 = \frac{2x}{1+(x^2-1)^2}$, torej v $x_1 = 0$. Kandidati za globalne ektreme so tako $x_1 = 0$, kjer je $f(0) = \text{arctg}\,(-1) = -\frac{\pi}{4}$, $a = -1$, kjer je $f(-1) = \text{arctg}\,0 = 0$ in $b = \sqrt{2}$, kjer

je $f(\sqrt{2}) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.
Globalni minimum $-\frac{\pi}{4}$ doseže funkcija f v $x_1 = 0$, globalni maksimum $\frac{\pi}{4}$ pa v desnem krajišču $b = \sqrt{2}$.

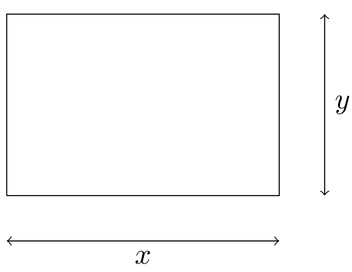
(c) Odvod dane funkcije je $f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$. Ker je prvi odvod vedno pozitiven, funkcija vedno narašča in nima stacionarnih točk. Minimum očitno doseže v levem, maksimum pa v desnem krajišču intervala.
Funkcija f doseže globalni minimum $f(0) = 0$ v $x_1 = 0$, globalni maksimum $f(4) = 8$ pa v desnem krajišču $b = 4$.

6. Poišči intervale naraščanja in padanja za $f(x) = x^3 - 3x$.

Rešitev: Funkcija narašča tam, kjer je $f'(x) > 0$. Ker je $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$, funkcija f narašča tam, kjer je $x^2 - 1 > 0$ oziroma na intervalu $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Pada pa na intervalu $(-1, 1)$.

7. Iz 40 cm dolge žice oblikuj pravokotnik z največjo možno ploščino.

Rešitev:



Ploščino pravokotnika s stranicama x in y izračunamo:

$$P = P(x, y) = xy.$$

Ker pa je obseg tega pravokotnika $2x + 2y = 40$, velja $y = 20 - x$. Zato lahko izrazimo ploščino kot funkcijo ene spremenljivke

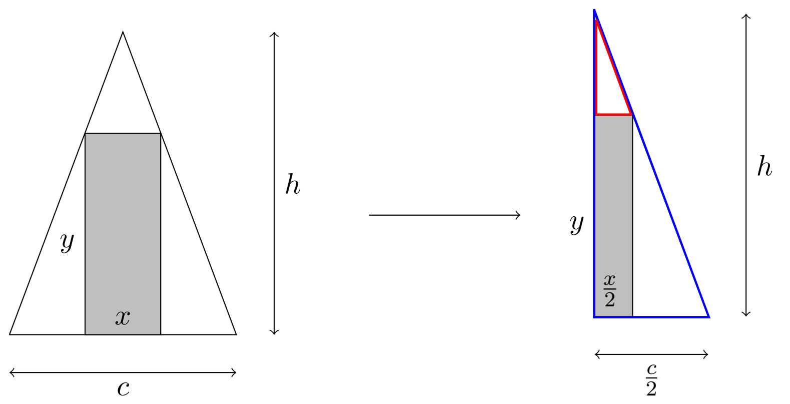
$$p(x) = P(x, 20 - x) = x(20 - x) = 20x - x^2.$$

Funkcija $p(x)$ je kvadratni polinom, za katerega vemo, da doseže maksimum v temenu (saj je njegov vodilni koeficient negativen), le-to pa je na sredi med obema ničlama. Ničli sta $x_1 = 0$ in $x_2 = 20$, kar pomeni, da doseže funkcija p maksimum v $x = 10$. Tako je $y = 20 - 10 = 10$.

8. Imamo enakokraki trikotnik z osnovnico c in višino h. Včrtaj mu pravokotnik z osnovnico na stranici c tako, da bo ploščina največja.

Rešitev:

Na kazalo



Dovolj je, da rešimo problem trikotniku včrtanega pravokotnika kot je narisano na desni skici (torej le na polovici trikotnika). Ploščino pravokotnika izrazimo kot funkcijo dveh spremenljivk $P(x, y) = xy$. Opazimo, da se na desni skici nahajata (vsaj) dva podobna trikotnika: na skici sta označena z modro in rdečo barvo. Vemo, da je se razmerje stranic v podobnih trikotnikih ohranja, zato velja, da sta kateti modro označenega trikotnika v istem razmerju kot kateti rdeče označenega trikotnika. Če to zapišemo v obliki enakosti, lahko izrazimo x z y.

$$\begin{aligned} \frac{c}{2} : h &= \frac{x}{2} : (h - y) \\ \frac{\frac{c}{2}}{h} &= \frac{\frac{x}{2}}{h - y} \Big/ \cdot 2(h - y) \\ \frac{c(h - y)}{h} &= x \end{aligned}$$

Zdaj se ploščina izrazi kot funkcija ene spremenljivke:

$$p(y) = P\left(\frac{c(h - y)}{h}, y\right) = \frac{c(h - y)}{h} y = \frac{c}{h} y(h - y)\,.$$

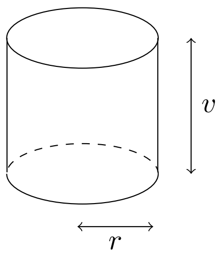
Tudi v tem primeru smo dobili kvadratni polinom z negativnim vodilnim koeficientom, ki doseže maksimum na sredi med obema ničlama $y_1 = 0$ in $y_2 = h$, torej v $y = \frac{h}{2}$. Sedaj izračunamo še x:

$$x = \frac{c\left(h - \frac{h}{2}\right)}{h} = \frac{c\frac{\cancel{h}}{2}}{\cancel{h}} = \frac{c}{2}\,.$$

9. Tovarna izdeluje literske konzerve v obliki pokončnega valja (brez pokrova). Kolikšno mora biti razmerje med polmerom r in višino v konzerve, da bo pločevina najbolj racionalno izkoriščena?

Rešitev:

Na kazalo



Površino zgoraj odprtega valja izračunamo kot vsoto ploščine osnovne ploskve in površine plašča valja (obseg osnovne ploskve pomnožen z višino valja):

$$P = P(r, v) = \pi r^2 + 2\pi r v.$$

Pri vnaprej določeni prostornini valja (1 l) velja $V = 1 = \pi r^2 v$ iz česar lahko izrazimo $v = \frac{1}{\pi r^2}$. Sedaj lahko formulo za površino konzerve izrazimo kot funkcijo ene same spremenljivke:

$$p(r) = P\left(r, \frac{1}{\pi r^2}\right) = \pi r^2 + \frac{2}{r}\,.$$

Tokrat iščemo lokalni minimum (zvezne in odvedljive) funkcije ene spremenljivke na odprtem intervalu $(0, \infty)$. Na obeh robovih intervala dobimo ekstremne vrednosti, saj sta limiti:

$$\lim_{r\downarrow 0}\left(\pi r^2 + \frac{2}{r}\right) = \infty \quad \text{in} \quad \lim_{r\to\infty}\left(\pi r^2 + \frac{2}{r}\right) = \infty\,.$$

Ker je funkcija $p(r)$ zvezna, mora očitno nekje obstajati njen minimum. Ker je poleg zveznosti še odvedljiva, je ta minimum v stacionarni točki. Izračunajmo jo.

$$p'(r) = 2\pi r - \frac{2}{r^2} = 2\frac{\pi r^3 - 1}{r^2} = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$$

Izračunajmo še višino valja po zgoraj izpeljani formuli: $v = \frac{1}{\pi r^2} = \frac{1}{\pi \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}^2} = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$.

Iskano razmerje med višino in polmerom konzerve je tako $r : v = 1 : 1$.

10. S pomočjo odvoda pokaži, da za vsak $x > 0$ velja

$$\ln x \geq \frac{x-1}{x}.$$

Rešitev: Prepišimo neenačbo v obliko

$$\ln x - \frac{x-1}{x} \geq 0\,.$$

Poimenujmo funkcijo, ki nastopata na levi strani dobljene neenačbe $f(x) = \ln x - \frac{x-1}{x}$. Tako definirana funkcija je zvezna. Opazimo še, da velja $f(1) = 0$. Torej poteka graf funkcije skozi točko $(1, 0)$. Naprej si bomo pomagali z obnašanjem funkcije, ki ga odčitamo iz prvega odvoda:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{x - (x-1)}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}\,.$$

Na kazalo

Ker je za $0 < x \leq 1$ (oz. $x-1 \leq 0$) $f'(x) \leq 0$, funkcija $f(x)$ pada. Za $x \geq 1$ (oz. $x-1 \geq 0$) velja $f'(x) \geq 0$ in zato funkcija $f(x)$ narašča. V točki $x=1$ ima funkcija f minimum, zato velja $f(x) \geq 0$.

11. S pomočjo l'Hospitalovega pravila izračunaj limite

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$,

(b) $\lim\limits_{x\downarrow 0}(x\ln x)$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x}$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right)$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3}$,

(f) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$,

(g) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$,

(h) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{1}{x(x-2)^2} - \frac{1}{x^2-3x+2}\right)$,

(i) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1}$, $m,n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$,

(j) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$,

(k) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$,

(l) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$,

(m) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$,

(n) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-x-2}{x^3+1}$,

(o) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x}$,

(p) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin mx}{\sin nx}$, $m,n \in \mathbb{R}$, $n \neq 0$,

(q) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(4x)}{\sqrt{x+1}-1}$,

(r) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^2-2x}$,

(s) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$,

(t) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}$.

Rešitev:

(a) Prva limita je primerna za uporabo l'Hospitalovega pravila (saj imamo nedoločenost tipa $''\frac{\infty}{\infty}''$).
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

(b) Pri tej limiti je treba najprej preoblikovati funkcijski predpis, da dobimo nedoločenost primernega tipa (t.j. tipa $''\frac{\infty}{\infty}''$), šele potem uporabimo l'Hospitalovo pravilo.
$\lim\limits_{x\downarrow 0}(x\ln x) = \lim\limits_{x\downarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\downarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim\limits_{x\downarrow 0} x = 0$

(c) Za nedoločenost tipa $''\frac{0}{0}''$ ni potrebe po preoblikovanju funkcijskega predpisa.
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos^3 x}{\cos^2 x}}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{\cos^2 x(1-\cos x)} = 3$

(d) Tudi tukaj je potrebno preoblikovanje funkcijskega predpisa, da dobimo nedoločenost

primernega tipa (tokrat tipa $''\frac{0}{0}''$). L'Hospitalovo pravilo moramo v tem primeru uporabiti dvakrat.
$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\stackrel{l'H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}\stackrel{l'H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\frac{1}{2}$

(e) V tem primeru bi lahko uporabili tudi znano limito $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Mi bomo primer v celoti rešili s pomočjo l'Hospitalovega pravila.
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\stackrel{l'H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{3x^2}=-\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\stackrel{l'H}{=}-\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=-\frac{1}{3}$

(f) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}\stackrel{l'H}{=}\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x+1-\frac{1}{x}}\stackrel{l'H}{=}\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}$

(g) Ker v limiti $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$ velja $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{2-x}=1$ in $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}\stackrel{l'H}{=}\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}$ je

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}\cdot\lim_{x\to 1}\sqrt{2-x}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}\,.$$

L'Hospitalovo pravilo bi lahko uporabili tudi neposredno na prvi limiti, vendar bi bili odvodi funkcije v števcu neprimerljivo bolj zapleteni. Tudi tukaj uporaba l'Hospitalovega pravila ni edini način za reševanje, saj se da isto limito izračunati s krajšanjem polinomov iz števca in imenovalca. Podobno bi lahko postopali tudi v naslednjem primeru.

(h) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}\stackrel{l'H}{=}\lim\limits_{x\to 1}\frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}=\frac{m}{n}$

(i) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}\stackrel{l'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+1}{4x^3-6x}\stackrel{l'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x}{12x^2-6}\stackrel{l'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{24x}=0$

(j) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}\stackrel{l'H}{=}\lim\limits_{x\to 4}\frac{\frac{2}{2\sqrt{1+2x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1+2x}}=\frac{4}{3}$

(k) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\stackrel{l'H}{=}\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\frac{2-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=3$

(l)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x\sin^2 x}\stackrel{l'H}{=}$$
$$\stackrel{l'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{-\sin^3 x+2\sin x\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{-\sin^2 x+2\cos^2 x}=\frac{1}{2}$$

(m) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^3+1}\stackrel{l'H}{=}\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x-1}{3x^2}=-1$

(n) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x}\stackrel{l'H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\cos(3x)}{1}=3$

(o) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{\sqrt{x+1}-1}\stackrel{l'H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{4\cos(4x)}{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}=8$

(p) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2-2x}\stackrel{l'H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{2x-2}=-\frac{1}{2}$

Na kazalo

(q)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\overset{l'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{3x^2}\overset{l'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\sin x}{\cos^3 x}+\sin x}{6x}\overset{l'H}{=}$$
$$\overset{l'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\cos^4 x+6\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^6 x}+\cos x}{6}=\frac{\frac{2}{1}+1}{6}=\frac{1}{2}$$

(r) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}\overset{l'H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}}{\sin x}$

Ker velja $\lim\limits_{x\to 0}e^{x^2}=1$ in $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\overset{l'H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$, velja

$$\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}}{\sin x}=2\cdot\lim_{x\to 0}e^{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=2\,.$$

12. Za vsako naslednjih funkcij določi naravno definicijsko območje, ničle, lokalne ekstreme, prevoje, intervale naraščanja in padanja ter konveksnosti in konkavnosti. Razišči obnašanje funkcije na robu definicijskega območja in čimbolj natančno nariši graf funkcije.

(a) $f(x)=\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$

(b) $f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

(c) $f(x)=\arctan\left(\frac{x}{x-2}\right)$

(d) $f(x)=\arctan\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$

Rešitev:

(a) $f(x)=\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$

Funkcija f je racionalna funkcija, saj sta si polinoma v števcu in imenovalcu tuja.

- Funkcija je definirana takrat, ko je definiran ulomek, t.j., ko je imenovalec ulomka različen od 0. V $x=-1$ je torej pol sode stopnje (saj je -1 dvojna ničla polinoma $(x+1)^2$). **Definicijsko območje** je $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
- Funkcija f ima **ničlo** (lihe stopnje) v $x=1$.
- Poševno asimptoto določimo tako, da delimo polinoma $(x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1$ in $(x+1)^2=x^2+2x+1$.

$$\begin{array}{l}\big(\;\;x^3-3x^2\;\;+3x-1\big):\big(x^2+2x+1\big)=x-5+\dfrac{12x+4}{x^2+2x+1}\\ \underline{-x^3-2x^2\;\;\;-x}\\ \qquad\;\;-5x^2\;\;+2x-1\\ \qquad\;\;\underline{\;\;5x^2+10x+5}\\ \qquad\qquad\quad 12x+4\end{array}$$

Na kazalo

Poševna asimptota je premica $y = x - 5$. Graf naše funkcije jo seka, ko je $12x + 4 = 0$ oz. $x = -\frac{1}{3}$, torej v točki $(-\frac{1}{3}, -\frac{16}{3})$. **Obnašanje v okolici pola** v $x = -1$ raziščemo s pomočjo limit $\lim_{x\downarrow -1} f(x) = \lim_{x\downarrow -1} \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = -\infty$ in $\lim_{x\uparrow 1} f(x) = \lim_{x\uparrow 1} \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = -\infty$. V obeh primerih gre števec ulomka proti -8, imenovalec pa k 0 (iz pozitivne smeri).

- Izračunajmo prvi odvod[13].

$$f'(x) = \frac{3(x-1)^2(x+1)^2 - (x-1)^3 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$$

  - **Stacionarni točki** dobimo, ko je $f'(x) = 0$, torej v $x = -5$ ($f(-5) = -\frac{27}{2}$) in v $x = 1$.
  - Ker sta izraza $(x-1)^2$ in $(x+1)^2$ za vse x iz D_f vedno nenegativna, je $f'(x) > 0$ natanko tedaj, ko je $\frac{x+5}{x+1} > 0$. To neenačbo lahko zapišemo tudi v obliki $(x+5)(x+1) > 0$ (prejšnjo neenačbo pomnožimo s pozitivnim izrazom $(x+1)^2$). Rešitev dobljene kvadratne neenačbe so pa vsa realna števila iz unije intervalov $(-\infty, -5) \cup (-1, \infty)$. **Funkcija** torej **narašča** za $x \in (-\infty, -5) \cup (-1, \infty)$.
  - **Funkcija pada** za $x \in (-5, -1)$.

  V točki $\left(-5, -\frac{27}{2}\right)$ ima funkcija f torej **lokalni maksimum**, v točki $(1, 0)$ pa ima prevoj.

- Izračunajmo drugi odvod[14].

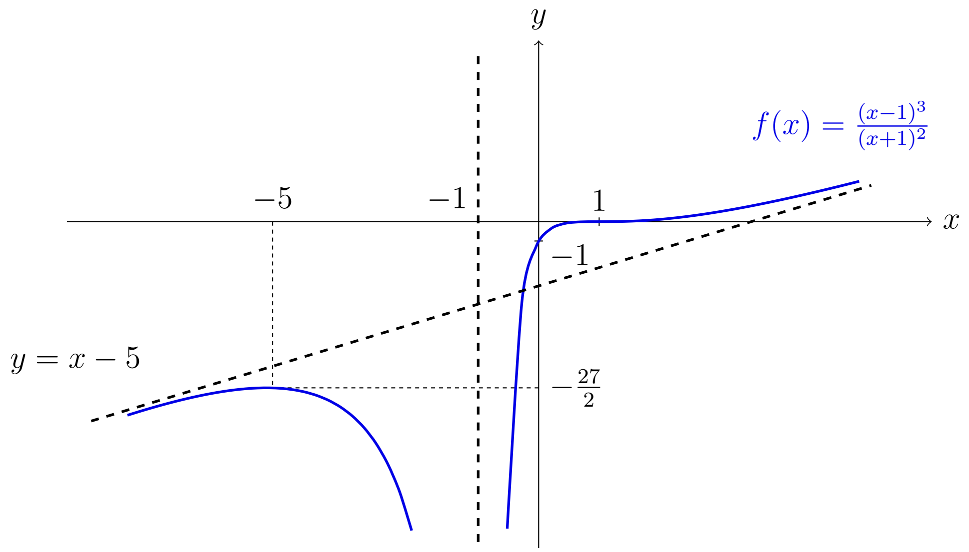
$$f''(x) = \frac{\left(2(x-1)(x+5) + (x-1)^2\right)(x+1)^3 - (x-1)^2(x+5)3(x+1)^2}{(x+1)^6} =$$
$$= \frac{24(x-1)}{(x+1)^4}$$

  - Kandidati za prevoj so točke, za katere je $f''(x) = 0$ to je $x = 1$, za njo pa smo že prej ugotovili, da je **prevoj**.
  - Ker je $(x+1)^4$ vedno nenegativen, je $f''(x) > 0$ natanko tedaj, ko je $x - 1 > 0$. Torej je funkcija **konveksna** za $x \in (1, \infty)$.
  - Funkcija je **konkavna** za $x \in (-\infty, 1) \setminus \{-1\}$.

- **Graf.** (Zaradi lepše skice enote na obeh oseh niso enake.)

[13] Ker nas zanima le kdaj je vrednost prvega odvoda ničelna/pozitivna/negativna, je najbolj ugodno, da ga zapišemo v faktorizirani obliki. Tako lahko iskane podatke zgolj odčitamo.
[14] Tudi tukaj težimo k faktorizirani obliki.

Na kazalo



(b) $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

- Funkcija je definirana takrat, ko sta definirana ulomek in koren hkrati. Ulomek je definiran pri $x \neq 0$, koren pa, ko velja $1-x^2 \geq 0$, t.j. za $x \in [-1,1]$. **Definicijsko območje** je $D_f = [-1,1] \setminus \{0\}$.
- Funkcija f ima **ničli** v $x_{1,2} = \pm 1$ (torej na robu definicijskega območja).
- **Obnašanje v okolici pola** raziščemo z limitama

$$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \infty \text{ in } \lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\uparrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = -\infty\,.$$

V obeh primerih gre števec ulomka proti 1, imenovalec pa k 0, vendar gre imenovalec pri prvi limiti proti 0 iz pozitivne strani (saj $x \downarrow 0$), pri drugi pa iz negativne strani (saj $x \uparrow 0$).

- Izračunajmo prvi odvod.

$$f'(x) = \frac{\frac{1\cdot(-\cancel{2}x)x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2}}{x^2} = -\frac{\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{x^2} = -\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,.$$

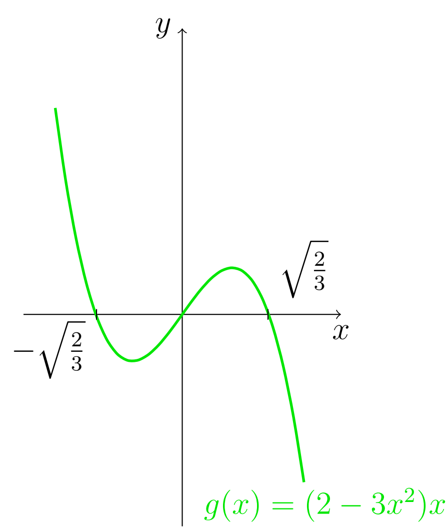
  - **Stacionarnih točk** dana funkcija nima in zato tudi nima **lokalnih ekstremov**.
  - **Funkcija** ves čas **pada**, saj sta $x^2 \geq 0$ in $\sqrt{1-x^2} \geq 0$ in zato je $f'(x) < 0$.

Na kazalo

- Izračunajmo drugi odvod.

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \left(-\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\right)' = -\left(x^{-2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)' = \\
&= -\left(-2x^{-3}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + x^{-2}\left(-\frac{1}{\cancel{2}}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-\cancel{2}x)\right)\right) = \\
&= \frac{2}{x^3\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^2}{x^3(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{2(1-x^2)-x^2}{x^3(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \\
&= \frac{2-3x^2}{x^3(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.
\end{aligned}
$$

- Kandidata za prevoj sta $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, saj ustrezata pogoju $f''(x) = 0$.
- Funkcija je konveksna, ko je $f''(x) > 0$. Ker sta $1-x^2$ in $\sqrt{1-x^2}$ vedno nenegativna (saj je $x \in D_f$), je $f''(x) > 0$ natanko tedaj, ko je $\frac{2-3x^2}{x} > 0$. To neenačbo lahko preoblikujemo v neenačbo $(2-3x^2)x > 0$. Če skiciramo graf kubičnega polinoma, ki nastopa na levi strani neenačbe, odčitamo rešitev neenačbe: $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cup \left(0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. Funkcija je **konveksna** za $x \in \left(-1, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cup \left(0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

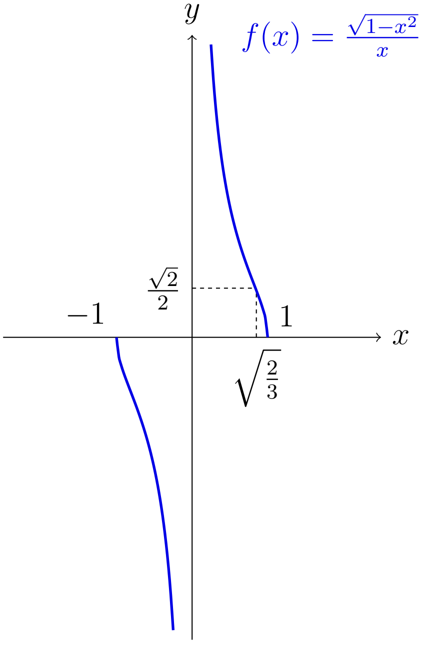


- Funkcija je **konkavna** za $x \in \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right) \cup \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 1\right)$.

Funkcija f ima **prevoja** v $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, $f\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

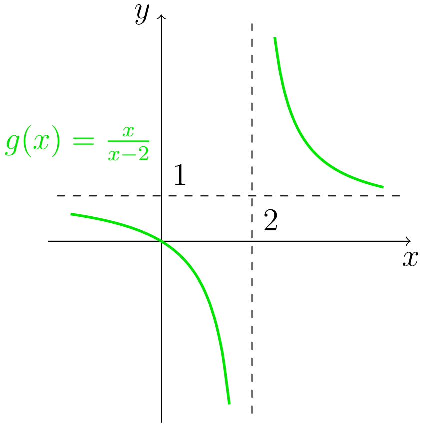
- **Graf:** (ker je funkcija liha, je graf simetričen glede na izhodišče koordinatnega sistema, zato je označen le prevoj, ki leži v prvem kvadrantu.)

Na kazalo



(c) $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{x-2}\right)$

- Funkcija je definirana takrat, ko je definiran ulomek, torej, ko velja $x \neq 2$. **Definicijsko območje** je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- Funkcija f ima **ničlo** v $x = 0$.
- **Obnašanje na robu definicijskega območja** raziščemo z limitami $\lim_{x\downarrow 2} f(x)$, $\lim_{x\uparrow 2} f(x)$, $\lim_{x\to\infty} f(x)$ in $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Preden jih izračunamo pa skicirajmo graf funkcije $g(x) = \frac{x}{x-2}$, s katerim si pomagamo pri limitah. Racionalna funkcija $g(x)$ ima ničlo pri $x = 0$ in pol pri $x = 2$ (oba lihe stopnje). Vodoravna asimptota je $y = 1$ (saj sta polinoma v imenovalcu in števcu iste stopnje z enakima vodilnima koeficientoma).



Iz dobljenega grafa odčitamo vrednosti limit

$$\lim_{x\downarrow 2} g(x) = \infty, \lim_{x\uparrow 2} g(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 1 \text{ in } \lim_{x\to-\infty} g(x) = 1.$$

Sedaj izračunamo limite:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\downarrow 2} f(x) &= \lim_{x\downarrow 2} \arctan\left(\frac{x}{x-2}\right) = \frac{\pi}{2},\\
\lim_{x\uparrow 2} f(x) &= \lim_{x\uparrow 2} \arctan\left(\frac{x}{x-2}\right) = -\frac{\pi}{2},\\
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \arctan\left(\frac{x}{x-2}\right) = \frac{\pi}{4} \text{ in}\\
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \arctan\left(\frac{x}{x-2}\right) = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

- Prvi odvod.

$$
f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{x-2}\right)^2} \cdot \frac{\cancel{x} - 2 \cancel{- x}}{(x-2)^2} = \frac{1}{\frac{(x-2)^2+x^2}{\cancel{(x-2)^2}}} \cdot \frac{-2}{\cancel{(x-2)^2}} = -\frac{2}{(x-2)^2+x^2}\,.
$$

  - **Stacionarnih točk** dana funkcija nima in zato tudi nima **lokalnih ekstremov**.
  - **Funkcija** ves čas **pada**, saj velja $(x-2)^2 + x^2 \geq 0$ in zato $f'(x) < 0$.

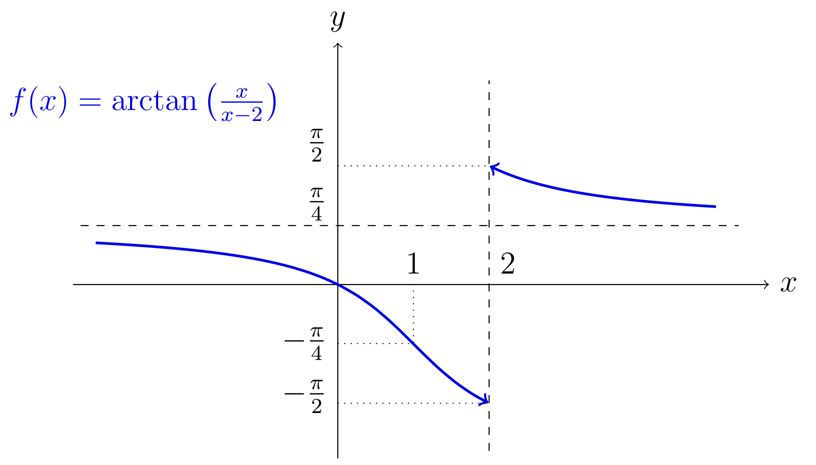
- Drugi odvod.

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \left(-\frac{2}{(x-2)^2+x^2}\right)' = -\left(\frac{2}{2x^2-4x+4}\right)' = \\
&= -\left((x^2-2x+2)^{-1}\right)' = \frac{2x-2}{(x^2-2x+2)^2} = \frac{2(x-1)}{(x^2-2x+2)^2}.
\end{aligned}
$$

  - Kandidat za prevoj ustreza pogoju $f''(x) = 0$, torej $x = 1$.
  - Funkcija je konveksna, ko je $f''(x) > 0$. Ker velja $(x^2-2x+2)^2 > 0$ je $f''(x) > 0$ natanko tedaj, ko je $x - 1 > 0$, oz. $x > 1$. Funkcija je **konveksna** za $x \in (1,\infty) \setminus \{2\}$.
  - Funkcija je **konkavna** za $x \in (-\infty, 1)$.

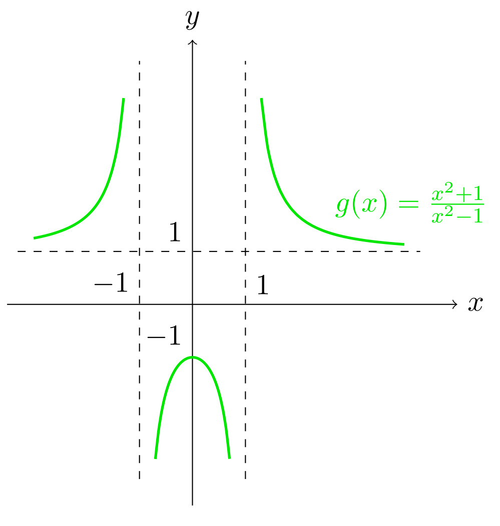
Funkcija f ima **prevoj** v $x = 1$, $f(1) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

- **Graf.**



(d) $f(x) = \arctan\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$

- Funkcija je definirana takrat, ko je definiran ulomek, torej, ko velja $x \neq \pm 1$. **Definicijsko območje** je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.
- Funkcija f nima ničel.
- Ker velja $f(-x) = \arctan\left(\frac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1}\right) = \arctan\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right) = f(x)$, je funkcija **soda**. To dejstvo bomo uporabili pri nadaljnem računanju, t.j. naredili bomo izračune za $x \geq 0$ in potem sklepali na to, kaj se dogaja pri $x < 0$. Graf funkcije je simetričen glede na os y.
- **Obnašanje na robu definicijskega območja** raziščemo z $\lim_{x\downarrow 1} f(x)\big(= \lim_{x\uparrow -1} f(x)\big)$, $\lim_{x\uparrow 1} f(x)\big(= \lim_{x\downarrow -1} f(x)\big)$ in $\lim_{x\to\infty} f(x)\big(= \lim_{x\to-\infty} f(x)\big)$.



Preden jih izračunamo pa skicirajmo graf funkcije $g(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$, s katerim si pomagamo pri limitah. Racionalna funkcija $g(x)$ nima ničle in ima pola pri $x = \pm 1$ (oba lihe stopnje). Vodoravna asimptota je $y = 1$ (saj sta polinoma v imenovalcu in števcu iste stopnje z enakima vodilnima koeficientoma). Ordinatno os seka pri $y = -1$.

Iz dobljenega grafa odčitamo vrednosti limit

$$\lim_{x\downarrow 1} g(x) = \infty = \lim_{x\uparrow -1} g(x),$$

$$\lim_{x\uparrow 1} g(x) = -\infty = \lim_{x\downarrow -1} g(x),$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 1 \text{ in } \lim_{x\to -\infty} g(x) = 1.$$

Sedaj izračunamo limite:

$$\lim_{x\downarrow 1} f(x) \big(= \lim_{x\uparrow -1} f(x)\big) = \lim_{x\downarrow 1} \arctan\frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\uparrow 1} f(x) \big(= \lim_{x\downarrow -1} f(x)\big) = \lim_{x\uparrow 1} \arctan\frac{x^2+1}{x^2-1} = -\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \big(= \lim_{x\to -\infty} f(x)\big) = \lim_{x\to\infty} \arctan\frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{\pi}{4}.$$

- Prvi odvod.

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2} \cdot \frac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{\cancel{2x^3} - 2x \cancel{-2x^3} - 2x}{\frac{(x^2-1)^2+(x^2+1)^2}{\cancel{(x^2-1)^2}} \cdot \cancel{(x^2-1)^2}} =$$

$$= -\frac{4x}{x^4 \cancel{-2x^2} + 1 + x^4 \cancel{+2x^2} + 1} = -\frac{4x}{2x^4+2} = -\frac{2x}{x^4+1}\,.$$

  - **Stacionarno točko** ima dana funkcija v $x=0$, $f(0) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$.
  - **Funkcija pada**, ko je $x \in (0,\infty)\setminus\{1\}$ (saj je v tem primeru $f'(x) < 0$).
  - **Funkcija narašča**, ko je $x \in (-\infty,0)\setminus\{-1\}$ (saj je v tem primeru $f'(x) > 0$).

  V stacionarni točki ima naša funkcija **lokalni maksimum**.

- Drugi odvod.

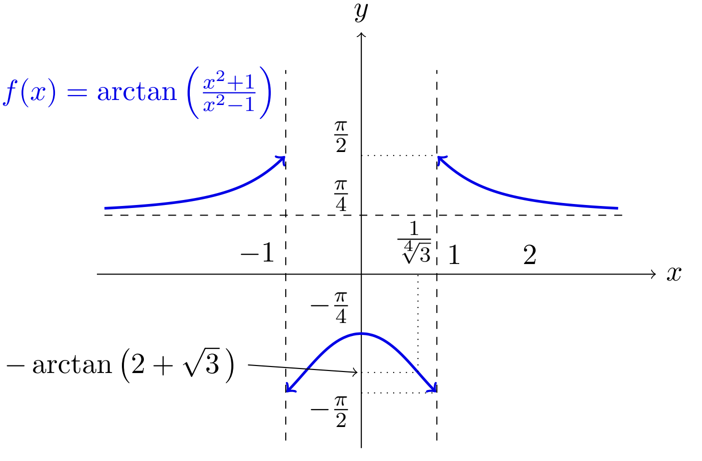
$$f''(x) = -2\left(\frac{x}{x^4+1}\right)' = -2\cdot\frac{x^4+1-x4x^3}{(x^4+1)^2} = -2\cdot\frac{1-3x^4}{(x^4+1)^2} = 2\cdot\frac{3x^4-1}{(x^4+1)^2}$$

  - Kandidata za prevoje ($f''(x)=0$) sta $x = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.
  - Funkcija je konveksna, ko je $f''(x) > 0$. Ker velja $(x^4+1)^2 > 0$ je $f''(x) > 0$ natanko tedaj, ko je $3x^4 - 1 > 0$, oz. $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \infty\right)$. Funkcija je **konveksna** za $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \infty\right) \setminus \{\pm 1\}$.
  - Funkcija je **konkavna** za $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)$.

  Funkcija f ima **prevoja** v $x = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$, $f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = \arctan\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{\frac{1}{\sqrt{3}}-1} = \arctan\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}} = \arctan\left(-2-\sqrt{3}\right) = -\arctan\left(2+\sqrt{3}\right)$.

Na kazalo

- **Graf.** (Na grafu so zaradi sodosti označene le specifične točke pri $x > 0$.)



Literatura

[1] V. Lampret, *Matematika 1, prvi del, preslikave, števila in vektorski prostori*, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Ljubljana, 2012.

[2] P. Mizori-Oblak, *Matematika za študente tehnike in naravoslovja, Prvi del*, 6. izd., Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 2001.

[3] P. Mizori-Oblak, *Matematika za študente tehnike in naravoslovja, Drugi del*, 6. izd., Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 1997.

[4] T. Novak, A. Peperko, D. Rupnik Poklukar, H. Zakrajšek, *Matematika 1, Naloge in postopki reševanja*, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 2015.

[5] T. Novak, A. Peperko, D. Rupnik Poklukar, H. Zakrajšek, *Matematika 2, Naloge in postopki reševanja*, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 2016.

Na kazalo

Rešene naloge iz inženirske matematike I:
študijsko gradivo za študente FGG

Avtorica: Mojca Premuš

Založila: Založba Univerze v Ljubljani
Za založbo: Gregor Majdič, rektor Univerze v Ljubljani
Izdala: Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani
Za izdajatelja: Violeta Bokan Bosiljkov, dekanja Fakultete za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani

Ljubljana, 2023
Prva e-izdaja
Publikacija je brezplačna.
Publikacija je v digitalni obliki prosto dostopna na https://ebooks.uni-lj.si
DOI: 10.15292/9789612973179

Kataložni zapis o publikaciji (CIP) pripravili v
Narodni in univerzitetni knjižnici v Ljubljani
COBISS.SI-ID 191868419
ISBN 978-961-297-317-9 (PDF)