

# OPTIMIZACIJA OPAZOVANJ V GEODEZIJI

## OPTIMAL DESIGN OF GEODETIC MEASUREMENTS

*Blaž Mozetič, Bojan Stopar*

UDK: 528.02:528.28

### POVZETEK

*V besedilu je predstavljena optimizacija opazovanj v geodetski izmeri, ki spada med postopke načrtovanja geodetske izmere in nam lahko ponudi odgovore na pomembna vprašanja, s katerimi se sicer srečamo šele ob analizi kakovosti pridobljenih rezultatov. Opisani so osnovni kriteriji, glede na katere izvedemo optimizacijo opazovanj, kot so natančnost, zanesljivost in stroški izvedbe geodetske izmere. Na koncu so predstavljeni trije primeri optimizacije drugega reda.*

### KLJUČNE BESEDE

*geodetska izmera, geodetska mreža, optimizacija geodetskih opazovanj, matrika kriterija, natančnost*

Klasifikacija prispevka po COBISS-u: 1.02

### ABSTRACT

*The optimization of geodetic measurements is described in this paper. It is a part of the geodetic survey design procedure and gives the answers to important questions, which we would normally deal with at the end, when analysing the quality of the results obtained. The basic criteria for optimization of geodetic measurements are described, such as accuracy, reliability and costs of the geodetic survey, according to which the optimisation is performed. At the end three examples of the second order design of geodetic measurements are presented.*

### KEY WORDS

*geodetic measurements, geodetic network, optimal design of geodetic measurements, criterion matrix, precision*

## 1 UVOD

Ena od značilnosti geodetske izmere so nadštevila opazovanja. Izjema je detajlna izmera, kjer opravimo samo nujno potrebno število opazovanj. V tem primeru neodkriti grobi pogreški opazovanj obremenijo neznanke. V detajlni izmeri zato izvajamo dodatne kontrolne meritve, kot so izmere dolžin med detajlnimi točkami, večkratna izmera določenega števila detajlnih točk, ... V zahtevnejših nalogah geodetske izmere pa vzpostavljamo geodetske mreže. Zato v nadaljevanju obravnavamo geodetsko izmero v okviru geodetske mreže.

Vzpostavitev geodetske mreže obsega načrtovanje, terensko izmero, izravnavo opazovanj in analizo kakovosti pridobljenih rezultatov. V nadaljevanju bomo predstavili optimizacijo geodetske mreže, ki spada med postopke načrtovanja geodetske mreže in nam lahko ponudi odgovore na vprašanja, s katerimi se sicer srečamo šele ob analizi pridobljenih rezultatov. V okviru optimizacije

želimo pridobiti odgovore na več vprašanj, kot na primer: kje so optimalni položaji točk v mreži, kako naj izvedemo izmero geodetske mreže, da bomo pridobili rezultate zahtevane kakovosti, kako mrežo vzpostaviti ob čim manjših stroških in podobno. Osnovni namen postopka optimizacije geodetske mreže je vnaprej določiti optimalen geodetski datum, optimalno geometrijo geodetske mreže, izbiro optimalnih tipov opazovanj in njihovo optimalno razporeditev, izbiro optimalne natančnosti opazovanj ter izboljšati morebiti slabše dele geodetske mreže. To naj bi skupaj vodilo v optimalno izpolnitev vnaprej postavljenih kriterijev kakovosti geodetske mreže, ki naj bi jih izpolnili z minimalnim naporom in minimalnimi stroški. V praksi to pomeni, da nam postopki optimizacije geodetske mreže pomagajo pri odločitvi, kje so optimalni položaji danih točk, kje so optimalni položaji novih točk, s katero mersko opremo opraviti izmero in kako, ter po potrebi, izboljšati kakovost že obstoječe geodetske mreže (Mozetič, 2005). Ponavadi optimizacijo izvedemo pred fizično vzpostavitvijo in izmero geodetske mreže. Osnovne naloge optimizacije geodetske mreže so:

- določitev geodetskega datuma (izbira danih točk),
- določitev položajev novih točk v mreži in določitev tipov opazovanj v geodetski mreži,
- izbira merske tehnike in metode izmere glede na potrebno natančnost opazovanj.

Ko govorimo o optimizaciji opazovanj v geodeziji, praviloma govorimo o optimizaciji geodetskih mrež. Razlog za to je v dejstvu, da je geodetska mreža kompleksen sistem, ki vključuje vse teoretične in praktične probleme, s katerimi se srečamo pri vsakem tipu geodetske izmere. Poleg tega pa je geodetska mreža urejen sistem, katerega obravnava je dokaj pregledna. Vsi postopki, ki veljajo za geodetske mreže, so uporabni vedno, kadar imamo opravka s problemom določitve neznanih količin na osnovi izravnave opazovanj.

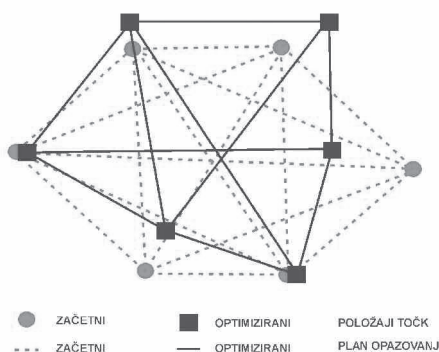
## 2 RAZVRSTITEV PROBLEM OV OPTIMIZACIJE

Znanost sprva ni našla odgovora na vprašanje, kako vse optimizacijske probleme rešiti z enim matematičnim algoritmom, zato si je pomagala z več analitičnimi postopki, ki so reševali posamezne probleme optimizacije drugega za drugim. Pri načrtovanju geodetske mreže moramo najprej določiti položaje točk v mreži, nato določimo primeren tip in natančnost opazovanj glede na instrumentarij, ki ga imamo na voljo, ter pred izravnavo določimo še geodetski datum mreže. Posamezni problemi optimizacije geodetskih mrež so razdeljeni na rede (Ninkov, 1989; Schmitt, 1985a):

- optimizacija ničelnega reda,
- optimizacija prvega reda,
- optimizacija drugega reda in
- optimizacija tretjega reda.

Optimizacija ničelnega reda ni pravi problem optimizacije, saj gre le za izbiro optimalnega geodetskega datuma oziroma koordinatnega sistema. Optimizacija ničelnega reda predstavlja rešitev problema razporeditve danih količin – danih točk v geodetski mreži. Optimizacijo prvega reda obravnavamo kot problem konfiguracije geodetske mreže, kjer gre za optimizacijo položajev

novih točk ter vrste in števila opazovanj. Optimizacijo drugega reda imenujemo tudi problem optimizacije uteži opazovanj. Pri tem gre za določitev optimalne natančnosti opazovanj v izbrani obliki oziroma geometriji ter izbranih tipih opazovanj v geodetski mreži glede na zahtevano natančnost koordinat novih točk. Optimizacija tretjega reda predstavlja izboljšanje natančnosti geodetske mreže, ki smo jo določili v prejšnjih korakih oziroma fazah optimizacije, z dodajanjem ali odvzemanjem novih točk in/ali opazovanj.



Slika 1: Poenostavljena skica namena optimizacije geodetske mreže.

Reševanje problemov optimizacije opazovanj v geodeziji praviloma naslonimo na posredno izravnavo po metodi najmanjših kvadratov. Posredna izravnavo je primerna zato, ker kot rezultat rešitve problema izravnave pridobimo vektor neznank ter matriko kofaktorjev neznank. Matriko kofaktorjev neznank pri posredni izravnavi izračunamo z izrazom:

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} = \left( \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \right)^{-1}, \quad (1)$$

$\mathbf{A}$  matrika koeficientov enačb popravkov,

$\mathbf{P}$  matrika uteži opazovanj in

$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}$  : matrika kofaktorjev neznank.

Problem optimizacije geodetskih opazovanj razvrstimo v rede, kot je predstavljeno v preglednici 1.

| red optimizacije | dani parametri                                                 | iskani parametri                                               |
|------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| ničelni          | $\mathbf{A}$ , $\mathbf{P}$                                    | $\mathbf{x}$ , $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}$ |
| prvi             | $\mathbf{P}$ , $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}$ | $\mathbf{A}$                                                   |
| drugi            | $\mathbf{A}$ , $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}$ | $\mathbf{P}$                                                   |
| tretji           | $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}$                | $\mathbf{A}$ , $\mathbf{P}$ (delno)                            |

Preglednica 1: Razdelitev problemov optimizacije geodetske mreže na rede.

### 3 STRATEGIJE REŠEVANJA PROBLEMOV OPTIMIZACIJE

Cilj optimizacije geodetske mreže je vzpostavitev geodetske mreže, ki bo izpolnjevala zahtevane pogoje natančnosti in zanesljivosti ob čim manjših naporih oziroma stroških. Za dosego cilja optimizacije geodetske mreže imamo na voljo naslednje metode oziroma pristope (Kuang, 1996; Ninkov, 1989):

- metodo s poskušanjem (angl.: "trial and error method") in
  - analitično metodo (angl.: "analytical method"):
1. enociljna metoda (angl.: "single-objective optimization") in
  2. večciljna metoda (angl.: "multi-objective optimization").

#### 3.1 Metoda optimizacije geodetskih mrež s poskušanjem

Ta metoda je, v kombinaciji z izkušnjami, primerna za reševanje problemov optimizacije prvega, drugega in tretjega reda. To metodo lahko razdelimo na naslednje korake:

- 1. korak:** Določimo položaje točk, zahtevano natančnost in zanesljivost načrtovane geodetske mreže.
- 2. korak:** Določimo plan opazovanj na osnovi rekognosciranja terena in razpoložljivega instrumentarija.
- 3. korak:** Izračunamo variančno-kovariančno matriko neznank  $\Sigma_{xx}$  začetne variante geodetske mreže, ki smo jo oblikovali v 1. in 2. koraku. Izračunamo vrednosti kriterijev (meril) kakovosti geodetske mreže (natčnost, zanesljivost).
- 4. korak:** Če so izračunane vrednosti kriterijev kakovosti geodetske mreže podobne tistim, ki smo jih določili v 1. koraku, nadaljujemo z naslednjim korakom. V nasprotnem primeru spremenimo plan opazovanj, kar pomeni, da dodamo ali odstranimo opazovanja in povečamo ali zmanjšamo uteži opazovanj. Vrnemo se na 3. korak.
- 5. korak:** Izračunamo stroške vzpostavitve načrtovane geodetske mreže in premislimo o možnosti vrnitve na 2. korak, da bi ponovili postopek z drugačnim tipom geodetske mreže. Postopek končamo, ko mislimo, da smo dosegli optimalno načrtovano geodetsko mrežo.

Če za reševanje problemov optimizacije geodetskih mrež uporabimo to metodo, položaje točk geodetske mreže, ki so določeni v 1. koraku, redko spreminjamo. Zato se največkrat ta metoda skrči na reševanje problemov optimizacije drugega reda. Slabost omenjene metode je velika količina vloženega dela za končni rezultat, ki pa najbrž nikoli ni povsem optimalen.

#### 3.2 Analitične metode optimizacije geodetskih opazovanj

Analitične metode predstavljajo sodobnejši pristop, saj slonijo na matematičnih algoritmih za reševanje posameznih problemov optimizacije geodetskih opazovanj. Matematični algoritem zagotavlja oblikovanje rešitve optimizacije geodetske mreže, ob upoštevanju zahtevane kakovosti, ki je v matematičnem smislu in glede na izbrane kriterije optimalna (Kuang, 1996). V postopkih optimizacije se kot kriteriji kakovosti geodetske mreže uporabljajo natančnost, zanesljivost in

stroški vzpostavitve geodetske mreže. Če vse kriterije obravnavamo hkrati, govorimo o večciljni analitični metodi, če pa kriterije obravnavamo posamično, govorimo o enociljni analitični metodi. Ciljno funkcijo, ki jo v postopku optimizacije minimiziramo ali maksimiziramo, zapišemo z izrazom (2).

Matematično je optimizacija določanje minimuma ali maksimuma ciljne funkcije pod določenimi omejitvami. V primeru optimizacije geodetske mreže ciljna funkcija predstavlja kakovost geodetske mreže. Za optimalno načrtovano geodetsko mrežo lahko zapišemo naslednjo ciljno funkcijo (Schaffrin, 1985):

$$\alpha_n + \alpha_z + \alpha_s^{-1} = \max \quad (2)$$

kjer imajo oznake naslednje pomene:

$\alpha_n$             natančnost,  
 $\alpha_z$             zanesljivost in  
 $\alpha_s$             stroški.

Izraz (2) predstavlja večciljni model optimizacije geodetskih mrež. Če posameznemu členu ciljne funkcije, podane v izrazu (2), povečamo vrednost do neskončnosti, dobimo tri značilne primere ciljnih funkcij, ki predstavljajo tri enociljne modele optimizacije.

V prvem primeru je optimizirana natančnost, medtem ko moramo preveriti zanesljivost in stroške vzpostavitve geodetske mreže. V drugem primeru je optimizirana zanesljivost, medtem ko moramo preveriti natančnost in stroške vzpostavitve geodetske mreže. V tretjem primeru so optimizirani stroški, medtem ko moramo preveriti natančnost in zanesljivost geodetske mreže.

| 1. primer                     | 2. primer                     | 3. primer                     |
|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| $\alpha_n \rightarrow \infty$ | $\alpha_z \rightarrow \infty$ | $\alpha_s \rightarrow \infty$ |
| natančnost = max              | zanesljivost = max            | stroški = min                 |
| zanesljivost $\geq$ konstanta | natančnost $\geq$ konstanta   | natančnost $\geq$ konstanta   |
| stroški $\leq$ konstanta      | stroški $\leq$ konstanta      | zanesljivost $\geq$ konstanta |

Preglednica 2: Primeri večciljnega modela optimizacije.

Analitično metodo optimizacije geodetske mreže razdelimo na naslednje korake:

- 1. korak:** Določimo ciljne funkcije za kriterije kakovosti geodetske mreže.
- 2. korak:** Določimo kriterije kakovosti geodetske mreže (zahtevana natančnost, zanesljivost in stroški).
- 3. korak:** Določimo začetno geometrijo geodetske mreže (začetni položaji točk in začetni plan opazovanj) in fizične omejitve (datum geodetske mreže in izvedljivost).
- 4. korak:** Določimo matematični model optimizacije na osnovi izbranega optimalnega kriterija kakovosti geodetske mreže.

**5. korak:** Rešimo matematične modele, kjer sta rešitev optimizirani matriki **A** in **P**.

**6. korak:** Analiziramo rezultate. Primerjamo doseženo kakovost z zahtevano kakovostjo geodetske mreže.

**7. korak:** Dokončno oblikujemo plan opazovanj, kar pomeni, da opazovanja, katerih uteži imajo vrednost nič, izločimo iz plana opazovanj, saj ta opazovanja ničesar ne doprinesejo k natančnosti geodetske mreže. Za ostala opazovanja izračunamo njihovo natančnost in izberemo instrumentarij, ki omogoča doseganje take natančnosti opazovanj. Sledi še primerjava kakovosti geodetske mreže, določene na osnovi dokončnega plana opazovanj, z zahtevano kakovostjo geodetske mreže (iz 2. koraka).

### 3.3 Optimalni kriteriji optimizacije geodetskih mrež

Minimiziranje ali maksimiziranje kriterijev kakovosti (Poglavje 3.2) omogoča načrtovanje takšne geodetske mreže, ki bo optimalna v smislu zahtevane natančnosti ocenjevanih količin v geodetski mreži in bo omogočala iskanje grobih pogreškov v opazovanjih ter da bodo stroški vzpostavitve mreže sprejemljivi. Izpolnjevanje omenjenih kriterijev v postopku optimizacije geodetskih mrež povzroča težave, saj so si postavljeni kriteriji v splošnem nasprotujoči. Višja natančnost in večja zanesljivost geodetske mreže vplivata na zvišanje stroškov vzpostavitve geodetske mreže.

V postopku optimizacije geodetske mreže moramo določiti optimalne kriterije, ki opredeljujejo (ovrednotijo) kakovost geodetske mreže. Ti kriteriji morajo biti izpolnjeni za posamezne probleme optimizacije geodetske mreže, zato lahko optimizacijo geodetske mreže opredelimo kot načrtovanje natančne in zanesljive geodetske mreže, ki jo bomo lahko realizirali z razpoložljivimi finančnimi sredstvi.

#### 3.3.1 Optimalni kriteriji natančnosti

Optimalni kriteriji natančnosti so določeni z merili natančnosti geodetske mreže. Popolno informacijo o natančnosti geodetske mreže vsebuje variančno-kovariančna matrika neznank (koordinat)  $\Sigma_{\hat{x}\hat{x}}$ , saj so vsa druga merila natančnosti izpeljana iz nje. Namen, za katerega se vzpostavlja geodetska mreža, je odločilen za določitev zahtevane natančnosti. Kriterije natančnosti delimo na dve skupini:

- skalarne kriterije in
- matriko kriterija  $C_{\hat{x}}$ .

Skalarni kriteriji natančnosti so izpeljani iz variančno-kovariančne matrike neznank. Tipični primeri so N-, A-, E-, S- in D-optimalni kriterij, ki imajo naslednje pomene (Kuang, 1996):

- N-optimalni kriterij: minimiziranje druge norme variančno-kovariančne matrike neznank

$$f = \|\Sigma_{\hat{x}\hat{x}}\|_2 = \min, \quad (3)$$

- A-optimalni kriterij: minimiziranje sledi variančno-kovariančne matrike neznank

$$f = \text{sled}(\Sigma_{\hat{x}\hat{x}}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_h = \min, \quad (4)$$

- E-optimalni kriterij: minimiziranje maksimalne lastne vrednosti variančno-kovariančne matrike neznank

$$f = \lambda_{\max} = \min, \quad (5)$$

- S-optimalni kriterij: minimiziranje razlike maksimalne in minimalne lastne vrednosti variančno-kovariančne matrike neznank

$$f = \lambda_{\max} - \lambda_{\min} = \min, \quad (6)$$

- D-optimalni kriterij: minimiziranje determinante variančno-kovariančne matrike neznank

$$f = \det(\Sigma_{\hat{x}\hat{x}}) = \lambda_1 * \lambda_2 * \dots * \lambda_h = \min. \quad (7)$$

Uporabnost skalarnih kriterijev je omejena, ker globalne skalarne mere natančnosti geodetske mreže ne obravnavajo posameznih vrednosti elementov variančno-kovariančne matrike neznank. Bolj celovit vpogled v natančnost neznank omogoča matrika kriterija  $C_{\hat{x}}$ .

Matrika kriterija  $C_{\hat{x}}$  je umetno ustvarjena variančno-kovariančna matrika koordinatnih neznank v mreži in jo obravnavamo kot idealno za potrebe naloge, ki jo rešujemo. Idealno v tem primeru pomeni, da matrika kriterija  $C_{\hat{x}}$  predstavlja optimalno natančnost neznank v geodetski mreži. Matriko kriterija  $C_{\hat{x}}$  zato v postopkih optimizacije pogosteje uporabljamo kot skalarne kriterije natančnosti. V tem primeru optimalni kriterij natančnosti geodetske mreže lahko zapišemo (Kuang, 1996):

$$\|\Sigma_{\hat{x}\hat{x}} - C_{\hat{x}}\| = \min. \quad (8)$$

Za sestavo ustrezne matrike kriterija  $C_{\hat{x}}$  uporabljamo več različnih postopkov, in sicer (Kuang, 1996):

- Taylor-Karmanov postopek,
- postopek prilagoditve že sestavljene variančno-kovariančne matrike neznank.

Izbrani postopek določitve matrike kriterija  $C_{\hat{x}}$  mora ustrezno predstavljati zahteve, ki jih mora načrtovana geodetske mreža izpolniti in so odvisne od namena njene vzpostavitev.

V izrazu (8) uporabljena matrika kriterija  $C_{\hat{x}}$ , ki jo določimo po katerem koli postopku, je regularna matrika. Uporaba izraza (8) je smiselna le v primeru, če sta variančno-kovariančna matrika neznank  $\Sigma_{\hat{x}\hat{x}}$  in matrika kriterija  $C_{\hat{x}}$  enakega ranga oziroma se nanašata na isti datum geodetske mreže. V kolikor to ne drži, je treba matriko kriterija  $C_{\hat{x}}$  transformirati v datum variančno-kovariančne matrike neznank  $\Sigma_{\hat{x}\hat{x}}$ . To izvedemo s S-transformacijo (Kuang, 1996, Teunissen, 1985):

$$C_{\hat{x}}^i = S_i C_{\hat{x}} S_i^T, \quad (9)$$

kjer je:

$S_i$  matrika S-transformacije v datumu  $i$  in

$C_{\hat{x}}^i$  matrika kriterija  $C_{\hat{x}}$  transformirana v datum  $i$  variančno-kovariančne matrike neznank  $\Sigma_{\hat{x}\hat{x}}$ .

### 3.3.2 Optimalni kriterij zanesljivosti

Zanesljivost geodetske mreže je odvisna od njene geometrije, ki jo tvorita matrika koeficientov enačb popravkov **A** in matrika uteži opazovanj **P**. Problem načrtovanja zanesljivosti geodetske mreže obravnavamo z vidika odkrivanja grobih pogreškov in zmanjševanja vpliva neodkritih grobih pogreškov na neznane parametre (koordinate točk) v geodetski mreži. Oblikovanje kriterijev zanesljivosti geodetske mreže sloni na predpostavkah, da je:

- večina grobih pogreškov odkrita in odstranjena in
- vpliv neodkritih grobih pogreškov na neznane parametre minimalen.

Optimalni kriterij zanesljivosti geodetske mreže lahko zapišemo (Kuang, 1996):

$$\|\mathbf{r}\| = \max, \quad (10)$$

kjer vektor **r** vsebuje vrednosti nadštevilnosti posameznih opazovanj in ga zapišemo:

$$\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)^T. \quad (11)$$

Število nadštevilnosti  $r_i$  je določeno kot diagonalni element matrike nadštevilnosti opazovanj **R**.

### 3.3.3 Optimalni kriterij stroškov

Geodetska mreža mora biti načrtovana tako, da bo zadovoljila zahteve natančnosti in zanesljivosti ob minimalnih stroških njene vzpostavitve. Stroški vzpostavitve geodetske mreže so odvisni od številnih dejavnikov, ki so različni od mreže do mreže. Določitev optimalnega kriterija stroškov temelji na predpostavki, da manjša, kot je utež opazovanja, cenejša je njegova izvedba. Optimalni kriterij stroškov lahko v poenostavljeni obliki zapišemo:

$$\|\mathbf{P}\|_2 = \min, \quad (12)$$

kjer je **P** matrika uteži opazovanj.

## 4 PRIMERI OPTIMIZACIJE DRUGEGA REDA OPAZOVANJ V GEODEZIJI

### 4.1 Optimizacija drugega reda v preprostem primeru trilateracije

Reševanje problemov optimizacije geodetskih mrež predstavljamo v nadaljevanju na enostavnem primeru trilateracijske geodetske mreže (preglednica 3, slika 2). Na izbranem primeru trilateracijske geodetske mreže smo z analitično metodo optimizacije geodetske mreže reševali problem optimizacije drugega reda. Določali smo optimalno natančnost in število opazovanj za izbrane položaje točk in zahtevano natančnost koordinat točk.

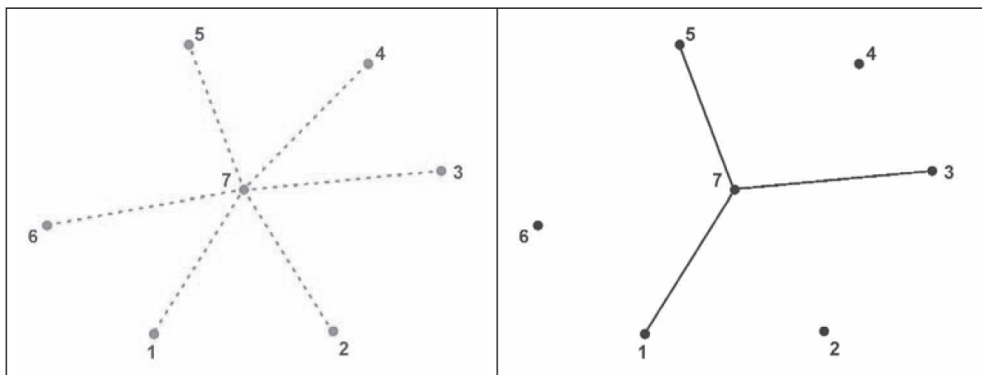
V postopkih optimizacije opazovanj v geodetski mreži imamo v splošnem dve možnosti (Koch, 1985). Prva je t. i. redukcija mreže oziroma postopek z zmanjševanjem števila opazovanj v mreži. V tem primeru v prvem koraku predvidi-mo največje možno število opazovanj med točkami mreže. Rezultat prvega koraka optimizacije je določeno število opazovanj v geodetski mreži, ki pridobijo majhne ali negativne uteži. Ta opazovanja odstranimo iz novega plana opazovanj



in postopek optimizacije ponovimo. Postopek ponavljamo, dokler ne dosežemo spodnje meje natančnosti mreže ali zgornje meje cene vzpostavitve mreže. Drugi postopek optimizacije je t. i. konstrukcija mreže oziroma postopek povečevanja števila opazovanj. Ta postopek je nasproten postopku zmanjševanja števila opazovanj v mreži in predpostavlja postopno dodajanje opazovanj v geodetsko mrežo, do izpolnitve zahtev glede natančnosti ali cene vzpostavitve mreže.

| dane točke         | nova točka         | dolžine |
|--------------------|--------------------|---------|
| $T_1 (1000, 1000)$ | $T_7 (1500, 1800)$ | $d_1$   |
| $T_2 (2000, 1000)$ |                    | $d_2$   |
| $T_3 (2600, 1900)$ |                    | $d_3$   |
| $T_4 (2200, 2500)$ |                    | $d_4$   |
| $T_5 (1200, 2600)$ |                    | $d_5$   |
| $T_6 (400, 1600)$  |                    | $d_6$   |

Preglednica 3: Osnovni podatki o geodetski mreži.



Slika 2: Začetna (levo) in optimizirana (desno) geodetska mreža.

Točke od 1 do 6 so dane. Zahtevana natančnost določitve koordinat nove točke je podana s standardnima odklonoma obeh koordinat nove točke, ki znašata  $\sigma_{x7} = \sigma_{y7} = 0,01$  m. Za tako izbran kriterij natančnosti smo sestavili matriko kriterija  $C_{\hat{x}}$ , ki jo zapišemo:

$$C_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} \sigma_{x7}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{y7}^2 \end{bmatrix} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} q_{x7} & 0 \\ 0 & q_{y7} \end{bmatrix} \quad (13)$$

V tem izrazu je  $\sigma_0^2 = (0,01\text{m})^2$  referenčna varianca in  $q_{x7}$  in  $q_{y7}$  kofaktorja koordinat x in y točke 7. Iz izraza (13) lahko izračunamo standardno elipso pogreškov (zaupanja), katere polosi znašata  $a = 1$  cm in  $b = 1$  cm. Dejansko je elipsa pogreškov krožnica polmera 1 cm.

Matriko koeficientov enačb popravkov **A** sestavimo na osnovi izbranih začetnih položajev točk in vseh možnih opazovanj v geodetski mreži za izbrano metodo izmere. V našem primeru imamo

predvidena opazovanja šestih dolžin, ki povezujejo sedem točk. Izračunamo matriko koeficientov enačb popravkov **A**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,529 & 0,847 \\ 0,530 & 0,848 \\ -0,995 & -0,090 \\ -0,707 & -0,707 \\ 0,351 & -0,936 \\ 0,983 & 0,178 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Izhodiščna enačba matematičnega modela optimizacije je:

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} = \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1}, \quad (15)$$

kjer smo za optimalni kriterij kakovosti geodetske mreže uporabili kriterij natančnosti (matrika kriterija).

Rešitev matematičnega modela, določenega z izrazom (15), je matrika uteži **P**. Matrika koeficientov enačb popravkov **A** in matrika kriterija  $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}$  sta znani. Ker obravnavamo nekorelirana opazovanja, lahko izraz (15) zapišemo (Schmitt, 1985b):

$$\left( \mathbf{A}^T \odot \mathbf{A}^T \right) \mathbf{p} = \mathbf{q}, \quad (16)$$

kjer je:

$\odot$  oznaka za Khatri-Rao produkt matrik,

$\mathbf{p} = \text{vecd}(\mathbf{P})$  in

$$\mathbf{q} = \text{vec}\left(\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1}\right).$$

Rezultat rešitve izraza (16) je vektor uteži **p** oziroma diagonalna matrika uteži **P**:

$$\mathbf{p} = \left( \mathbf{A}^T \odot \mathbf{A}^T \right)^+ \mathbf{q}. \quad (17)$$

Vektor neznank oziroma matrika uteži je:

$$\mathbf{p} = [0,418 \quad 0 \quad 0,791 \quad 0 \quad 0,789 \quad 0]^T \Rightarrow \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,418 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,791 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,789 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Opazovanja, katerih vrednost uteži je enaka nič ali negativna, izločimo iz plana opazovanj (slika 2). Uteži opazovanj računamo z izrazom:

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{d_i}^2}.$$

Glede na izračunane uteži  $p_i$  in vrednost referenčne variance  $\sigma_0^2$  lahko iz tega izraza izračunamo potrebne standardne deviacije posameznih opazovanj:

$$\sigma_{d_1} = 15,5 \text{ mm},$$

$$\sigma_{d_3} = 11,2 \text{ mm},$$

$$\sigma_{d_5} = 12,6 \text{ mm}.$$

Na razpolago imamo razdaljemer z natančnostjo  $\sigma_R = \pm 3\text{mm} + 2\text{ppm}$ , zato izračunamo dosegljive standardne deviacije opazovanj dolžin, ki jih lahko pričakujemo v izmeri:

$$\sigma_{d_1}' = 4,8 \text{ mm},$$

$$\sigma_{d_3}' = 5,2 \text{ mm},$$

$$\sigma_{d_5}' = 4,7 \text{ mm}.$$

Ker so dosegljive standardne deviacije  $\sigma_{d_i}'$  manjše od potrebnih standardnih deviacij  $\sigma_{d_i}$ , z dosegljivimi standardnimi deviacijami  $\sigma_{d_i}'$  izračunamo dejanske uteži opazovanj ter končno matriko uteži:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 4,187 & 0 & 0 \\ 0 & 3,685 & 0 \\ 0 & 0 & 4,510 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Na osnovi optimiziranega plana opazovanj (štiri točke in tri opazovane dolžine) znova izračunamo matriko koeficientov enačb popravkov  $\mathbf{A}$ . Z izrazom (1) in referenčno varianco  $\sigma_0^2 = (0,01\text{m})^2$  izračunamo kovariančno matriko  $\Sigma_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}$ , kjer uporabimo matriko uteži  $\mathbf{P}$  iz izraza (19):

Izračunamo še elemente standardne elipse pogreškov (zaupanja) in dobimo:

$$\Theta = 201^\circ$$

$$a = 0,37 \text{ cm in}$$

$$b = 0,44 \text{ cm.}$$

Z razpoložljivim instrumentom in obliko geodetske mreže lahko zadostimo pogoju, ki je postavljen z matriko kriterija  $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}$ . To pomeni, da je velikost standardne elipse pogreškov, ki smo jo izračunali na osnovi optimiziranega plana opazovanj in natančnosti razpoložljivega razdaljemera, manjša od zahtevane ( $a = 1 \text{ cm}$  in  $b = 1 \text{ cm}$ ).

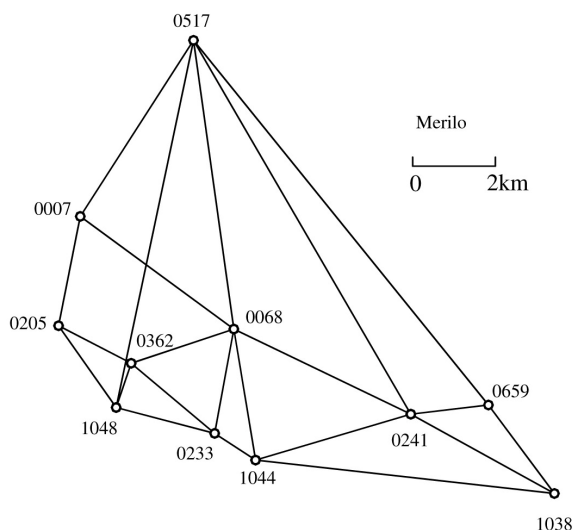
## 4.2 Optimizacija drugega reda geodetske mreže GPS

Naslednja dva primera povzemamo po že objavljenem članku (Stopar, 2001). Geodetsko mrežo želimo vzpostaviti na osnovi opazovanj GPS. Glavna zahteva pri vzpostavitvi geodetske mreže je natančnost koordinat točk mreže, ki naj bi jo dosegli ob izbiri optimalnih baznih vektorjev GPS ter njihove optimalne natančnosti. Dane imamo koordinate točke 0517, določamo koordinate vseh drugih točk v mreži. V prvem koraku optimizacije predvidimo vse možne bazne vektorje med točkami mreže. V iterativnem postopku optimizacije nato pridobimo kot rezultat uteži posameznih baznih vektorjev. Bazne vektorje, ki pridobijo negativne uteži ali uteži enake nič, zopet izločimo iz trenutnega optimalnega plana opazovanj. Postopek ponovimo brez izločenih vektorjev ter pridobimo nove uteži preostalih vektorjev, pridobimo nov optimalen plan opazovanj v mreži. Ta postopek pa ni enostavno ponavljanje izračunov do pridobitve optimalnega plana opazovanj, ampak je treba katerega od že odstranjenih vektorjev v naslednjem koraku tudi vrniti med predvidena opazovanja. Končni plan izvedbe opazovanj v mreži je ob koncu tisti, ki optimalno izpolnjuje zahtevane kriterije, tj. omogoča pridobitev kar se da dobrega približka matrike kriterija. Pri vzpostavitvi optimalnega plana opazovanj v mreži moramo, poleg meril natančnosti, paziti tudi na zanesljivost mreže, kar pomeni, da ne smemo izločiti preveč opazovanj. Zgodi se lahko, da v optimalnem planu opazovanj ostane le nekaj visokonatančnih opazovanj, ki omogočajo pridobitev optimalne matrike kriterija, vendar je lahko na drugi strani vprašljiva zanesljivost takšne geodetske mreže.

Na osnovi optimizacije večjega števila geodetskih mrež lahko zaključimo, da so v geodetski mreži najpomembnejši bazni vektorji, ki povezujejo dane in nove točke. Sledijo jim vektorji, ki povezujejo sosednje točke v mreži, vektorji, ki povezujejo bolj oddaljene točke, praviloma izpadejo iz optimalnega plana opazovanj. V splošnem lahko rečemo, da se rezultati optimizacije dobro skladajo s splošnimi načeli vzpostavitve geodetskih mrež GPS.

Na primeru geodetske mreže GPS, ki naj bi bila homogena izotropna, smo kot merilo natančnosti

koordinat točk izbrali absolutne elipse pogreškov krožne oblike s polmerom 5 mm. Standardne deviacije baznih vektorjev smo določili pod zahtevo, da so natančnosti komponent baznih vektorjev v razmerju . V preglednici 4 so prikazane standardne deviacije optimalnega niza baznih vektorjev in na sliki 3 optimalna shema opazovanj v geodetski mreži GPS. Kot merilo kakovosti rezultata optimizacije uporabimo generalizirano standardno deviacijo, ki znaša  $\overline{\overline{s_x}} = 4,1 \text{ mm}$



Slika 3: Optimalni bazni vektorji v GPS mreži.

| Od   | Do   | $\sigma_b[\text{m}]$ |
|------|------|----------------------|
| 0007 | 0068 | 0,011                |
| 0007 | 0205 | 0,006                |
| 0007 | 0517 | 0,008                |
| 0068 | 0233 | 0,008                |
| 0068 | 0241 | 0,013                |
| 0068 | 0517 | 0,012                |
| 0068 | 0362 | 0,007                |
| 0205 | 0362 | 0,006                |
| 0205 | 1048 | 0,009                |
| 0233 | 0362 | 0,014                |
| 0233 | 1044 | 0,004                |
| 0233 | 1048 | 0,007                |

| Od   | Do   | $\sigma_b[\text{m}]$ |
|------|------|----------------------|
| 0241 | 0517 | 0,016                |
| 0241 | 0659 | 0,006                |
| 0241 | 1038 | 0,014                |
| 0241 | 1044 | 0,009                |
| 0362 | 1048 | 0,004                |
| 0517 | 0659 | 0,013                |
| 0517 | 1038 | 0,012                |
| 0659 | 1038 | 0,006                |
| 1038 | 1044 | 0,012                |

$$\overline{\overline{s_x}} = 4,1 \text{ mm}$$

Preglednica 4: Rezultati optimizacije mreže GPS.

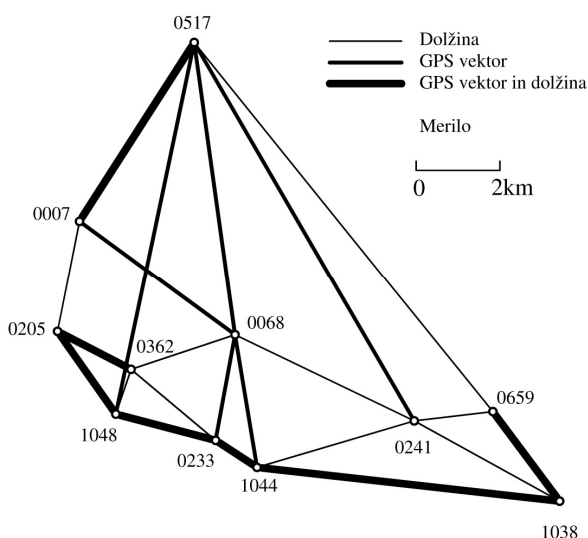
### 4.3 Optimizacija drugega reda kombinirane terestrične in mreže GPS

Sedaj imamo zopet opravka z isto geodetsko mrežo kot v prejšnjem primeru, s to razliko, da želimo v mrežo vključiti tudi opazovanja horizontalnih kotov in dolžin. Postopek optimizacije kombinirane terestrične in mreže GPS začnemo na osnovi plana opazovanj, ki vsebuje opazovanja horizontalnih kotov/smeri in dolžin na vsaki točki proti vsem sosednjim točkam mreže ter vektorjev

GPS med vsemi točkami mreže. Ta postopek optimizacije zahteva določitev optimalnega plana opazovanj z vključitvijo vezi, ki, poleg zahtev glede natančnosti komponent baznih vektorjev, predvidevajo tudi enako natančnost opazovanih smeri na eni točki. Sicer je težko podati zelo podrobne zaključke o načelih vzpostavitve (rezultatih optimizacije) kombinirane terestrične in mreže GPS, vendar pa na osnovi večjega števila optimizacij kombiniranih terestričnih in mrež GPS le lahko podamo nekaj zaključkov.

Trdimo lahko, da so med vsemi opazovanji v mreži najpomembnejši bazni vektorji. To je tudi pričakovano glede na količino datumskih informacij, ki jih vsebujejo (orientacija in merilo). Bazni vektorji z velikimi optimiziranimi utežmi se enakomerno razporejajo po celotni mreži, predvsem pa so pomembni pri povezavah danih in novih točk. Izkazuje se, da so tudi uteži nekaterih dolžin in smeri zelo velike, kar pomeni, da so terestrična opazovanja pomemben tip opazovanj v kombinirani geodetski mreži. Nekoliko presenečajo dokaj velike uteži opazovanih smeri, ki so včasih tudi tako velike, da jih v praksi ne bi mogli realizirati. V splošnem lahko rečemo, da ni pravila, kje se bodo pojavile velike uteži opazovanih smeri: pojavijo se na danih in novih točkah, neodvisno od števila smeri na točki in tudi neodvisno od drugih tipov opazovanj, ki povezujejo točko, na kateri so določene velike uteži opazovanih smeri. Velike uteži dolžin se pojavljajo praviloma za kratke dolžine ter za dolžine, ki povezujejo dane in nove točke. V splošnem pa se uteži opazovanih dolžin pojavljajo dokaj nepredvidljivo. Tako nastopijo velike uteži tudi med točkami, ki so sicer povezane v mrežo z več baznimi vektorji velike natančnosti.

V preglednici 5 so prikazane standardne deviacije optimalnih baznih vektorjev, dolžin in smeri v kombinirani homogeno-izotropni geodetski mreži, kjer naj bi absolutne elipse pogreškov zopet bile krožne oblike s polmerom 5 mm. Standardne deviacije baznih vektorjev smo zopet določili pod zahtevo, da so natančnosti komponent baznih vektorjev v razmerju  $\sigma_\varphi : \sigma_\lambda : \sigma_h = 1 : 1 : 3$ ,



Slika 4: Optimalni bazni GPS-vektorji in dolžine v kombinirani terestrični in GPS-mreži.

ter dodatno zahtevo, da so uteži vseh opazovanih smeri na eni točki enake.

Kot merilo kakovosti rezultata optimizacije zopet uporabimo generalizirano standardno deviacijo, ki znaša sedaj  $\bar{s}_x = 4,2\text{mm}$ . Na sliki 4 prikazujemo optimalen plan opazovanj v kombinirani geodetski mreži.

| Od točke | Do točke | $\sigma_{\text{GPS}}$ [m] |
|----------|----------|---------------------------|
| 0007     | 0068     | 0,013                     |
| 0007     | 0517     | 0,016                     |
| 0068     | 0233     | 0,009                     |
| 0068     | 0517     | 0,011                     |
| 0068     | 1044     | 0,015                     |
| 0205     | 0362     | 0,011                     |
| 0205     | 1048     | 0,015                     |
| 0233     | 1044     | 0,007                     |
| 0233     | 1048     | 0,011                     |
| 0241     | 0517     | 0,014                     |
| 0241     | 1038     | 0,012                     |
| 0517     | 1048     | 0,012                     |
| 0659     | 1038     | 0,010                     |
| 1038     | 1044     | 0,014                     |

| Od točke | Do točke | $\sigma_d$ [m] |
|----------|----------|----------------|
| 0007     | 0205     | 0,007          |
| 0007     | 0362     | 0,015          |
| 0007     | 0517     | 0,010          |
| 0068     | 0241     | 0,013          |
| 0068     | 0362     | 0,010          |
| 0205     | 0362     | 0,009          |
| 0205     | 1048     | 0,009          |
| 0233     | 0362     | 0,015          |
| 0233     | 1044     | 0,005          |
| 0233     | 1048     | 0,009          |
| 0241     | 0659     | 0,005          |
| 0241     | 1044     | 0,010          |
| 0362     | 1048     | 0,004          |
| 0517     | 0659     | 0,012          |
| 0659     | 1038     | 0,008          |
| 1038     | 1044     | 0,013          |

| Točka | $\sigma_s$ ["] |
|-------|----------------|
| 0007  | 0,5            |
| 0068  | 1,1            |
| 0205  | 1,1            |
| 0233  | 1,5            |
| 0241  | 0,9            |
| 0362  | 0,8            |
| 0517  | 0,8            |
| 0659  | 0,7            |
| 1038  | 1,0            |
| 1044  | 0,8            |
| 1048  | 1,2            |

$$\bar{s}_x = 4,2 \text{ mm}$$

Preglednica 5: Rezultati optimizacije kombinirane terestrične in GPS mreže.

## ZAKLJUČEK

Optimizacija geodetskih mrež je orodje, ki geodetu, skupaj z njegovimi praktičnimi izkušnjami, olajša načrtovanje geodetske izmere. S postopkom optimizacije lahko že v pripravi na terensko izmero pridobimo odgovore na vprašanja, kje so optimalni položaji točk in kako naj izvedemo opazovanja v geodetski mreži, da bomo zadostili zahtevani kakovosti rezultatov ob čim manjših stroških izvedbe izmere. S problemom optimizacije drugega reda, kjer gre za določitev optimalne natančnosti opazovanj in njihovega števila za izbrano obliko geodetske mreže in zahtevano natančnost koordinat točk, se geodet največkrat sreča pri načrtovanju geodetske mreže. Predstavljena primera optimizacije geodetskih mrež na enostaven način prikazujeta smisel postopka optimizacije, predvsem v kontekstu izbire primernege merskega instrumenta ter vrste in števila opazovanj, ki jih je treba opraviti. Izbrani instrument ter število in vrsta opazovanj v geodetski mreži tudi znatno vplivajo na ceno vzpostavitve geodetske mreže oziroma na ceno izvedbe geodetske izmere.

Poudariti pa moramo, da postopek optimizacije geodetskih mrež ni čudežni postopek, ki bi zagotavljal, da bomo načrtovane rezultate (želeno kakovost koordinat točk) tudi dosegli v realnosti. V postopku praktične izvedbe geodetske izmere nastopajo namreč tudi vplivi, ki jih v postopku optimizacije geodetskih mrež, žal, ne moremo predvideti.

**Literatura in viri:**

Koch, K.R. (1985). *First Order Design: Optimization of the Configuration of a Network by Introducing Small Position Changes*. V: Grafarend, E.W., Sanso, F. (ur.), *Optimization and Design of Geodetic Network* (str. 56–73). Berlin: Springer Verlag.

Kuang, S. (1996). *Geodetic Network Analysis and Optimal Design: Concepts and Applications*. Chelsea: Ann Arbor Press, Inc.

Mozetič, B. (2005). *Uporabnost izbranih metod deformacijske analize na praktičnih primerih geodetskih mrež*. Magistrsko delo. Ljubljana: Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.

Ninkov, T. (1989). *Optimizacija projektovanja geodetskih mreža*. Beograd: Građevinski fakultet.

Schaffrin, B. (1985). *Aspects of Network Design*. V: Grafarend, E.W., Sanso, F. (ur.), *Optimization and Design of Geodetic Network* (str. 548–597). Berlin: Springer Verlag.

Schmitt, G. (1985a). *A Review of Network Designs, Criteria, Risk Functions and Design Ordering*. V: Grafarend, E.W., Sanso, F. (ur.), *Optimization and Design of Geodetic Network* (str. 6–10). Berlin: Springer Verlag.

Schmitt, G. (1985b). *Second Order Design*. V: Grafarend, E.W., Sanso, F. (ur.), *Optimization and Design of Geodetic Network* (str. 74–121). Berlin: Springer Verlag.

Stopar, B. (2001). *Second order design of horizontal GPS net*. Survey review, Vol. 36, no. 279, 44–53.

Teunissen, P.J.G. (1985). *Zero Order Design: Generalized Inverses, Adjustment, the Datum Problem and S-Transformation*. V: Grafarend, E.W., Sanso, F. (ur.), *Optimization and Design of Geodetic Network* (str. 11–55). Berlin: Springer Verlag.

**Prispelo v objavo: 20. marec 2008**

**Sprejeto: 2. junij 2008**

**mag. Blaž Mozetič, univ. dipl. inž. geod.**

Geodetska uprava Republike Slovenije, Zemljemerska 12, SI-1000 Ljubljana

E-pošta: blaz.mozetic@gov.si

**izr. prof. dr. Bojan Stopar**

Univerza v Ljubljani

Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Jamova 2, SI-1000 Ljubljana

E-pošta: bojan.stopar@fgg.uni-lj.si