

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 25 (1997/1998)

Številka 5

Strani 258-260

Jože Grasselli:

NESREČNO ŠTEVILO 13 JE SREČNO

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/25/1350-Grasselli.pdf>

© 1998 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2009 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

NESREČNO ŠTEVILO 13 JE SREČNO

Ljudski glas pravi, da je število 13 nesrečno. Matematika pozna srečna števila in 13 je med njimi.

Poljski matematik Stanislav Ulam je živel v letih 1909 do 1984. Dolgo je deloval v Ameriki. Tam je izšla leta 1960 njegova "Zbirka matematičnih problemov". V tej knjigi je prvič govor o srečnih številih. Pozneje so se z njimi ukvarjali še drugi.

Postopek, po katerem je Ulam opredelil srečna števila, imenujemo Ulamovo rešeto. Ponazorimo na zgledu, kako to rešeto seje.

Določiti hočemo srečna števila do 50. Zapišemo vsa naravna števila od 1 do 50, podčrtamo 1 in prečrtamo vsako drugo število

$$\underline{1}, \cancel{2}, \underline{3}, \cancel{4}, \underline{5}, \cancel{6}, 7, \dots, \cancel{46}, 47, \cancel{48}, 49, \cancel{50}.$$

Ko izpustimo prečrtana števila, dobimo zaporedje

$$\underline{1}, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, \\ 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49.$$

Prvo nepodčrtano število v tem zaporedju je 3; podčrtajmo ga in prečrtajmo vsako **tretje** število (ker smo podčrtali število 3)

$$\underline{1}, \underline{3}, \cancel{5}, 7, 9, \cancel{11}, 13, 15, \cancel{17}, 19, 21, \cancel{23}, 25, 27, \cancel{29}, 31, \\ 33, \cancel{35}, 37, 39, \cancel{41}, 43, 45, \cancel{47}, 49. \quad (*)$$

Odvržemo prečrtana števila in pridemo do zaporedja

$$\underline{1}, \underline{3}, 7, 9, 13, 15, 19, 21, 25, 27, 31, 33, 37, 39, 43, 45, 49. \quad (1)$$

Število 7 je v zaporedju (1) prvo, ki je nepodčrtano. Podčrtamo ga in v (1) prečrtamo vsako sedmo število

$$\underline{1}, \underline{3}, \underline{7}, 9, 13, 15, \cancel{19}, 21, 25, 27, 31, 33, 37, \cancel{39}, 43, 45, 49.$$

Ko izpustimo prečrtana števila, imamo zaporedje

$$\underline{1}, \underline{3}, \underline{7}, 9, 13, 15, 21, 25, 27, 31, 33, 37, 43, 45, 49. \quad (2)$$

Sedaj v (2) podčrtamo 9 in prečrtamo vsako deveto število

$$\underline{1}, \underline{3}, \underline{7}, \underline{9}, 13, 15, 21, 25, \cancel{27}, 31, 33, 37, 43, 45, 49.$$

Izpustimo prečrtano število 27 in smo pri zaporedju

$$1, \underline{3}, \underline{7}, \underline{9}, 13, 15, 21, 25, 31, 33, 37, 43, 45, 49. \quad (3)$$

V (3) podčrtamo 13 in prečrtamo vsako trinajsto število

$$1, \underline{3}, \underline{7}, \underline{9}, \underline{13}, 15, 21, 25, 31, 33, 37, 43, \del{45}, 49.$$

Treba je torej 45 odvreči in ostane zaporedje

$$1, \underline{3}, \underline{7}, \underline{9}, \underline{13}, 15, 21, 25, 31, 33, 37, 43, 49. \quad (4)$$

Ker je v (4) prvo nepodčrtano število 15, bi ga v naslednjem koraku podčrtali in iz (4) izpustili vsako petnajsto število. Toda v (4) je le trinajst členov, zato je sejanje končano. Števila, ki so imela "srečo", da niso bila prečrtana in odvržena, so srečna. Srečna števila do 50 so tako podana z zaporedjem (4), 13 je eno od njih.

Iz napravljenega zglada je jasno, kako presejemo srečna števila do naravnega števila a . Za $a = 100$ najdemo, da so srečna števila do 100

$$1, 3, 7, 9, 13, 15, 21, 25, 31, 33, 37, 43, 49, 51, 63, 67, \\ 69, 73, 75, 79, 87, 93, 99. \quad (5)$$

Mislimo si sedaj, da izhajamo iz zaporedja vseh naravnih števil

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, n+1, \dots$$

in ga presejemo z Ulamovim rešetom. Števila, ki ostanejo, so srečna; neskončno jih je, prvih triindvajset podaja zaporedje (5).

Ob opazovanju srečnih števil se porajajo raznovrstna vprašanja.

Iz (5) vidimo, da so med srečnimi števili do 100 štirje kvadrati $1 = 1^2$, $9 = 3^2$, $25 = 5^2$, $49 = 7^2$. Ali je v zaporedju vseh srečnih števil neskončno kvadratov?

Praštevilo je srečno ali pa tudi ne. Po (5) je npr. praštevilo 3 srečno, praštevilo 5 pa ne. Do 100 je 25 praštevil, med njimi so srečna 3, 7, 13, 31, 37, 43, 67, 73, 79, kot pove (5). Ali je neskončno praštevil, ki so srečna?

Srečno število je zmeraj liho, saj Ulamovo rešeto vsa soda števila odvrže. Včasih sta zaporedni lihi števili obe srečni. Iz (5) preberemo, da so med srečnimi števili do 100 pari te vrste

$$1, 3; 7, 9; 13, 15; 31, 33; 49, 51; 67, 69; 73, 75.$$

Takšnim parom pravimo srečni dvojčki. Ali je neskončno srečnih dvojčkov?

Začetna soda števila se dajo izraziti z vsoto dveh srečnih števil. Tako je

$$\begin{array}{ll} 2 = 1 + 1 & 12 = 3 + 9 \\ 4 = 1 + 3 & 14 = 1 + 13 \\ 6 = 3 + 3 & 16 = 3 + 13 \\ 8 = 1 + 7 & 18 = 3 + 15 \\ 10 = 3 + 7 & 20 = 7 + 13 \end{array}$$

(Včasih je takih izrazitev več. Npr. $16 = 1 + 15 = 3 + 13 = 7 + 9$.) Ali je vsako sodo naravno število vsota dveh srečnih števil?

Na nobeno od zgornjih vprašanj odgovor ni znan.

Do 100 je 25 praštevil, srečnih števil je 23; do 200 je praštevil 46, srečnih števil 39. Naj pomeni $A(x)$ število praštevil, $B(x)$ število srečnih števil do naravnega števila x . Dognali so, da gre kvocient $\frac{B(x)}{A(x)}$ proti 1, ko rase x čez vse meje. Pri velikem x je torej do x približno toliko srečnih števil, kot je do x praštevil.

Oglejmo si sedaj naravna števila oblike $n = 3t + 2$, $t = 0, 1, 2, \dots$. Če je t sod, je n sod in odpade pri prvem sejanju. Če je t lih, je $t = 2s + 1$, $s = 0, 1, 2, \dots$, in $n = 6s + 5$; iz (*) se vidi, da so ta števila odvržena pri drugem sejanju. To pomeni, da število oblike $3t + 2$, $t = 0, 1, 2, \dots$, nikoli ni srečno. Srečna so tako lahko le števila, ki so deljiva s 3 ali pa puščajo pri delitvi s 3 ostanek 1. Seveda je tudi med temi mnogo takih, ki niso srečna.

Literatura

S. Ulam, *A Collection of Mathematical Problems*. 1960.

Članek M. Gardnerja v *Math. Intell.* **19** (1997), 2, str. 26–29.

Naloga

Poišči srečna števila a) do 200, b) do 500, c) do 1000.

Jože Grasselli