



Metoda postopnega približevanja

The Method of Gradual Approximation

Mojca Suban

Zavod RS za šolstvo

Σ Povzetek

V članku je predstavljena ena izmed metod za reševanje besedilnih in problemskih nalog – metoda postopnega približevanja. Osnovna ideja in princip metode sta ponazorjena na primerih nalog in z njihovim reševanjem. Pri posameznih nalogah so dodani primeri reševanja nalog različno uspešnih učencev od 6. do 9. razreda skupaj z njihovimi izdelki. Vključene so tudi ugotovitve, ki so jih zapisali učitelji po izvedenih urah, v katerih so učenci reševali naloge z uporabo obravnavane metode.

Ključne besede: metoda postopnega približevanja, besedilna naloga, problemska naloga

Σ Abstract

The paper presents one of the methods for solving textual and problem tasks - the method of gradual approximation. The basic idea and principle of this method are illustrated through examples of tasks and their solving. Individual tasks are illustrated by examples of pupils from the 6th to 9th grade of different levels of success and by their products. Included are also the findings of teachers written after the execution of lessons where students solved tasks using the method of gradual approximation.

Keywords: the method of gradual approximation, text task, problem task

α Predstavitev metode postopnega približevanja

Metoda postopnega približevanja je sestavljena iz niza poskusov, s katerimi pridemo do rešitve zastavljenega problema. V vsakem od poskusov se poskuša popraviti napaka, ki je nastala v prejšnjem poskusu. Pri tem se napaka navadno zmanjšuje in pri vsakem naslednjem poskusu smo bliže pravilni rešitvi. Metoda je najbolj nazorno prikazana s preglednico, kamor se vpisujejo posamezni poskusi.

Metoda je preprosta in je včasih zanemarljena, vendar je primerna za starostno stopnjo, ko učenci še ne obvladajo formalnega reševanja enačb (pred 9. razredom). Primer-na je kot ena izmed začetnih metod reševanja besedilnih in problemskih nalog, pozneje pa se učenec postopoma seznani tudi z drugimi učinkovitimi metodami.

Naloga 1 - Razporejanje v sobe

Na izlet je odšlo skupaj 32 deklic in dečkov. Deklice so bile razporejene v dvoposteljne, dečki pa v triposteljne sobe. Za namestitev deklic je bila potrebna ena soba več kot za namestitev dečkov. Koliko deklic in koliko dečkov je bilo na izletu?

Rešitev: Na izletu je bilo 18 dečkov in 14 deklic.

Reševanje s preglednico

Glede na podatke število deških sob ne more biti večje od 10. To število tudi ne more biti liho, saj bi bilo v tem primeru tudi število fantov liho. Od tod bi bilo tudi število deklic liho (kot razlika sodega števila in lihega), kar pa bi pomenilo, da deklic ni mogoče namestiti v dvoposteljne sobe. Torej je število deških

sob 2, 4, 6, 8 ali 10. Za stolpce v preglednici izberemo število deških sob, število dekliških sob, število dečkov, število deklic in skupno število deklic in dečkov.

Število deških sob	Število dekliških sob	Število dečkov	Število deklic	Skupno število deklic in dečkov
2	3	6	6	12
4	5	12	10	22
6	7	18	14	32
8	9	24	18	42
10	11	30	22	52

[Preglednica 1] Reševanje naloge Razporejanje v sobe s preglednico

Zahtevam ustreza tretji poskus. Na izletu je bilo 18 dečkov in 14 deklic.

β Reševanje naloge Kroglice

Naloga 2 - Kroglice

V vreči so male in velike kroglice. Mala kroglica tehta 5 g, velika pa 11 g. Koliko malih in koliko velikih kroglic je lahko v vreči, kjer tehtajo vse kroglice skupaj 153 g?

Rešitev: Naloga ima tri različne rešitve: V vreči je lahko 13 velikih in 2 mali kroglici, 3 velike in 24 malih kroglic ali 8 velikih in 13 malih kroglic.

Primeri reševanja učencev

Učenci so reševali nalogo s preglednico. Praviloma so v stolpce zapisovali: število manjših kroglic, število večjih kroglic, skupno maso majhnih kroglic, skupno maso večjih kroglic

in skupno maso vseh kroglic. Nekaj primerov izdelkov učencev je bilo tudi takih, da zasledimo drugačen vrstni red stolpcev. V enem primeru pa zasledimo še en stolpec *skupno število kroglic*, ki je dodan na koncu. Večji izziv predstavlja zapisovanje odgovora oziroma ugotovitve, ki sledi iz zapisov v preglednici.

<i>š. kroglic m.</i>	<i>š. kroglic v.</i>	<i>š. g m.k.</i>	<i>š. g v.k.</i>	<i>š. g skupaj</i>
2	5	10	55	65
3	8	15	88	103
7	11	35	121	156
8	7	40	77	117
8	9	40	99	139
10	7	50	77	127
24	3	120	33	153

[Slika 1] Izdelek učenca 7. razreda ob reševanje naloge Kroglice

1. primer reševanja

Nalogo je reševal učenec 7. razreda pri dodatnem pouku iz matematike. Njegov izdelek prikazuje precej pogosto napako, da ob nesistematičnem zapisovanju učenci spregledajo več rešitev. Želeli bi si tudi, da učenec zapiše svoje ugotovitve in odgovor na zastavljeno vprašanje, ne da samo konča z zapisi v preglednici. Sklepamo lahko, da je zapise v preglednici končal, ker je prišel do prve rešitve, predstavljene v zadnji vrstici preglednice.

Učitelj je kot prednosti te metode je izpostavil, da z njeno uporabo ne izpustimo katere od rešitev, da je zapisovanje različnih možnosti v preglednici jasno in sistematično, z uporabo vzorca pa lahko pridemo do rešitve hitreje.

2. primer reševanja

Učenka 6. razreda je na koncu zapisala, kaj je s preglednico ugotovila oziroma kaj je rešitev naloge.

<i>š. kroglic po 5 g</i>	<i>š. kroglic po 10 g</i>	<i>skupna masa majhnih kroglic</i>	<i>skupna masa velikih kroglic</i>	<i>skupna masa vseh kroglic</i>
20	11	100 g	121 g	221 g
19	10	95 g	110 g	205 g
18	9	90 g	99 g	189 g
17	8	85 g	88 g	173 g
16	7	80 g	77 g	157 g
17	6	85 g	66 g	151 g
2	13	10 g	143 g	153 g
12	3	60 g	33 g	93 g
60	3	300 g	33 g	333 g
24	3	120 g	33 g	153 g
13	8	65 g	88 g	153 g
01.: v meš. je 13 velikih in 2 mali kroglice.				
02.: v meš. je 24 malih in 3 velike kroglice.				
03.: v meš. je 13 malih in 8 velikih kroglic.				

[Slika 2] Izdelek učenke 6. razreda ob reševanje naloge Kroglice

Št. malih kr.	Teža malih kr.	Št. velikih kr.	Teža velikih kr.	Skupaj
6	30 g	5	55 g	85 g
5	25 g	6	66 g	91 g
6	30 g	7	77 g	107 g
7	35 g	6	66 g	101 g
8	40 g	7	77 g	117 g
7	35 g	8	88 g	123 g
9	45 g	8	88 g	153 g

V vreči je 9 malih kroglic in 8 velikih kroglic.

[Slika 3] Izdelek učenke 8. razreda ob reševanje naloge Kroglice

3. primer reševanja

Učenka 8. razreda je reševala nalogo s preglednico, prehitro pa se je zadovoljila z rešitvijo, ki ni prava in ne edina. Učenka je napačno seštel 45 in 88, kar je 133, in ne 153.

Učiteljica je dodala, da so nalogo reševali tisti učenci, ki so predčasno rešili naloge pri urah poglavja Pitagorov izrek. Opazila je, da so učenci pri samostojnem reševanju motivirani za delo in da so jim naloge, ki jih rešujejo po predlagani metodi, izziv.

4. primer reševanja

Učenci 3. nivoja v 8. razredu so si metodo reševanja naloge izbrali sami. Njihova učiteljica je povzela njihove strategije reševanja:

Od 10 učencev sta 2 učenca poiskala vse tri možnosti. Zapisala sta le rešitve, reševanje je potekalo v njunih glavah.

Drugi so poiskali samo 1 možnost. 4 učenci so dobili rešitev 24 malih in 3 velike, 2 učenca 13 velikih in 2 mali in 1 učenec 13 velikih in 2 mali.

Ti učenci so prišli do rešitev s poskušanjem in z uporabo pravila za deljivosti s številom 5. Na svoj način so uporabili metodo postopnega približevanja. Ker je ne poznajo, ni bilo korektnega zapisa, ampak le pomožni računi in tudi le 2 učenca sta poiskala vse možnosti. To metodo bodo spoznali v 9. razredu pri sklopu Enačbe.

male	velike	
1. 24 · 5 g	+ 3 · 11	= 153 g 1. možnost · 24 malih, 3 velike
2. 2 · 5 g	+ 13 · 11	= 153 g 2. možnost · 2 malih, 13 velikih
3. 13 · 5 g	+ 8 · 11 g	= 153 g 3. možnost · 13 malih, 8 velikih

[Slika 4] Izdelek učenca 8. razreda tretjega nivoja ob reševanje naloge Kroglice

Priložila je tudi nekaj izdelkov, kjer so zapisi na papirju skopi, v glavah pa se je do-gajalo veliko več. Postavlja se izziv za bolj-kakovostne opise reševalnih poti.

Primerjava reševanja naloge v 6. in 8. raz-redu

Navajamo ugotovitve učiteljice, ki je izvedla primerjalno analizo reševanja naloge v 6. in 8. razredu:

Metodo reševanja besedilnih in problems-kih nalog s postopnim približevanjem sem preizkusila v oddelku 6. razreda in v 8. raz-redu tretje nivojske skupine.

Učencem sem razdelila listke, na katerih sta bila po dva od danih petih primerov te me-tode reševanja. Prosila sem jih, da poskušajo naloge rešiti sami. Zanimalo me je namreč, na kakšen način se bodo lotili reševanja.

V oddelku 6. razreda so si iznajdljivejši učenci pomagali z risanjem, s poskušanjem, vendar je le sedmim od 26 uspelo razreši-ti po en primer. Imeli so kar dosti težav. V množici števil, pogojev in podatkov se niso znali organizirati. Tako smo zgledni primer te metode rešili skupaj. Z natančnim bran-jem in upoštevanjem pogojev smo oblikova-li preglednico, s katero so nato učenci lažje ugotavljali smiselnost rešitev.

Naslednje primere so potem učenci reše-vali sami. Nekateri so z natančnim branjem takoj prepoznali spremenljivke in pogoje ter z oblikovanjem preglednice niso ime-li težav, nekateri učenci pa so se v množici spremenljivk izgubili. Težave so imeli že pri oblikovanju preglednice. Z dodatno razlago in pojasnili so oblikovali preglednico in s sis-tematičnim poskušanjem prišli do rešitve.

Večini učencem je bila metoda postopne-ga približevanja smiselna, sistematična in pregledna. Motilo jih je le-to, da je zamud-

na. Uspešnejši učenci pa so seveda to trditev argumentirali s tem, naj malo premislijo o rešitvi in naj ne delajo nepotrebnih prime-rov. Učenci so bili v večini zadovoljni, ker so dane primere rešili. Sama pa mislim, da je za to starostno stopnjo metoda postopnega približevanja zelo primerna.

V oddelku 8. razreda tretje nivojske skupine učenci niso imeli težav z razume-vanjem besedilnih nalog. Večina učencev je tudi sama prišla do rešitev danih prime-rov. Predvsem so si pomagali z risanjem, s premislekom in poskušanjem. Uporabljali so tudi metodo postopnega približevanja, vendar pa je bil njen zapis zelo nepregleden. Nekateri učenci, ki obiskujejo dodatni pouk, pa so se naloge lotili z oblikovanjem enačbe.

Tako smo skupaj naredili zgledni primer, kjer sem jih opozorila na oblikovanje pregled-nice, v kateri bo njihova pot reševanja veliko preglednejša in bolj sistematično zapisana.

Večina učencev ni imela težav z obliko-vanjem preglednice za dane primere, vseh jim je bila urejenost zapisa postopka reševan-ja. Večina pa jih je bila mnenja, da je ta metoda preveč zamudna, tako da smo dva primera rešili tudi z oblikovanjem enačbe, kar pa je bilo nekaterim še preveč zahtevno.

Pri teh dveh urah je bilo razvidno, da učenci 6. razreda ne poznajo veliko strategij, metod reševanja problemskih nalog. Poma-gajo si z risanjem, ugibanjem, poskušanjem, vendar se večina učencev izgubi v množici podatkov in se ne zna orientirat, v kateri smeri smo bliže rešitvi.

V tretji nivojski skupini osmega razreda je bilo drugače. Večina učencev je primere reševala z velikim veseljem. Težava je bila res le v organizaciji in preglednosti postop-ka reševanja. Tudi metoda postopnega pri-bliževanja se jim je zdela smiselna, pregled-na, le malo zamudna.

Zanimivo je, da so uspešnejši učenci svetovali tistim, ki se jim zdi metoda zamudna, naj 'malo premislijo o rešitvi in ne delajo nepotrebnih primerov'. Med izdelki res ni zaslediti primera, kjer bi učenec s premislekom že na začetku omejil število kroglic, npr. manjših ne more biti več kot 30, večjih pa ne več kot 13.

γ Reševanje naloge Cevi

Naloga 3 - Cevi

Za gradnjo 270 m vodovodnega omrežja so uporabili 82 ravnih cevi. Na voljo so bile 3 metrske in 5 metrske cevi. Koliko krajših in koliko daljših cevi so uporabili (brez rezanja)?

Rešitev: Uporabili so 70 cevi z dolžino 3 metre in 12 cevi z dolžino 5 metrov.

Primer reševanja

Navajamo primer reševanja učenca, ki je zanimiv zato, ker je jasno zapisal, s katero strategijo je izboljševal svoje poskuse. Sklepali bi lahko, da se najverjetneje pri pouku matematike namenja vidiku sporočanja in sistematičnega zapisovanja postopka reševanja (ne zgolj izračuni) nekaj časa in pozornosti. Nekoliko so nerodni zapisi v preglednici, saj bi bilo pregledneje, če bi iz prvega stolpca nastala dva stolpca: število 3-metrskih cevi in *skupna dolžina 3-metrskih cevi*. Podobno tudi v drugem stolpcu.

Za vsak odvzem 5-metrške cevi in za vsako dodano 3-metrsko cev se skupna dolžina skrajša za 2 m.

3-metrške cevi	5-metrške cevi	skupaj	
65 : 195 m	17 : 85 m	280 m	X
75 : 225 m	7 : 35 m	260 m	X
66 : 198 m	16 : 80 m	278 m	X
68 : 204 m	14 : 70 m	274 m	X
70 : 210 m	12 : 60 m	270 m	✓

[Preglednica 2] Reševanje naloge Cevi s preglednico

Pri skupni dolžini 280 m je skupna dolžina predolga za 10 m. Zato dodamo pet 3-metrskih cevi in odvezamemo pet 5-metrskih cevi, da se bo skupna dolžina skrajšala za 10 m (ker je $5 \cdot 2 \text{ m} = 10 \text{ m}$).

Odgovor: Za skupno dolžino 270 m vodovodnega omrežja porabimo skupno 82 cevi, in sicer 70 z dolžino 3 m in 12 z dolžino 5 m.

δ Reševanje naloge Gosi in mačke

Naloga 4 – Gosi in mačke

Na dvorišču so gosi in mačke. Vse skupaj imajo 36 glav in 100 nog. Koliko je gosi in koliko mačk?

Rešitev: Na dvorišču je 22 gosi in 14 mačk.

Nalogo so učenci reševali z metodo postopnega približevanja. Upoštevali so, da imajo gosi po 2 nogi, mačke pa po 4 ter postopoma iskali rešitve z zmanjševanjem oziroma povečevanjem števila gosi ali mačk. Ob tem je treba upoštevati skupno število glav.

Reševanje v preglednici:

število gosi	število mačk	število		skupaj glav	skupaj nog	
		nog gosi	nog mačk			
10	26	20	104	36	124	//
16	20	32	80	36	112	//
17	19	34	76	36	110	//
18	18	36	72	36	108	//
20	16	40	64	36	104	//
22	14	44	56	36	100	✓

[Preglednica 3] Reševanje naloge Gosi in mačke s preglednico

Odgovor: Na dvorišču je 22 gosi in 14 mačk.

Naloge, kjer se uporablja metoda postopnega približevanja, se pojavljajo že v učbenikih od 4. razreda dalje. Ne da bi posebej razlagali to metodo, jo učenci hitro usvojijo in tudi uporabljajo. Enako metodo se dostikrat uporablja tudi pri nekaterih nalogah pri logiki.

ε Za konec

Predstavljeni so izdelki in reševanja različno uspešnih učencev, ki so jih reševali od 6. do 9. razreda.

Pristopi k obravnavi metode v razredu so bili raznoliki:

- V nekaterih primerih so učitelji metodo najprej razložili (na rešenem zgledu naloge z namestitvijo v sobe) in potem spodbudili učence k njeni uporabi pri nadaljnjih nalogah. Od tu naprej zasledimo, da so v nadaljevanju učenci reševali naloge samostojno na učnih listih ali pa je učenec s podporo sošolcev nalogo reševal pri tabli.
- V nekaterih primerih so učitelji opozorili, naj si učenci pred samostojnim reševanjem nalog ogledajo rešen zgled na listu z nalogami, in metode niso razlagali frontalno.
- Nekaj primerov je bilo takih, da učitelji učencev niso posebej usmerili v konkretno metodo reševanja, ampak so jim pustili prosto pot. Ko so učenci nalogo rešili,

η Vir

1. Zdravko Kurnik: Posebne metode reševanja matematiških problema (2010). Element Zagreb.

so si skupaj ogledali še metodo postopnega približevanja (npr. za izhodišče so vzeli rešitev učenca, ki je to metodo samostojno uporabil).

Kot pripomoček so učenci v nekaterih primerih uporabljali žepno računalno, kar je bilo posebej poudarjeno.

Dodatni nalogi za uporabo metode postopnega približevanja

Naloga 5 - Palčke

Pri uri geometrije so učenci iz palčk enake dolžine sestavljali trikotnike in kvadrate. Uporabili so 300 palčk in sestavili 92 likov. Koliko trikotnikov in koliko kvadratov so sestavili učenci?

Rešitev: Sestavili so 68 trikotnikov in 24 kvadratov.

Naloga 6 – Zmnožek treh števil

Zmnožek treh števil je 270. Katera števila so to, če je zmnožek prvega in tretjega števila enak 30, zmnožek drugega in tretjega pa 135?

Rešitev: To so števila 2, 9 in 15.

Dopis uredništva:

Zahvaljujemo se učiteljem Tomažu Pavlakoviču, Petri Kastelic, Vilmi Moderc, Barbari Knez, Urški Božič, Darji Strah in Mariji Ahčin, ki so v šolskem letu 2010/11 z nami delili svoja razmišljanja in izdelke učencev v spletni učilnici študijskih skupin za matematiko.