O NEKI ZVEZI MED RIEMANNOVO FUNKCIJO ZETA IN PRAŠTEVILI

ALEKSANDER SIMONIČ

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 40A30, 11M26

V članku pokažemo, kako lahko vrsto $\sum_p f(p^{-s})$ izrazimo z Riemannovo funkcijo zeta, če je f holomorfna funkcija in vsota teče po vseh praštevilih. V nadaljevanju se ukvarjamo z analitičnimi lastnostmi takih funkcij.

ON SOME RELATION BETWEEN THE RIEMANN ZETA FUNCTION AND PRIMES

In the article we demonstrate how to express the series $\sum_p f(p^{-s})$ in terms of Riemann zeta function, where f is a holomorphic function and summation goes through primes. Next we study analytic properties of such functions.

Uvod

Riemannova funkcija zeta je definirana kot funkcijska vrsta

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{1}$$

kompleksne spremenljivke s. Kot funkcijo realnega parametra jo je obravnaval že **Leonhard Euler** (1707–1783). Njemu tudi pripisujemo odkritje neskončnega produkta za funkcijo $\zeta(s)$

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}, \tag{2}$$

kjer smo s p označili elemente iz množice praštevil. Kot funkcijo kompleksne spremenljivke pa jo je obravnaval šele **Georg F. B. Riemann** (1826–1866) v članku *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, objavljenem leta 1859. Če označimo $s = \sigma + \mathrm{i}t$, potem je za $\sigma > 1$ vrsta (1) absolutno konvergentna; prav tako velja enakost (2). V članku je Riemann s posebnimi prijemi kompleksne analize in lastnostmi funkcije gama funkcijo (1) analitično razširil na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Kot posledico razširitve je dobil znamenito funkcijsko enačbo

$$\zeta(1 - s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(s). \tag{3}$$

Od takrat so odkrili še precej dokazov enačbe (3). Nekaj od teh jih bo bralec našel v [7, §2].

Z *Eulerjevim produktom* (2) slutimo, da je funkcija ζ povezana s praštevili. In res, na njem sloni *praštevilski izrek*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1,$$

kjer $\pi(x)$ označuje število praštevil, ki ne presegajo x. Ob študiju funkcije zeta in praštevilskega izreka pogosto naletimo na zvezo

$$\sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{np^{ns}} = \log \zeta(s), \tag{4}$$

ki se pojavlja v dokazu **Jacquesa S. Hadamarda** (1865–1963) in **Charlesa J. G. N. de la Vallée Poussina** (1866–1962), da razširjena funkcija $\zeta(s)$ nima ničel na premici $\sigma = 1$ [7, str. 46] in je eden od ključnih elementov dokaza praštevilskega izreka.

Vprašanje, kje ležijo ničle funkcije $\zeta(s)$, je v tej teoriji zelo pomembno. Naj bo $N(T)$ število ničel funkcije $\zeta(s)$ na območju $\{z \in \mathbb{C}\colon 0 \le \Re(z) \le 1, 0 < \Im(z) \le T\}$, $N(\sigma_0, T)$ število ničel na območju $\{z \in \mathbb{C}\colon \Re(z) > \sigma_0, 0 < \Im(z) \le T\}$ in $N_0(T)$ število ničel na $\{z \in \mathbb{C}\colon \Re(z) = 1/2, 0 < \Im(z) \le T\}$. Iz enakosti (2) sledi $N(1, T) = 0$ za vsak $T > 0$. Preko funkcijske enačbe (3) opazimo, da so točke $s = -2k$ za vsak $k \in \mathbb{N}$ edine ničle v polravnini $\sigma < 0$. Te ničle imenujemo *trivialne ničle*. Vse preostale *netrivialne ničle* ležijo v pasu $0 < \sigma < 1$. Slovita in še ne rešena *Riemannova domneva* sprašuje, ali vse netrivialne ničle funkcije zeta ležijo na premici $\sigma = 1/2$, kar je z zgornjimi oznakami ekvivalentno trditvi $N(T) = N_0(T)$ za vsak $T > 0$. Takim ničlam pravimo *kritične*. Že Riemann je napovedal naslednjo asimptotično formulo[1] [7, izrek 9.4]

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi e} + O(\log T),$$

katere dokaz je leta 1905 podal **Hans C. F. von Mangoldt** (1854–1925). Angleški matematik **Godfrey H. Hardy** (1877–1947) je v prid Riemannovi domnevi leta 1914 dokazal, da je kritičnih ničel neskončno mnogo. Sedem let kasneje je v sodelovanju z **Johnom E. Littlewoodom** (1885–1977) dokazal, da obstajata konstanti $A, T_0 > 0$, tako da velja

$$N_0(T) > AT \tag{5}$$

[1] Oznaka $f(x) = O(g(x))$ za realni funkciji f, g, definirani na neki domeni $D \subseteq \mathbb{R}$, pomeni, da obstaja konstanta $C > 0$, da velja $|f(x)| \le Cg(x)$ za vse $x \in D$.

za vse $T > T_0$ [7, izrek 10.7]. **Harald A. Bohr** (1887–1951) in **Edmund G. H. Landau** (1877–1938) sta leta 1914 dokazala [7, izrek 9.15(A)]

$$N(\sigma, T) = O(T) \tag{6}$$

za vsak fiksen $\sigma > 1/2$. To je izboljšana Riemann-von Mangoldtova formula za primer tistih morebitnih ničel, ki ležijo desno od kritičnih.

Preko (4) se da izpeljati

$$\sum_p \frac{1}{p^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \log \zeta(sn), \tag{7}$$

kjer se vrsta na levi imenuje *praštevilska funkcija zeta*, $\mu(n)$ pa je *Möbiusova funkcija*, imenovana po nemškem matematiku **Augustu F. Möbiusu** (1790–1868).

V članku bomo posplošili zvezo (4) oz. (7) na primer sumacije $f(p^{-sn})/n$ oz. $f(p^{-s})$, kjer je $f(z)$ holomorfna funkcija v okolici 0, za katero velja $f(0) = 0$. V nadaljevanju bomo z uporabo podobnih ocen kakor (5) in (6) raziskali analitične lastnosti funkcije $\sum_p f(p^{-s})$.

Prva posplošitev

Naj bo $f(z)$ holomorfna funkcija na domeni $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, ki vsebuje točko 0, in naj velja $f(0) = 0$. Vemo, da se funkcijo lahko zapiše v obliki potenčne vrste

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \tag{8}$$

s konvergenčnim radijem $\mathrm{R}(f)$.

Lema 1. *Naj bo* $f(z)$ *oblike* (8) *s konvergenčnim radijem* $\mathrm{R}(f)$. *Potem za* $|z| < \min\{1, \mathrm{R}(f)\}$ *velja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} -a_n \log(1 - z^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(z^n)}{n}. \tag{9}$$

Dokaz. Spomnimo se znane potenčne vrste

$$-\log(1 - z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \tag{10}$$

ki konvergira za $|z| < 1$. Radi bi pokazali, da velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} -a_n \log(1 - z^n) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_n \frac{z^{mn}}{m} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{z^{mn}}{m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(z^n)}{n}$$

za $|z| < \min\{1, \mathrm{R}(f)\}$. Prvi in tretji enačaj sledita iz definicije dvakratnih vrst in definicije funkcije $f(z)$, torej je treba dokazati veljavnost drugega enačaja. Izberimo poljuben $|z_0| < \min\{1, \mathrm{R}(f)\}$. *Cauchyjev izrek o dvakratnih vrstah* [6, str. 143] nam zagotavlja, da je dovolj preveriti konvergenco druge vrste v z_0, pri kateri zamenjamo člene z absolutnimi vrednostmi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} |a_n| \frac{|z_0|^{mn}}{m} = \sum_{n=1}^{\infty} -|a_n| \log(1 - |z_0|^n). \qquad (11)$$

Naj bo $N \in \mathbb{N}$ tak, da je $|z_0|^N < 1/2$. Ker za $|z| < 1/2$ velja ocena

$$|\log(1 + z)| \leq 2|z|, \qquad (12)$$

sledi

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n||\log(1 - |z_0|^n)| \leq \sum_{n=N}^{\infty} 2|a_n||z_0|^n.$$

Majoranta konvergira, saj je $|z_0| < \mathrm{R}(f)$. S tem konvergira tudi dvakratna vrsta (11). Enakost (9) je s tem dokazana. ∎

Neposredno iz (1) za $\sigma > 1$ sledi

$$|\zeta(s) - 1| \leq \zeta(\sigma) - 1.$$

To pomeni, da slika polravnine $\sigma > 2$ funkcije $\zeta(s)$ leži v enotskem disku s središčem v 1. To dejstvo zagotavlja obstoj holomorfne funkcije $\log \zeta(s)$ na območju $\sigma > 2$. Iz (2) za $\sigma > 1$ sledi

$$\log \zeta(s) = -\sum_{p} \log(1 - p^{-s}). \qquad (13)$$

Fiksirajmo $\sigma_0 > 1$. Z uporabo ocene (12) dobimo

$$\sum_{p} |\log(1 - p^{-s})| \leq \sum_{p} 2p^{-\sigma_0} < \infty$$

za vse $\sigma > \sigma_0$. *Weierstrassov M-kriterij* nam pove, da vrsta v (13) konvergira enakomerno na kompaktih na območju $\sigma > 1$, zato je na tem območju holomorfna funkcija. Torej je funkcija $\log \zeta(s)$, definirana s (13), holomorfna na polravnini $\sigma > 1$.

Opazimo lahko, da nam kombinacija enačb (10) in (13) da enakost (4). Naslednjo trditev imamo lahko za posplošitev te enakosti, saj jo dobimo s postavitvijo $f(z) = z$.

Trditev 2. *Naj bo $f(z)$ oblike (8) in $s = \sigma + \mathrm{i}t$. Potem na polravnini $\sigma > \chi(f)$, kjer je*

$$\chi(f) := \begin{cases} 1, & \mathrm{R}(f) \geq 1/2 \\ -\log_2 \mathrm{R}(f), & \mathrm{R}(f) \leq 1/2, \end{cases}$$

velja enakost

$$\sum_{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f\left(p^{-sn}\right)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \log \zeta(sn). \tag{14}$$

Če obstaja tak $N \in \mathbb{N}$, da je $a_n = 0$ za vsak $n < N$, potem zgornja enakost velja na polravnini $\sigma > N^{-1}\chi(f)$. Funkcija, ki jo določa dvakratna vrsta, je na tem območju holomorfna.

Dokaz. Fiksirajmo $\sigma_0 > \chi(f)$. Potem je $|p^{-s}| \leq 2^{-\chi(f)} \leq \min\{1, \mathrm{R}(f)\}$ za vse $\sigma > \sigma_0$ in vsa praštevila p. Zato lahko uporabimo lemo 1 za $z = p^{-s}$ in dobimo

$$\sum_{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f\left(p^{-sn}\right)}{n} = \sum_{p} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \log \frac{1}{1 - p^{-sn}}.$$

Iz enakosti (13) dobimo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p} a_n \log \frac{1}{1 - p^{-sn}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \log \zeta(sn).$$

Če pokažemo, da zgornja dvakratna vrsta, pri kateri zamenjamo člene z absolutnimi vrednostmi, konvergira za vsak $\sigma > \sigma_0$ in je majoranta odvisna le od σ_0, bo sledila enakost (14) in holomorfnost funkcije, ki jo določa ta dvakratna vrsta. Ker je

$$\sum_{p} |a_n| |\log(1 - p^{-sn})| \leq 2|a_n| \sum_{p} p^{-\sigma n} \leq 2|a_n|(\zeta(\sigma_0 n) - 1),$$

dobimo oceno

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p} |a_n| |\log(1 - p^{-sn})| \leq \sum_{n=1}^{\infty} 4|a_n| 2^{-\sigma_0 n},$$

kjer smo upoštevali $\zeta(\sigma_0 n) - 1 < 2^{1-\sigma_0 n}$. Majoranta konvergira in je odvisna le od σ_0. Če obstaja tak $N \in \mathbb{N}$, da je $a_n = 0$ za vsak $n < N$, potem seštevamo v (14) šele od $n = N$ naprej. Zgoraj dokazano bo veljalo za tiste s, pri katerih je $N\sigma > \chi(f)$. ∎

Druga posplošitev

Oglejmo si naslednji problem. V dokazu leme 1 smo dokazali absolutno konvergenco dvakratne vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_n \frac{z^{mn}}{m}. \tag{15}$$

Seštevali smo po vrsticah in stolpcih, vendar lahko zaradi absolutne konvergence v kateremkoli vrstnem redu. Poskusimo sešteti vrsto (15) tako, da ponovno dobimo potenčno vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(z^n)}{n} = a_1 z + \frac{1}{2}\left(a_1 + 2a_2\right) z^2 + \frac{1}{3}\left(a_1 + 3a_3\right) z^3 + \frac{1}{4}\left(a_1 + 2a_2 + 4a_4\right) z^4 + \cdots$$

Opazimo, da lahko vrsto strnemo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(z^n)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n, \quad \text{kjer je} \quad A_n = \sum_{d|n} \frac{d}{n} a_d.$$

Ta vrsta pomeni novo funkcijo, recimo ji $F(z)$. Po trditvi 2 vemo, da na polravnini $\sigma > \chi(f)$ velja

$$\sum_{p} F(p^{-s}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \log \zeta(sn)$$

in funkcija, ki jo določa vrsta po praštevilih, je na tem območju holomorfna. V tem primeru imamo koeficiente a_n dane, računamo pa koeficiente A_n nove vrste, ki pomeni funkcijo $F(z)$. Vendar bi se radi problema lotili z druge strani. Denimo, da imamo funkcijo $F(z)$ že zapisano v potenčni vrsti. Bi znali določiti koeficiente a_n? Odgovor se skriva v t. i. *Möbiusovi inverzni formuli*.

Möbiusova funkcija $\mu(n)$ je za vsak $n \in \mathbb{N}$ definirana z

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ (-1)^k, & n = \text{produkt } k \text{ različnih praštevil} \\ 0, & n \text{ je deljiv s kvadratom kakšnega praštevila.} \end{cases}$$

Möbiusova funkcija je primer *aritmetične funkcije*, to so funkcije, definirane na množici naravnih števil. Osnovna lastnost funkcije $\mu(n)$ je podana v naslednji lemi:

Lema 3. *Za vsako naravno število n velja*

$$\sum_{d|n}\mu(d) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n > 1. \end{cases}$$

Dokaz. Za $n = 1$ je po definiciji $\mu(1) = 1$. Naj bo $n > 1$. Po osnovnem izreku aritmetike lahko pišemo $n = \prod_{p|n} p^{v_p(n)}$. K zgornji vsoti prispevajo samo tisti delitelji števila n, ki imajo v praštevilskem razcepu potence 1. Torej sestavljajo množico deliteljev kombinacije brez ponavljanja množice $\{p_1, p_2, \dots, p_k\} := \{p \colon p|n\}$. Potem imamo

$$\sum_{d|n}\mu(d) = 1 + \sum_{m=1}^{k}(-1)^m\binom{k}{m} = (1-1)^k = 0. \qquad \blacksquare$$

Izrek 4 (Möbiusova inverzna formula). *Naj bosta $f(n)$ in $g(n)$ poljubni aritmetični funkciji. Potem velja*

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \iff f(n) = \sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)g(d).$$

Dokaz. Pišemo lahko

$$\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)g(d) = \sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\sum_{q|d} f(q).$$

Za $q = n$ je $d = n$, zato je v vsoti le en člen $\mu(1)f(n) = f(n)$. Naj bo sedaj $q < n$. Imamo $d = lq$, kjer l deli n/q. Potem je koeficient pred $f(q)$ enak

$$\sum_{l|n/q}\mu\left(\frac{n/q}{l}\right),$$

kar je enako 0 po lemi 3.

Nasprotno smer dokažemo podobno, zato dokaz prepuščamo bralcu. $\blacksquare$

Sedaj smo pripravljeni na naslednji izrek, ki posplošuje zvezo (7).

Izrek 5. *Naj bo $f(z)$ oblike* (8), *$s = \sigma + \mathrm{i}t$ in $\chi(f)$ iz trditve 2. Potem na polravnini $\sigma > \chi(f)$ velja enakost*

$$\sum_{p} f(p^{-s}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \log\zeta(sn), \quad \textit{kjer je} \quad A_n = \sum_{d|n}\frac{d}{n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)a_d.$$

Če obstaja tak $N \in \mathbb{N}$, da je $a_n = 0$ za vsak $n < N$, potem zgornja enakost velja na polravnini $\sigma > N^{-1}\chi(f)$. Funkcija, ki jo določa vrsta po praštevilih, je na tem območju holomorfna.

Dokaz. Naj bo $g(n) := A_n$ in $h(d) := (d/n)a_d$. Iz zveze v izreku 5 med a_n in A_n in Möbiusove inverzne formule dobimo $a_n = \sum_{d|n}\mu(n/d)(d/n)A_d$. Zato preostane dokazati, da za vrsto $F(z) := \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n$ velja $\chi(F) \leq \chi(f)$.

Ker je

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n||z|^n \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{d|n} \frac{d}{n}|a_d||z|^n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} |a_n|\frac{|z|^{mn}}{m},$$

vrsta za $F(z)$ konvergira za $|z| < \min\{1, \mathrm{R}(f)\}$. Torej je $\mathrm{R}(F) \geq \min\{1, \mathrm{R}(f)\}$ in s tem $\chi(F) \leq \chi(f)$. ∎

Z uporabo izreka 5 na funkciji $f(z) = z$ dobimo izraz (7). Podobne izraze dobimo tudi z uporabo drugih aritmetičnih funkcij.

Primer 1. Ker je $z(1-z)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n$, po izreku 5 sledi

$$\sum_p \frac{1}{p^s - 1} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)\frac{d}{n}\log\zeta(sn)$$

za $\sigma > 1$. Izraz na desni strani lahko poenostavimo. Eulerjeva funkcija $\varphi(n)$ pri vsakem naravnem številu n prešteje tista števila $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, za katera sta k in n tuji si števili. Več v [1, str. 28]. Izkoristili bomo dejstvo, da je

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Po izreku 4 sledi

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)\frac{d}{n}.$$

◊

Posledica 6. *Naj bo $f(z)$ holomorfna funkcija v okolici točke 0, $s = \sigma + \mathrm{i}t$ in $\chi(f)$ iz trditve 2. Dodatno naj velja še: f nima ničel, $f(0) = 1$ in*

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Potem na polravnini $\sigma > \chi(f)$ velja

$$\prod_p f(p^{-s}) = \prod_{n=1}^{\infty}\big(\zeta(sn)\big)^{A_n}, \quad \textit{kjer je} \quad A_n = \sum_{d|n}\frac{b_{d-1}}{n}\mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

Dokaz. Ker je $f(z)$ holomorfna funkcija brez ničel na enostavno povezani domeni $\Omega \ni 0$, obstaja holomorfna funkcija $g(z)$, za katero velja $g'(z) \equiv f'(z)/f(z)$ na Ω. Ker je

$$\left(\frac{\exp(g(z))}{f(z)}\right)' = \frac{(g'(z)f(z) - f'(z))\exp(g(z))}{f(z)^2} = 0$$

za vsak $z \in \Omega$, sledi $f(z) = C \cdot \exp(g(z))$ za neko konstanto C. Po predpostavki posledice imamo $g'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. To pomeni

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{n-1}}{n} z^n.$$

Ker je $g(0) = 0$, po predpostavki posledice sledi $C = f(0) = 1$. Uporabimo izrek 5 na funkciji $g(z)$ in dobimo

$$\sum_p g(p^{-s}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \log \zeta(sn) \tag{16}$$

za $s \in \Omega$, kjer je $A_n = \sum_{d|n} (b_{d-1}/n)\mu(n/d)$. Na obeh straneh enačbe (16) eksponiramo in upoštevamo $\exp g(p^{-s}) = f(p^{-s})$. ∎

Pogoju $f(0) = 1$ se ne moremo izogniti, saj bi bil v nasprotnem primeru produkt po praštevilih divergenten. Potrebni pogoj za konvergenco neskončnega produkta $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ je $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$.

Z uporabo posledice 6 na funkciji $f(z) = (1 - z)^{-1}$ dobimo

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n > 1, \end{cases}$$

kjer smo si za izračun vsote pomagali z lemo 3. Dobili smo Eulerjev produkt (2).

Primer 2. Posledico 6 bomo uporabili na produktu

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p(p-1)}\right).$$

Število $C_{\mathrm{Artin}} \approx 0{,}3739558$, ki pomeni vrednost zgornjega produkta, imenujemo *Artinovo število*. Izrazili ga bomo s produktom funkcije zeta. Ob upoštevanju oznak iz posledice 6 imamo $f(z) = (1 - z - z^2)(1 - z)^{-1}$ in s tem

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{\alpha_1 - z} - \frac{1}{\alpha_2 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha_1^{n+1} + \alpha_2^{n+1}}{(\alpha_1\alpha_2)^{n+1}}\right) z^n,$$

kjer sta α_1 in α_2 rešitvi kvadratne enačbe $z^2 + z - 1 = 0$. Torej $(\alpha_1\alpha_2)^n = (-1)^n$ in

$$\alpha_1^n + \alpha_2^n = (-1)^n \left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \right) = (-1)^n L_n,$$

kjer smo z L_n označili n-to *Lucasovo število*[2] (**François E. A. Lucas** (1842–1891)). Dognali smo $b_n = 1 - L_{n+1}$ in

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} (1 - L_d)\mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

Ker je $f(z)$ holomorfna funkcija na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, je $\mathrm{R}(f) = 1$ in s tem $\chi(f) = 1$. Funkcija $f(z)$ je na $\sigma > 1$ brez ničel, velja še $f(0) = 1$ in $a_1 = 0$. Zato lahko uporabimo posledico 6 za $\sigma = 1$ ter tako dobimo

$$C_{\mathrm{Artin}} = \prod_{n=2}^{\infty} \big(\zeta(n)\big)^{\sum_{d|n} \frac{L_d}{n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)}.$$

Za vsako praštevilo $p \notin \{2, 5\}$ je ulomek $1/p$ periodičen in dolžina periode deli število $p-1$. Obstajajo praštevila p, za katera je dolžina periode ulomka $1/p$ enaka $p - 1$. Tak ulomek je npr. $1/7 = 0{,}\overline{142857}$. **Emil Artin** (1898–1962) je postavil domnevo, da je gostota takih praštevil ravno število C_{Artin}. $\diamondsuit$

Problem analitičnega nadaljevanja

Naj bo $f(z)$ oblike (8), $s = \sigma + it$ in $\chi(f)$ iz trditve 2. Po izreku 5 imamo

$$\tilde{f}(s) := \sum_{p} f(p^{-s}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \log \zeta(ns), \tag{17}$$

[2]Lucasova števila so definirana rekurzivno s predpisom $L_{n+2} = L_n + L_{n+1}$ in začetnima pogojema $L_1 = 1$ ter $L_2 = 3$. Več v [3, str. 426].

kjer so koeficienti A_n določeni s funkcijo f. Vrsta po praštevilih konvergira na polravnini $\sigma > \chi(f)$ in $\tilde{f}$ je tam holomorfna funkcija. Po drugi strani pa desna vrsta konvergira na polravnini $\sigma > 0$, razen na neki podmnožici

$$\mathcal{S} \subseteq \{\sigma > 0\colon \exists n \in \mathbb{N}.\ \zeta(ns) = 0 \vee ns = 1\}.$$

Zato lahko $\tilde{f}$ analitično razširimo na $\sigma > 0$ z izoliranimi singularnostmi v $\mathcal{S}$. Namen tega razdelka je odgovoriti na vprašanje: ali bi lahko $\tilde{f}$ analitično nadaljevali preko premice $\sigma = 0$?

V nadaljevanju bomo potrebovali naslednja izreka, ki podajata boljše ocene kakor (5) in (6).

Izrek 7 ([4, §2.1.2]). *Naj bo $\varepsilon > 0$ in $H \geq T^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$. Obstajata konstanti $A(\varepsilon), T_0(\varepsilon) > 0$, da je $N_0(T+H) - N_0(T) > A(\varepsilon)H$ za vse $T > T_0(\varepsilon)$.*

Izrek 8 ([5, str. 128]). *Za $\sigma \in [1/2, 1]$ in $T \geq 2$ velja*

$$N(\sigma, T) = O\left(T^{4\sigma(1-\sigma)} \log^{13} T\right).$$

Iz izreka 8 lahko sklepamo, da za poljuben $\sigma \in (1/2, 1]$ velja $N(\sigma, T) = o(T)$, kar pomeni $\lim_{T\to\infty} T^{-1}N(\sigma, T) = 0$. Kombinacija zgornjih izrekov nam da

Lema 9. *Za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $T_0(\varepsilon)$, da vsaj ena premica skozi izhodišče vsebuje vsaj eno ničlo funkcije $\zeta(s)$ v pravokotniku*

$$\mathcal{R}(\varepsilon, T) := \{z \in \mathbb{C}\colon 0 < \Re(z) < 1, (1-\varepsilon)T < \Im(z) < (1+\varepsilon)T\}$$

in nobene ničle zunaj $\mathcal{R}(\varepsilon, T)$ za vse $T > T_0(\varepsilon)$.

Dokaz. Po izreku 7 za $H \geq T^{\frac{3}{4}}$ obstajata konstanti $A, T_0 > 0$, da je $N_0(T + H) - N_0(T) > AH$ za vsak $T > T_0$. Naj bo $T_1(\varepsilon) > 0$ taka konstanta, da bo $2\varepsilon T > ((1-\varepsilon)T)^{\frac{3}{4}}$ za vse $T > T_1(\varepsilon)$. Potem $N_0((1+\varepsilon)T) - N_0((1-\varepsilon)T) > 2A\varepsilon T$ za vse $T > \max\{T_0, T_1(\varepsilon)\}$. Ker pa po izreku 8 za poljuben $\sigma \in (1/2, 1]$ velja $N(\sigma, 2(1+\varepsilon)T) = o(T)$, obstaja premica z zahtevanimi lastnostmi. ∎

Recimo, da je množica $\{n \in \mathbb{N}\colon A_n \neq 0\}$ končna. Potem ima desna vrsta v izrazu (17) končno mnogo členov. Množica singularnosti $\mathcal{S}$ je neskončna, vendar nima stekališč na $\mathbb{C}$. Zato se v tem primeru da $\tilde{f}$ analitično razširiti preko premice $\sigma = 0$ na cel $\mathbb{C}$, razen na neki množici izoliranih singularnosti. Zato se bomo osredotočili na primer, ko je množica $\{n \in \mathbb{N}\colon A_n \neq 0\}$ neskončna.

Švedski matematik **Germund Dahlquist** (1925–2005), znan predvsem po delu na področju numerične analize, je podal odgovor na uvodno vprašanje.

Izrek 10 ([2]). *Če je množica $\{n \in \mathbb{N}\colon A_n \neq 0\}$ neskončna, se funkcije $\tilde{f}(s)$ ne da analitično nadaljevati preko premice $\sigma = 0$.*

Analitično jedro dokaza izreka 10 je lema 9. Preostali del dokaza je elementaren, toda bolj tehnične narave, zato ga bomo izpustili. Vseeno pa bomo nakazali, kje se skriva originalna Dahlquistova ideja v dokazu.

Za trenutek privzemimo veljavnost Riemannove domneve. Naj bosta $\varepsilon, T > 0$ poljubni fiksni števili in $T_0(\varepsilon)$ konstanta iz leme 9. Naj bo N tako naravno število, da je $NT > T_0(\varepsilon)$ in $A_N \neq 0$. Takih števil N je neskončno. Potem obstaja ničla $\rho = \frac{1}{2} + \mathrm{i}t$ funkcije ζ, za katero velja $(1-\varepsilon)NT < t < (1+\varepsilon)NT$. Sledi $\rho/N \in \mathcal{R}(\varepsilon, T)$ in $\rho/N \in \mathcal{S}$. Dobili smo neskončno zaporedje singularnosti s stekališčem na premici $\sigma = 0$. Ker je bil ε poljuben, imamo lahko za stekališče vrednost T, ki pa je prav tako poljubna. Ugotovili smo, da je premica $\sigma = 0$ naravni rob funkcije $\tilde{f}$. To je leta 1900 opazil nizozemski matematik **Jan C. Kluyver** (1860–1932) pri praštevilski funkciji zeta (7).

Brez privzetka o veljavnosti Riemannove domneve se lahko zgodi, da obstajata ničli ρ_1, ρ_2 in naravni števili N_1, N_2, tako da je $\rho_1/N_1 = \rho_2/N_2$. Če dodatno velja še $A_{N_1}\,\mathrm{st}(\rho_1) + A_{N_2}\,\mathrm{st}(\rho_2) = 0$ in sta to edini ničli na premici skozi izhodišče, potem ρ_1/N_1 ni singularnost funkcije $\tilde{f}$. Kluyverjeva opazka je Landaua in njegovega učenca **Arnolda Walfisza** (1892–1962) vzpodbudila, da sta leta 1919 brez privzetka o veljavnosti Riemannove domneve dokazala, da ima funkcija (7) naravni rob $\sigma = 0$. Da bi se izognila zgornjemu problemu, sta uporabila posebne lastnosti koeficientov $\mu(n)/n$ (bralec lahko reproduciran dokaz najde v [7, §9.5]). Prav zaradi tega njunega dokaza ne moremo posplošiti na poljubne koeficiente A_n. Dahlquist je ta problem rešil z lemo [2, lema 3.2].

LITERATURA

[1] J. Bračič, *Uvod v analitično teorijo števil*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2003.

[2] G. Dahlquist, *On the analytic continuation of Eulerian products*, Ark. Mat. **36** (1952), 533–554.

[3] J. Grasselli, *Enciklopedija števil*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2008.

[4] A. A. Karatsuba, *Complex analysis in number theory*, Boca Raton, CRC Press, 1995.

[5] A. A. Karatsuba, S. M. Voronin, *The Riemann zeta-function*, De Gruyter Expositions in Mathematics 5, Walter de Gruyter, Berlin, 1992.

[6] K. Knopp, *Theory and application of infinite series*, Dover publications, New York, 1990.

[7] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, Clarendon Press, Oxford, 1986.