EVDOKSOVA KAMPILA

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 14H45, 51M15

Evdoksova kampila je ena od ravninskih krivulj, ki nam pomaga rešiti antični problem podvojitve kocke. Pokazali bomo, kako se z neoznačenim ravnilom in šestilom konstruira posamezne točke kampile, dokazali bomo nekaj njenih lastnosti in utemeljili precej natančno približno metodo za podvojitev kocke.

KAMPYLE OF EUDOXUS

The kampyle of Eudoxus is one of the plane curves that helps us solve the ancient problem of doubling the cube. We will show how to construct the individual points of the kampyle using an unlabelled ruler and a pair of compasses, we will prove some of its properties, and we will justify a fairly accurate approximate method for doubling a cube.

Uvod

Evdoks iz Knida (408–355 pr. n. št.) je bil starogrški matematik in astronom. Bil je Arhitov učenec v Tarentu in Platonov na Akademiji v Atenah. Obiskal je tudi Sicilijo in Egipt. Kasneje je ustanovil svojo šolo v Kiziku ob Marmarskem morju. Pomemben je njegov prispevek v teoriji razmerij in nesoizmerljivih količin, kar je uporabil Evklid v svojih Elementih.

V astronomiji je Evdoks zagovarjal geocentrični svetovni sistem in za pojasnitev gibanja planetov in Lune uvedel sistem koncentričnih sfer, ki se vrtijo druga v drugi. S tem v zvezi je uvedel še eno krivuljo, ki jo poznamo pod imenom »Evdoksova hipopeda«.

Problem podvojitve kocke je na svojevrsten način, s torusom, valjem in stožcem, rešil pitagorejec in vojaški poveljnik Arhitas iz Tarenta v južni Italiji, rojen med letoma 435 in 410, umrl pa med letoma 360 in 350 pr. n. št. (o njegovi rešitvi več v [3, 5]). Če sledeč Arhitu uporabimo današnje metode in oznake, potem v prostorskem kartezičnem koordinatnem sistemu $Oxyz$ iščemo presečišča torusa $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$, ki ima polmer zunanjega ekvatorja $2a > 0$, polmer notranjega pa 0, valja $x^2 + y^2 = 2ax$ in stožca $x^2 = y^2 + z^2$. Če enačbo stožca zapišemo v obliki $2x^2 = x^2 + y^2 + z^2$ in to upoštevamo v enačbi torusa, pridemo do enačbe $a^2(x^2 + y^2) = x^4$. Upoštevamo še enačbo valja in dobimo enačbo z eno neznanko: $x^4 = 2a^3x$. Njeni realni rešitvi sta $x_1 = 0$ in $x_2 = a\sqrt[3]{2}$. Pozitivna rešitev je rob kocke, ki ima dvakrat večjo prostornino kot kocka z robom a. S tem je problem podvojitve kocke rešen.

Platon s tako rešitvijo seveda ni bil zadovoljen: ni bila narejena po evklidsko, to je z neoznačenim ravnilom in šestilom, ni bila narejena v ravnini.

Morda je Evdoks Arhitovo prostorsko rešitev problema podvojitve kocke poenostavil na reševanje v ravnini, tako da je, če uporabimo spet naše oznake, poiskal presečišče krivulje $a^2(x^2+y^2)=x^4$ in krožnice $x^2+y^2=2ax$ v ravninskem kartezičnem koordinatnem sistemu Oxy. Krivulji se sekata v koordinatnem izhodišču O in še v dveh, glede na os x simetrično ležečih točkah, ki imata absciso enako $a\sqrt[3]{2}$. Do rešitve tokrat pridemo vsaj v ravnini, Platon pa seveda tudi s tem ni bil zadovoljen.

Krivuljo, ki ima implicitno enačbo $a^2(x^2+y^2)=x^4$, so poimenovali po Evdoksu »Evdoksova kampila«. Koordinatno izhodišče $O(0,0)$ je njena izolirana točka, ki je navadno ne upoštevamo. Krivulja je simetrična glede na obe koordinatni osi.

Pravzaprav ni nikjer dokazano, da jo je Evdoks dejansko uporabljal. Ve se le, da mu je podvojitev kocke uspelo najti z neko krivuljo. Beseda »kampila« izhaja iz grške »kampýle«, kar pomeni »kriva, zavita, upognjena«, namreč »črta« ali »poteza«.

Problem podvojitve kocke ali deloški problem, poimenovan po grškem otoku Delosu v Egejskem morju, je reševalo več grških geometrov, ki so celo skušali izdelati v ta namen posebno orodje. Platon je pograjal Evdoksove, Arhitove in Menajhmove učence, češ da njihovi napori kvarijo, kar je dobrega v geometriji. Nastal je celo epigram (puščica, zbadljivka) v zvezi s podvojitvijo kocke, ki je zapisan v Evtokijevih komentarjih k Arhimedovi razpravi »O krogli in valju«.

Navedimo omenjeni epigram v prevodu Sonje Weiss (vzeto iz obsežnega knjižnega dela v treh delih [1]):

Težkih Arhitovih del s cilindri nikar ne posnemaj;

stožnic Menajhmovih treh nikdar izsekal ne boš

niti ne boš spoznal, če božanskega črte Evdoksa

res zarišejo lik, tak iz zavitih kampil.

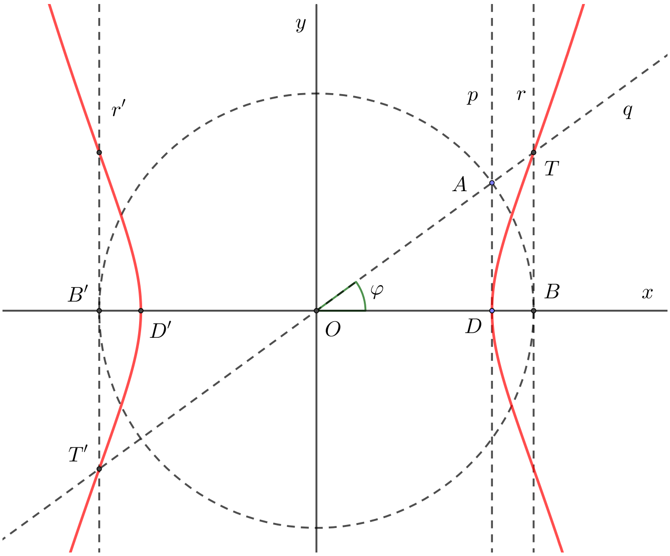
Matematik in neoplatonist Evtokij iz Aškalona v Palestini je bil poznoantični učenjak, rojen okoli leta 480, umrl pa je okoli leta 520. O njem se ve bore malo. Nekaj časa je deloval v Atenah, nazadnje pa v Aleksandriji. Več o tem na primer v [2].

Napisal je tudi komentarje k Apolonijevi razpravi »Stožnice«. Na stožnice se je v srednjem veku kar nekoliko pozabilo, zanimanje zanje je spet oživelo šele v času Keplerja in Newtona, ko je bil potreben opis gibanja planetov v heliocentričnem svetovnem sistemu.

Konstrukcija točk Evdoksove kampile

Oglejmo si naslednjo konstrukcijo točk krivulje. V točki $D(a, 0)$, pri čemer je $a > 0$, postavimo pravokotnico p na abscisno os. Na p izberemo točko A, ki jo bomo kasneje premikali po tej premici. Skozi O in A načrtamo premico q in skozi A krožnico s središčem v koordinatnem izhodišču O. Krožnica preseka abscisno os v točkah B in B', ki sta simetrični glede na točko O. V B in B' konstruiramo pravokotnici r in r' na os x, ki presekata q v točkah T in T', ki sta tudi simetrični glede na točko O. Ko teče točka A po premici p, opišeta T in T' dvodelno krivuljo, za katero se izkaže, da je Evdoksova kampila. Točka T opiše njeno desno vejo, T' pa levo. Krivulja je očitno simetrična glede na obe koordinatni osi (slika 1).

V programih za dinamično geometrijo je Evdoksova kampila sled točke T, ko v opisani evklidski konstrukciji premikamo točko A po premici p.



Slika 1. Konstrukcija točk Evdoksove kampile.

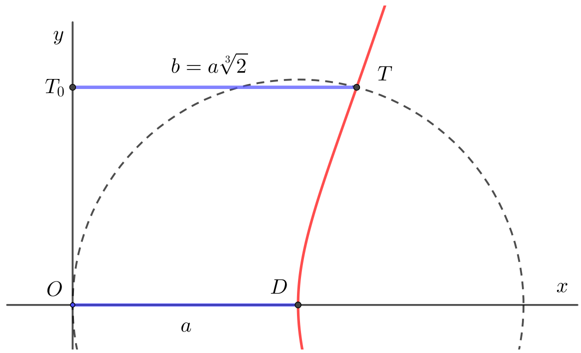
Enačbo desne veje dobljene krivulje je najlaže najprej izraziti v polarnih koordinatah, nato pa še v implicitni obliki v pravokotnih kartezičnih koordinatah. Za polarni kot φ vzamemo naklonski kot premice q, za polarni radij ϱ pa razdaljo $|OT|$ (slika 1). Najprej očitno veljata zvezi $|OA| = |OD|/\cos\varphi = a/\cos\varphi$ in $\varrho = |OT| = |OB|/\cos\varphi = |OA|/\cos\varphi$, iz katerih dobimo $\varrho = a/\cos^2\varphi$. Pri pogoju $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ je torej polarna enačba desne veje krivulje

$$\varrho(\varphi) = \frac{a}{\cos^2 \varphi}. \tag{1}$$

Obe veji krivulje imata implicitno obliko

$$a^2(x^2 + y^2) = x^4, \tag{2}$$

ki jo dobimo iz polarne oblike z upoštevanjem zvez $\varrho^2 = x^2+y^2$ in $\cos\varphi = x/\varrho$. Krivulja v obliki (2) ima izolirano točko $O(0,0)$, ki je posledica deljenja z ϱ, ki je lahko tudi enak 0. Evdoksova kampila je algebrska krivulja četrte stopnje.



Slika 2. Podvojitev kocke z Evdoksovo kampilo.

Podvojitev kocke z Evdoksovo kampilo

Z Evdoksovo kampilo se da, kot smo že spoznali, podvojiti kocko. Načrtamo krožnico s središčem v točki D in polmerom a. Njena enačba je $x^2+y^2 = 2ax$. Sistem enačb

$$x^2 + y^2 = 2ax, \quad a^2(x^2 + y^2) = x^4$$

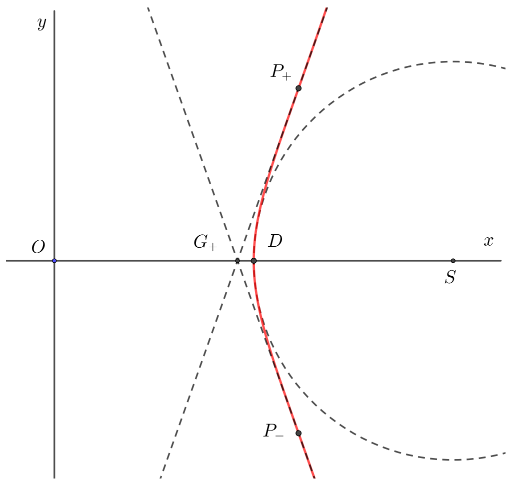
ima trivialno rešitev $(x,y) = (0,0)$ in netrivialni rešitvi

$$(x,y) = (a\sqrt[3]{2}, \pm a\sqrt{2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}}).$$

V prvem kvadrantu se krožnica in Evdoksova kampila sekata v točki T, ki ima absciso $|T_0T| = b = a\sqrt[3]{2}$ (slika 2). Kocka z robom b ima prostornino $b^3 = 2a^3$, torej dvakratnik prostornine kocke z robom a.

S tem je problem podvojitve kocke rešen, če priznamo Evdoksovo kampilo za konstrukcijski element. Rob podvojene kocke je določen z absciso presečišča krožnice, ki po Platonu je konstrukcijski element, in kampile kot sled točke v opisani konstrukciji. Kot je znano, pa z neoznačenim ravnilom in šestilom problem podvojitve kocke ni rešljiv. Zato pa tako kot v primeru konstrukcije pravilnega sedemkotnika ali obsega kroga poskušamo najti dovolj natančne približne metode, ki so izvedljive z neoznačenim ravnilom in šestilom.

Možnost približne konstrukcije daljice, ki ima dolžino zelo blizu $a\sqrt[3]{2}$, nudi majhna ukrivljenost Evdoksove kampile v okolici točke T, ki je presečišče kampile (2) in krožnice $x^2 + y^2 = 2ax$. Če izberemo na kampili točko T^*, ki je zelo blizu T, se tangenta na kampilo v T^* z njo zelo dobro ujema. Zato je presečišče P krožnice $x^2 + y^2 = 2ax$ s tangento tudi zelo blizu točke T in abscisi točk T in P se malo razlikujeta. Za približno konstrukcijo pa je treba T^* izbrati tako, da se jo da določiti z neoznačenim ravnilom in šestilom.



Slika 3. Desna veja Evdoksove kampile, prevoja in pritisnjena krožnica.

Evdoksovo kampilo parametriziramo kar s polarnim kotom:

$$x(\varphi) = \frac{a}{\cos\varphi}, \quad y(\varphi) = \frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

Za prva dva odvoda v točki, ki ustreza kotu φ, dobimo izraza

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+\sin^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3\sin^2\varphi - 1}{a\sin^3\varphi}.$$

Drugi odvod spremeni predznak pri kotih φ, za katere je $3\sin^2\varphi - 1 = 0$. V ustreznih točkah ima krivulja prevoje. To so točke $(\pm a\sqrt{6}/2, \pm a\sqrt{3}/2)$. Tangente v teh točkah imajo strmini $\pm 2\sqrt{2}$, kar dobimo iz zgoraj dobljenega izraza za odvod, in presekajo os x v točkah $G_\pm(\pm 3a\sqrt{6}/8, 0)$. Izkaže se, da je polmer pritisnjenih krožnic, ki se v točkah D in D' kampili najbolj prilegajo, enak a. Središče take krožnice v točki D je $S(2a, 0)$, v točki D' pa $S'(-2a, 0)$. Približno ujemanje krivulje, tangent v prevojih $P_\pm$ in pritisnjene krožnice v temenu D kaže slika 3.

Sedaj pa pokažimo, da je za točko T^* zelo primerno izbrati prevoj P_+ kampile, v kateri se tangenta z njo dobro ujema. Če namesto Evdoksove kampile vzamemo kar njeno tangento

$$y = 2\sqrt{2}(x - a\sqrt{6}/2) + a\sqrt{3}/2$$

v prevoju P_+ in poiščemo absciso ξ presečišča s krožnico $x^2 + y^2 = 2ax$, dobimo

$$\frac{\xi}{a} = \frac{1}{18}\sqrt{24\sqrt{6} - 23} + \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{1}{9} \doteq 1{,}259956951,$$

kar je nekoliko več od točnejše vrednosti

$$\sqrt[3]{2} \doteq 1{,}259921049.$$

Zgoraj opisani približek lahko izkoristimo za precej natančno evklidsko konstrukcijo roba b podvojene kocke z robom a. Označimo z α polarni kot prevoja P_+ v prvem kvadrantu (slika 4). Veljajo relacije:

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Polarni radij tega prevoja je

$$\varrho_P = \frac{a}{\cos^2\alpha} = \frac{3a}{2}.$$

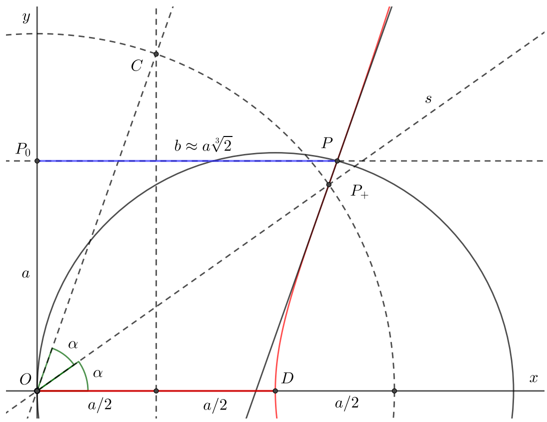
Za konstrukcijo je zanimiv naslednji rezultat:

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = 2\sqrt{2}.$$

To pomeni, da premica skozi O in P_+ razpolavlja naklonski kot premice $y = 2x\sqrt{2}$, ki je vzporedna tangenti kampile skozi P_+.

Ker krožnica s središčem v O in polmerom $3a/2$ preseka premico $x = a/2$ v točki $C(a/2, a\sqrt{2})$, pomeni, da skozi O in C poteka premica $y = 2x\sqrt{2}$, ki oklepa z osjo x kot 2α. Na premici s, simetrali kota DOC, ki ima enačbo

$y = x\sqrt{2}/2$ in ki oklepa z osjo x kot α, pa je na razdalji $\varrho_P = 3a/2$ prevoj kampile. Skozenj je treba načrtati le še vzporednico s premico skozi O in C, jo presekati s krožnico s središčem v $D(a, 0)$ in polmerom a, pa dobimo točko P, ki ima za absciso $b = |P_0P|$, kar je približek za $a\sqrt[3]{2}$. Podrobnosti so razvidne na sliki 4.



Slika 4. Približna podvojitev kocke.

Konstrukcija je približno tako natančna kot Plemljeva konstrukcija pravilnega sedemkotnika (glej [4]). Pri kocki z robom $a = 100$ m je napaka pri robu tako približno podvojene kocke okoli 3,6 mm, kar pa se precej pozna pri prostornini, za katero lahko napako hitro ocenimo z diferencialnim računom. Kocka z robom x ima prostornino $V = x^3$, zato je $dV = 3x^2\,dx$. Za $x = 126$ m in $dx = 3{,}6$ mm dobimo $dV = 171$ m^3. Relativna napaka pa je majhna: samo okoli $8{,}5 \cdot 10^{-5}$. Dvomimo, da bi kdo v praksi podvajal tako veliko kocko.

LITERATURA

[1] G. Kocijančič (ured.), *Fragmenti predsokratikov*, Študentska založba, Ljubljana, 2012.

[2] B. von Pape, *Von Eudoxus zu Uhlhorn*, Books on Demand, Norderstedt, 2019.

[3] M. Jerman, *Reševanje treh velikih starogrških problemov*, Obzornik. mat. fiz. **59** (2012), 182–192.

[4] J. Plemelj, *Pravilni sedmerokotnik*, Obzornik. mat. fiz. **3** (1953), 134–135.

[5] M. Razpet, *Arhitova krivulja*, Obzornik. mat. fiz. **62** (2015), 1–11.