*Dr. Mara Cotič, Univerza na Primorskem, Pedagoška fakulteta Koper, mara.cotic@pef.upr.si*

*Dr. Darjo Felda, Univerza na Primorskem, Pedagoška fakulteta Koper, darjo.felda@pef.upr.si*

*Sanela Mešinović, Univerza na Primorskem, Pedagoška fakulteta Koper, sanela.mesinovic@pef.upr.si*

*Blaž Simčič, Univerza na Primorskem, Pedagoška fakulteta Koper, blaz.simcic@pef.upr.si*

# Vizualizacija geometrijskih problemov na geoplošči

Izvirni znanstveni članek

UDK 37.091.6:514

## POVZETEK

Učenčevo razumevanje geometrije je odvisno predvsem od njegove prostorske predstavljivosti, pri čemer mu učitelj lahko pomaga tako, da ga vodi skozi pet stopenj, ki so podrobneje opisane v prispevku. Prva, t. i. vizualna stopnja je za učence izjemnega pomena, saj na konkretni, neabstraktni ravni spoznavajo osnovne geometrijske pojme. Pri tem nizozemski didaktik Van Hiele predlaga uporabo različnih didaktičnih sredstev. Zagotovo je med temi sredstvi tudi geoplošča, ki jo najpogosteje uporabljamo za raziskovanje osnovnih geometrijskih pojmov. Poleg tega lahko učenci z uporabo geoplošče rešujejo geometrijske probleme in odkrivajo ter raziskujejo zanje nova dejstva. Tako smo pri projektu *Spodbujanje kulture raziskovanja in inoviranja pri pouku skozi proces vseživljenjskega učenja učiteljev* izvedli raziskavo (Cotič idr., 2010), kjer smo vizualizirali osnovne geometrijske pojme in izgradili problemski pouk geometrije z uporabo geoplošče ter pokazali, da z uporabo geoplošče pri geometriji učenci dobro usvojijo osnovne geometrijske pojme in h geometriji pristopajo problemsko. Primernost našega modela smo preverili z eksperimentom na vzorcu 113 učencev sedmega razreda osnovnih šol. Rezultati naše raziskave bodo uporabni predvsem pri posodobitvi pouka geometrije v tretjem triletju osnovne šole in s tem bodo prispevali k boljšemu geometrijskemu znanju učencev.

**Ključne besede:** poučevanje in učenje geometrije, geometrijski problemi, vizualizacija, geoplošča

# Visualisation of Geometric Problems on Geoboard


## ABSTRACT

Pupils' understanding of geometry largely depends on their spatial perception, and teachers can help them by guiding them through five stages, described in details in our article. The first, i.e., the visual level is of extreme importance for pupils, since they learn about geometric concepts on a concrete, non-abstract level. In this regard, the Dutch didactic expert van Hiele suggests using various didactic materials. Geoboard is certainly one, being most frequently used for researching the basic geometrical concepts. In addition, pupils can solve geometrical problems by using geoboard, as well as discover and study facts which are new to them. Thus, we have visualised basic geometric concepts in our research, and developed problem-based instruction of geometry by using the geoboard, as well as showed that by using geoboard in geometry lessons, pupils can learn the basic geometric concepts properly, and develop problem-based approach to geometry. We have tested the adequacy of our model in an experiment on a sample of 113 pupils attending the seventh grade of elementary school. The results of our research shall be applicable above all in modernisation of geometry teaching in the third cycle of elementary school education and shall consequently contribute to pupils having better knowledge of geometry.


**Key words:** geometry teaching and learning, geometry problems, visualisation, geoboard

## Uvod

Številne raziskave kažejo, da pouk, ki je naravnan k iskanju poti in strategij reševanja problemov, v veliki meri pospešuje učenje. Pri tem se poudarja predvsem aktivna vloga učencev. Dejavnost konkretnega izkustva je šele dobra osnova za prehod na simbolno raven razumevanja. Ta način poučevanja in učenja je še posebej zaželen na področju geometrije, ki za razliko od drugih matematičnih področij zahteva specifičen način mišljenja.

Pouk geometrije v osnovni šoli temelji predvsem na opazovanju in razvijanju prostorskih predstav. Za usvajanje geometrijskih pojmov učenci vedno najprej potrebujejo pouk, ki temelji na konkretnem, nazornem in neabstraktnem razumevanju. Nizozemski matematik Van Hiele (1986) predlaga, naj učenci pri učenju geometrije uporabljajo mozaike, sestavljanke (tangrame), narisane ploščice itd. Manipuliranje in igranje z navedenim materialom učencu omogoča prepotrebne izkušnje za usvajanje geometrijskih vsebin.

## Učenje in poučevanje geometrije

Poučevanje geometrije v osnovni šoli ni enostavna naloga, saj si otrok na svoji stopnji kognitivnega razvoja ne more predstavljati osnovnih geometrijskih pojmov, kot so točka, premica, kot itd. (Usiskin, 1987). Po Piagetovi teoriji spoznavnega razvoja je otrok v prvem šolskem obdobju zmožen logično misliti na konkretni ravni, zato v devetletni osnovni šoli uvajamo geometrijo »od telesa k točki«. Tako oblikovanje matematičnih pojmov poteka spiralno. Začne se z manipulacijo konkretnih primerov in učnih pripomočkov v prostorski geometriji ter postopoma preide na abstraktnejše pojme in geometrijsko simboliko.

Raziskave, s katerimi so se ukvarjali mnogi didaktiki in razvojni psihologi, so pokazale, da je učenčevo razumevanje geometrije odvisno predvsem od njegove lastne prostorske predstavljivosti.

Med njimi sta zelo znana didaktika Pierre in Dina Van Hiele, ki sta se osredotočila le na prostorsko mišljenje in v svoji teoriji razložila, da morajo učenci za razumevanje geometrije skozi pet stopenj, ki si sledijo v tem vrstnem redu: vizualna, opisna, abstraktna, formalna deduktivna in strogo matematična (Clements in Battista, 1992).

| | |
|---|---|
| Prva (vizualna) stopnja: | Otrok prepozna osnovne oblike, kot so krog, trikotnik, kvadrat, in jih tudi poimenuje, vendar njihovih lastnosti še ne zna opisati.<br>(Kvadrat je kot okno.) |
| Druga (opisna) stopnja: | Učenec prepozna lastnosti oblik, vendar med lastnostmi nekih geometrijskih oblik še ne vidi smiselnih povezav.<br>(Učenec zna našteti lastnosti kvadratov in pravokotnikov, vendar se ne zaveda, da so kvadrati podskupina pravokotnikov.) |
| Tretja (abstraktna) stopnja: | Učenec zazna odnose med lastnostmi in med oblikami. Sposoben je oblikovati abstraktne definicije in podati neformalne argumente za dokazovanje svojega znanja.<br>(Vsota ostrih kotov v pravokotnem trikotniku je 90°, saj je vsota notranjih kotov trikotnika 180°.) |

| | |
|---|---|
| Četrta (formalno deduktivna) stopnja | Učenec razume in logično interpretira aksiome in definicije. Sposoben je razumeti in oblikovati dokaze. |
| Peta (strogo matematična) stopnja: | Učenec razume uporabo posrednega dokaza in lahko razume neevklidsko geometrijo. |

Stopnje so med seboj povezane, saj rezultat razmišljanja na določeni stopnji postane predmet razmišljanja na naslednji (Van de Walle, 2001). Stopnje tudi niso odvisne od starosti v smislu Piagetovih razvojnih obdobij, ampak od geometrijskih izkušenj, ki jih ima učenec.

Učitelji skoraj vedno podajajo geometrijske pojme na stopnji višje, kot so učenci, zato Van de Walle (prav tam) opozarja, da morajo učitelji slediti učencem in poučevanje prilagoditi ustrezni stopnji.

Kot smo že omenili, v naši šolski geometriji izhajamo iz tridimenzionalnega sveta in šele nato prehajamo na manjše dimenzije. Tak pouk omogoča bolj praktičen in otroku prijazen vstop v svet geometrije (Cotič idr., 2003), zato lahko rečemo, da je Van Hielov model osnova geometriji v našem šolskem okolju. Zaporedje stopenj samo po sebi narekuje postopno prehajanje iz tridimenzionalnega sveta na manjše dimenzije (Cotič in Hodnik Čadež, 2002). Da pri tem ne bi prišlo do napačnih predstav, pa je manipuliranje s konkretnimi predmeti nujno.

Uporaba didaktičnih materialov pozitivno vpliva na aktivno vlogo učencev pri učenju oziroma pri konstrukciji znanja v smislu upoštevanja učenčevih idej v procesu odkrivanja in raziskovanja. Učitelj na tak način lažje uresničuje cilje pouka geometrije, ki se vse bolj dopolnjujejo s procesnimi znanji oziroma z znanji, naravnanimi k iskanju poti in strategij reševanja problemov. V geometriji je zaradi njene vizualne predstavljivosti veliko vsebin, pri katerih lahko učenci sami odkrijejo zanje nova dejstva.

Številne raziskave kažejo, da moramo otrokom pri oblikovanju matematičnih pojmov ponuditi različna didaktična sredstva (Nickson, 2004). Eno najbolj znanih sredstev pri geometriji je geoplošča, ki jo najpogosteje uporabljamo za vizualizacijo in raziskovanje osnovnih geometrijskih pojmov, kot so obseg, ploščina, trikotnik, večkotnik, skladnost, osna in središčna simetrija, vzporednost, pravokotnost … Poleg tega omogoča reševanje geometrijskih problemov, kar je pri današnjem pouku matematike izjemnega pomena. Kljub njeni uporabnosti pa jo v našem prostoru uporablja le malo učiteljev.

Tako smo v naši raziskavi izgradili problemski pouk geometrije z uporabo geoplošče. Osredotočili smo se predvsem na reševanje in raziskovanje geometrijskih problemov z uporabo geoplošče. V ta namen najprej definirajmo matematični problem oziroma geometrijski problem kot problem s področja geometrije.

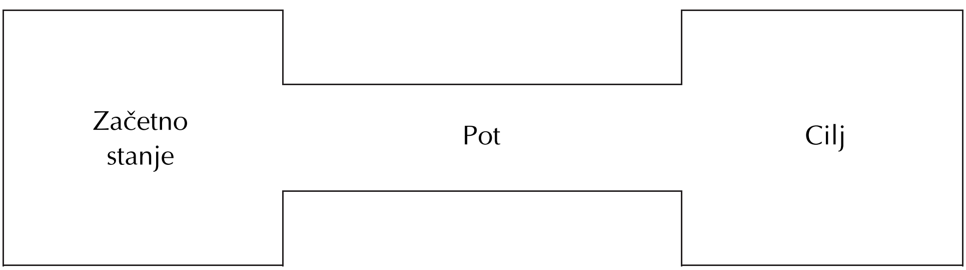
## Matematični problemi

Po Jaušovcu (1993), Moatesu in Schumacherju (1982) vsak problem določajo tri komponente: nezaželeno začetno stanje, zaželeno končno stanje in ovira, ki preprečuje prehod začetnega stanja v želeno končno stanje.

Tudi večina literature didaktike matematike pri definiciji matematičnega problema, torej tudi geometrijskega problema, navaja te tri komponente, ki jih Frobisher (1996) nekoliko drugače poimenuje:

1. začetno stanje ali situacija, v kateri je dana vsebina problema z ustreznimi podatki in informacijami;
2. cilj, ki ga mora reševalec problema doseči;
3. pot od začetnega stanja ali situacije do cilja, ki jo mora reševalec poiskati, da reši problem.

S prikazom to lahko ponazorimo na naslednji način (Frobisher, 1996):




_Prikaz 1:_ Komponente matematičnega problema

Če je pot od začetnega stanja do cilja znana in je ni treba poiskati, to ni več problem. Torej, če reševalec pozna strategijo reševanja, ne moremo več govoriti o problemu, ampak o *problemu vaji* oziroma *rutinskem problemu*. Problem je situacija, ki se od problema vaje razlikuje ravno v tem, da reševalec nima na razpolago ne postopka ne algoritma, ki bi ga zagotovo peljala k rešitvi problema, zaradi česar je ista situacija za nekoga problem, za drugega pa zgolj problem vaja.

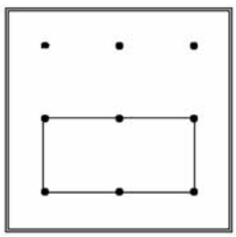
Razliko med problemom in problemom vajo ponazorimo s prikazom:

| **Problem** | **Problem vaja** |
|---|---|
| Začetno stanje — Pot ni znana — Cilj | Začetno stanje — Pot je znana — Cilj |

*Prikaz 2:* Razlika med problemom in problemom vajo

Vse tri komponente si poglejmo na naslednjem izredno preprostem primeru:

Primer 1: Na geoplošči 3 × 3 oblikuj pravokotnik z najdaljšo stranico, ki ni kvadrat. Koliko je ploščina oblikovanega pravokotnika, če je ploščinska enota E enaka ploščini kvadrata z najkrajšo stranico?



| **Začetno stanje:** | **Pot:** | **Cilj:** |
|---|---|---|
| Na geoplošči 3 × 3 oblikuj pravokotnik z najdaljšo stranico, ki ni kvadrat. Koliko je ploščina nastalega pravokotnika? | $a = 2\ e$<br>$b = 1\ e$<br>$p = 2 \bullet 1 = 2$ | Ploščina pravokotnika je 2E. |

*Prikaz 3:* Primer reševanja geometrijskega problema

Z *e* smo označili enoto za dolžino, ki je najkrajša razdalja med žebljičkoma, z *E* pa enoto za ploščino, to je ploščino najmanjšega kvadrata, ki ga lahko oblikujemo na geoplošči.

Za učenca, ki ima že usvojeno formulo za ploščino pravokotnika, je pot do cilja znana in zanj to ni problem, ampak problem vaja. Za mlajšega učenca, pri katerem šele uvajamo pojem ploščina lika in ki še ne pozna formule za ploščino pravokotnika, pa je problem, saj ga ne more rešiti zgolj na osnovi spomina, temveč z miselnimi postopki.

Razlika med problemom in problemom vajo pomaga bolje razumeti, kaj se je dogajalo pri tradicionalnem poučevanju in učenju geometrije. V običajni šolski praksi je učitelj učencu pokazal postopek oziroma strategijo reševanja pri določenem tipu problema, nato je učenec postopek vadil na podobnih primerih. V teh primerih ni delal drugega kot v standardne situacije apliciral memorizirane postopke in strategije reševanja geometrijskih problemov. Kakor hitro se je kontekst problema zamenjal, ga učenec ni bil sposoben rešiti. Poleg tega se je učenec največkrat srečeval s takimi problemi, pri katerih je bila rešitev ena sama in takoj dosegljiva. Posledica tega je bila, da si je ustvaril mnenje, da se vsak problem lahko reši brez miselnega napora; če pa pot do rešitve ni očitna, je učenec hitro prepričan, da problema ni mogoče rešiti (Frobisher, 1996).

## Vrste matematičnih problemov

Ločimo več vrst geometrijskih problemov, ki jih lahko opredelimo glede na pot in cilj. Glede na to klasifikacijo v literaturi didaktike matematike največkrat zasledimo tri kategorije problemov:

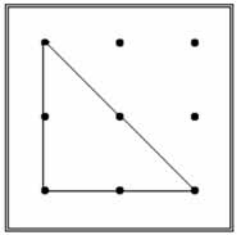
- probleme z zaprto potjo in zaprtim ciljem,
- probleme z odprto potjo in zaprtim ciljem,
- probleme z odprto potjo in odprtim ciljem (Frobisher, 1994).

*Problemi z zaprto potjo in zaprtim ciljem*


<u>*Prikaz 4:*</u> Problem z zaprto potjo in zaprtim ciljem

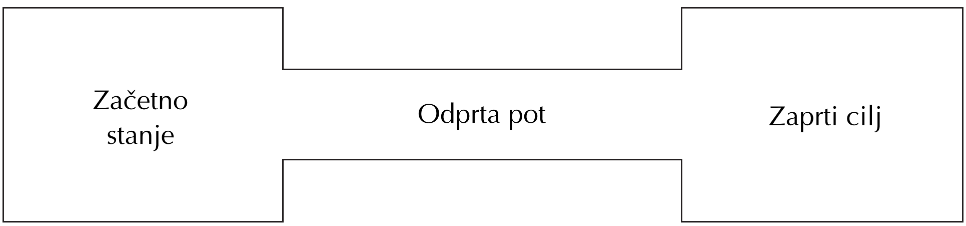
Kot primer vzemimo geometrijski problem na geoplošči.

Primer 2: Na geoplošči 3 × 3 oblikuj pravokotni trikotnik z največjo ploščino.



Veliko učiteljev in didaktikov matematike (Frobisher, 1996) je mnenja, da naj bi se učenec najprej srečal s takimi problemi, saj pri reševanju le-teh ugotovimo, ali učenec razume osnovne matematične pojme in koncepte, hkrati pa pojme in koncepte utrdimo in ponovimo. Šele nato učenca uvedemo v drugo kategorijo problemov.

*Problemi z odprto potjo in zaprtim ciljem*




Prikaz 5: Problem z odprto potjo in zaprtim ciljem

Spremenimo zgornji geometrijski problem z zaprto potjo in ciljem v problem z odprto potjo in zaprtim ciljem.

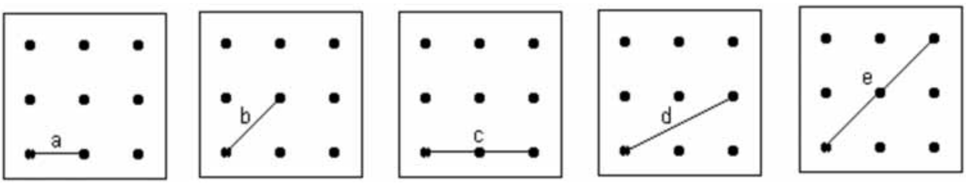
Primer 3: Na geoplošči 3 × 3 oblikuj vse možne pravokotne trikotnike. Koliko paroma neskladnih pravokotnih trikotnikov lahko dobimo?

Cilj je zaprt, saj naj bi učenec oblikoval toliko pravokotnih trikotnikov, kolikor jih je, oziroma toliko, kolikor misli, da jih je. Pot je odprta, ker mora učenec sam poiskati strategijo reševanja. Nekateri učenci ne izberejo nobene strategije in zgolj po principu slučajnosti iščejo različne pravokotne trikotnike; drugi imajo že sistematičen pristop pri oblikovanju rešitev. Ko učenci rešujejo take vrste problemov, velikokrat uporabijo že naučeno strategijo, toda kakor hitro bi morali za uspešno rešitev zamenjati strategijo, tega ne zmorejo in se preprosto zatečejo k »slepemu« oziroma naključnemu reševanju problema (Frobisher, 1994). Zato učenec potrebuje veliko izkušenj in nasvetov, da postane pri teh vrstah problemov sposoben izbrati in izpeljati primerno strategijo.

Različni načini reševanja primera 3, ki so jih izvedli učenci:

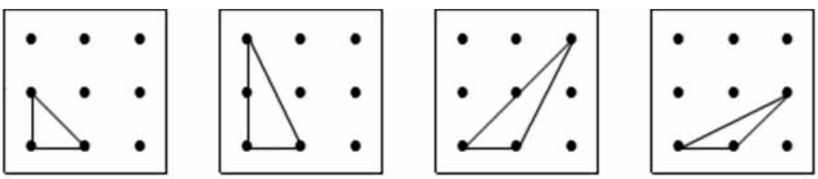
1. način: Učenec išče različne pravokotne trikotnike na nesistematičen način, torej brez uporabe neke strategije. Kmalu pa ugotovi, da na ta način težko poišče vse paroma neskladne pravokotne trikotnike ali pa da se mu kakšen ponovi.

2. način: Odloči se, da bo najprej poiskal vse trikotnike, na primer, glede na dolžino najkrajše stranice. Na geoplošči 3 × 3 je namreč med žebljički 5 različnih dolžin. Nato bo med najdenimi trikotniki izbral le pravokotne trikotnike.



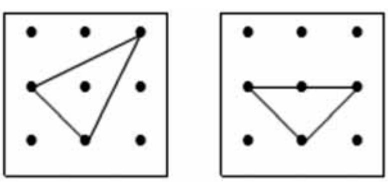

Natančneje si oglejmo ta način reševanja.

a) Koliko paroma neskladnih trikotnikov ima najkrajšo stranico dolgo *a*?



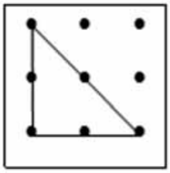
A B C D

b) Koliko paroma neskladnih trikotnikov ima najkrajšo stranico dolgo *b*?

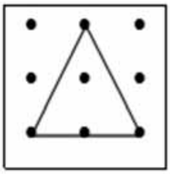


E F

c) Koliko paroma neskladnih trikotnikov ima najkrajšo stranico dolgo *c*?



G



H

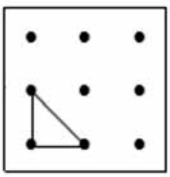
č) Koliko paroma neskladnih trikotnikov ima najkrajšo stranico dolgo *d*?

Takega trikotnika ni.

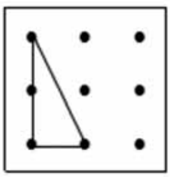
d) Koliko paroma neskladnih trikotnikov ima najkrajšo stranico dolgo *e*?

Takega trikotnika ni.

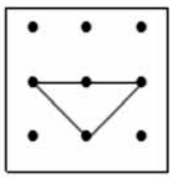
S strategijo najkrajše stranice učenec hitro ugotovi, da je na geoplošči 3 × 3 osem paroma neskladnih trikotnikov, izmed katerih so 4 pravokotni trikotniki.



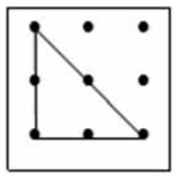
A



B

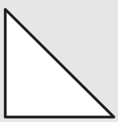


F



G

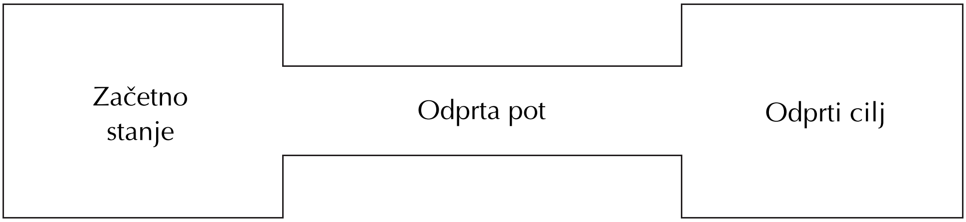
Vse pravokotne trikotnike lahko učenec opiše v preglednici:

|  | **Dolžini katet** | **Dolžina hipotenuze** |
|---|---|---|
| **A** | *a, a* | *b* |
| **B** | *a, c* | *d* |
| **F** | *b, b* | *c* |
| **G** | *c, c* | *e* |

3. način: Odloči se, da bo najprej poiskal vse enakostranične, nato enakokrake in raznostranične trikotnike, ter med njimi izbere pravokotne trikotnike.

Šele ko učenec pridobi dovolj izkušenj pri reševanju problemov druge kategorije, ga uvedemo v tretjo kategorijo problemov z odprto potjo in odprtim ciljem.

*Problemi z odprto potjo in odprtim ciljem*




*Prikaz 6:* Problem z odprto potjo in odprtim ciljem

Tokrat spremenimo prejšnji geometrijski problem z odprto potjo in zaprtim ciljem v problem z odprto potjo in odprtim ciljem.

Primer 4: Raziskuj pravokotne trikotnike na geoplošči 3 × 3.

Takoj vidimo, da se ta problem zelo razlikuje od prejšnjih dveh in od problemov, ki jih dajemo učencem pri pouku matematike. Tak problem bi lahko poimenovali problem raziskava, metodo, s katerim ga rešujemo, pa raziskovanje.

Osnovni namen takih problemov ni v razumevanju pojmov, ponavljanju snovi in različnih postopkov kot pri prvi in drugi kategoriji problemov, ampak v pridobivanju znanj o obravnavanju problemskih situacij. Učenca predvsem skušamo naučiti samostojnega razmišljanja v novih situacijah, seveda na nivoju, ki ga zmore in razume (Allen, 2006). To pa zahteva sposobnost postavitve izhodišč in ciljev, uporabo preprostih orodij za strukturiranje ter sposobnost iskanja pravilnosti in zakonitosti v pregledno strukturirani množici. Gre torej za neka osnovna in preprosta problemska znanja (Magajna, 1994).

Različni načini raziskovanja, ki so jih izbrali učenci:

Primer 4.1: Učenci so se odločili, da bo njihov cilj izračunati ploščine vseh različnih pravokotnih trikotnikov na geoplošči 3 × 3 in jih nato urediti po ploščini od najmanjšega do največjega.

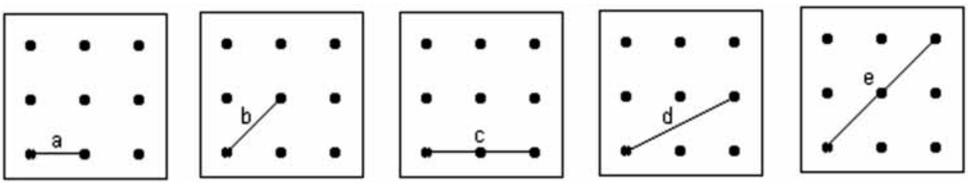
Primer 4.2: Učenci so se odločili, da bodo pravokotne trikotnike razvrstili glede na lastnost »je enakokrak«.

Primer 4.3: Učenci so se odločili, da bodo pravokotne trikotnike, ki so jih poiskali na geoplošči 3 × 3, razvrstili glede na naslednji dve lastnosti: »je enakokrak« in »ploščina je večja od enote E«. Razvrstitev so ponazorili z različnimi prikazi.

Pri problemih razvrščanja je zelo pomembno, da se učenec nauči uporabljati različne prikaze (Euler-Vennov, Carrollov drevesni prikaz). Tako lahko reši problem na način, ki ga razume, oziroma na način, ki se mu zdi najprimernejši.

Poglejmo si rešitev primera 4.1.

1. način: Učenci najprej določijo dolžine stranic pravokotnih trikotnikov. Dolžino vodoravnih in navpičnih stranic je enostavno določiti. Z *e* označimo enoto za dolžino, ki je najkrajša razdalja med vodoravnima žebljičkoma, in preštejemo, koliko je takih enot. Nekaj težav z določanjem diagonalnih stranic lahko imajo mlajši učenci, saj jo morajo oceniti. Starejši učenci pa lahko uporabijo Pitagorov izrek.




$a = 1e$

$b = \sqrt{a^2 + a^2}$, $b = \sqrt{2}e$

$c = 2e$

$d = \sqrt{a^2 + c^2}$, $d = \sqrt{5}e$

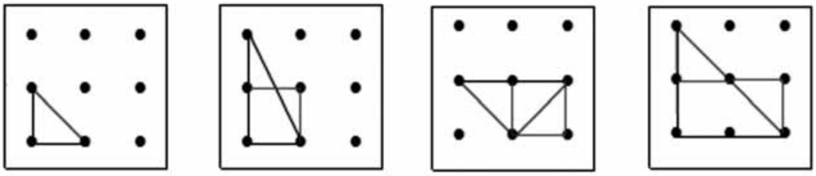
$e = \sqrt{c^2 + c^2}$, $e = 2\sqrt{2}e$

Učenci izračunajo ploščine pravokotnih trikotnikov na geoploščі s formulo za ploščino trikotnika in jih uredijo po ploščini od najmanjšega do največjega.

| | **Dolžini katet** | **Dolžina hipotenuze** | **Ploščina pravokotnega trikotnika** $= \dfrac{\textbf{kateta 1 x kateta 2}}{\textbf{2}}$ |
|---|---|---|---|
| **A** | *a, a* | *b* | $\frac{1}{2}E$ |
| **B** | *a, c* | *d* | *1E* |
| **F** | *b, b* | *c* | *1E* |
| **G** | *c, c* | *e* | *2E* |

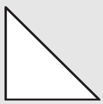
Rešitev: **A < B = F < G**

2. način: Kjer je možno, učenci pravokotne trikotnike preoblikujejo v ploščinsko enake pravokotnike, kot kaže slika.



A B F G

Ploščino pravokotnih trikotnikov ugotovijo tako, da preštejejo kvadratke (*E*), nato pa trikotnike uredijo po ploščini od najmanjšega do največjega.

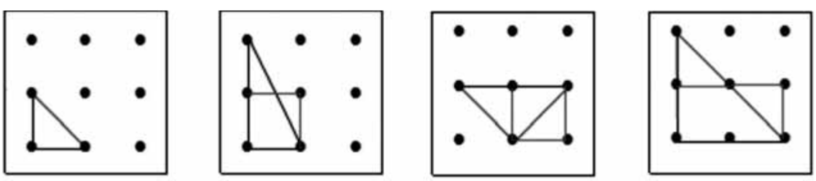
|  | Ploščina |
|---|---|
| **A** | $\frac{1}{2}\ E$ |
| **B** | *1E* |
| **F** | *1E* |
| **G** | *2E* |

Rešitev: **A < B = F < G**

3. način: Učenci določijo ploščino pravokotnih trikotnikov s pomočjo tako imenovane »teorije žebljičkov«, ki velja za vse like na geoplošči. Teorija žebljičkov pravi, da lahko izračunamo ploščino lika na geoplošči tako, da preštejemo žebljičke, ki se jih elastika dotika (žebljički, ki ležijo na stranici lika) in to število razpolovimo. Nato dodamo število žebljičkov, ki ležijo v notranjosti lika in se elastike ne dotikajo, ter odštejemo 1. To lahko zapišemo s formulo:

$$p = \frac{i}{2} + k - 1$$

kjer so *i* žebljički, ki ležijo na stranici lika, *k* pa žebljički v notranjosti lika.



| A | B | F | G |
|---|---|---|---|
| $i = 3$ | $i = 4$ | $i = 4$ | $i = 6$ |
| $k = 0$ | $k = 0$ | $k = 0$ | $k = 0$ |
| $p = \frac{1}{2}\ E$ | $p = 1E$ | $p = 1E$ | $p = 2E$ |

Pravokotne trikotnike uredijo po ploščini od največjega do najmanjšega:

**G > F = B > A**.

Učenci v razredu lahko komentirajo vse tri načine reševanja geometrijskih problemov. (V čem se razlikujejo? Kaj imajo skupnega? Kateri se ti zdi »najenostavnejši« oziroma »najlažji«? Zakaj?)

## Empirični del

*Namen raziskave*

Z raziskavo želimo pokazati, da z uporabo geoplošče pri geometriji učenci dobro usvojijo osnovne geometrijske pojme in h geometriji pristopajo problemsko. Geoplošča namreč omogoča reševanje tako zaprtih geometrijskih problemov kot raziskovanje odprtih geometrijskih problemov. Dobljeni rezultati naj bi predvsem prispevali k oblikovanju problemskega pouka geometrije z uporabo geoplošče pri pojmih lik, oglišče, stranica, kot in skladnost.

*Raziskovalna hipoteza*

Učenci sedmih razredov devetletne osnovne šole, deležni problemskega pouka geometrije z uporabo geoplošče, so pri reševanju geometrijskih nalog uspešnejši kot učenci, deležni klasičnega transmisijskega pristopa brez uporabe geoplošče.

*Raziskovalna metodologija*

Osnovna raziskovalna metoda in raziskovalni pristop

V raziskavi je v okviru empiričnega raziskovalnega pristopa uporabljen pedagoški eksperiment, ker je primeren pri preučevanju »novosti« (geoplošča), ki jih vnašamo v pouk matematike. Torej je v naši raziskavi uporabljena kavzalno eksperimentalna metoda.

*Model eksperimenta*

Načrtovali smo enofaktorski model eksperimenta s šolskimi oddelki kot primerjalnimi skupinami z dvema modalitetama. Za primerjalne skupine smo vzeli obstoječe oddelke sedmega razreda na različnih osnovnih šolah iz obalno-kraške regije.

Pred eksperimentom ni bila opravljena izenačitev oddelkov do slučajnostnih razlik, torej randomizacije ni bilo.

Skupino učencev, v katero smo uvedli eksperimentalni faktor, smo imenovali eksperimentalna skupina (ES), skupino učencev, ki ni bila deležna eksperimentalnega faktorja, pa kontrolna skupina (KS). Vključenih je bilo šest učiteljev, ki smo jih naključno razvrstili v eksperimentalno in kontrolno skupino.

Eksperimentalna skupina je bila deležna popolnega eksperimentalnega postopka, ki je vključeval problemski pouk geometrije z uporabo geoplošče pri učenju in poučevanju osnovnih geometrijskih pojmov, kot so liki, koti, stranice, oglišča in skladnost. Kontrolna skupina je pri pouku uporabljala tradicionalna didaktična sredstva.

*Vzorec eksperimenta*

V raziskavi je sodelovalo 113 učencev sedmega razreda obalno-kraških osnovnih šol – 62 učencev iz dveh osnovnih šol je bilo vključenih v eksperimentalno skupino (ES), 51 učencev iz drugih dveh osnovnih šol pa v kontrolno skupino (KS).

*Spremenljivke*

Neodvisna spremenljivka je eksperimentalni dejavnik. K odvisnim spremenljivkam sodijo vse spremenljivke, s katerimi smo preverjali znanje v eksperimentalni (ES) in kontrolni skupini (KS), in sicer dosežki otrok pri geometriji na različnih ravneh znanja po Gagnejevi taksonomiji:

- dosežki pri poznavanju in razumevanju geometrijskih pojmov (I),
- dosežki pri uporabi procedur (II),
- dosežki pri reševanju enostavnih problemov (III),
- dosežki pri reševanju zahtevnejših problemov (IV).

*Potek raziskave in zbiranje podatkov*

| | |
|---|---|
| 1. faza | Priprava gradiv za učitelje. Formiranje eksperimentalne in kontrolne skupine učiteljev. |
| 2. faza | Pripravljanje učiteljev iz eksperimentalne skupine na eksperiment. |

| | |
|---|---|
| 3. faza | Izvedeno je bilo prvo empirično snemanje – testiranje izhodiščnega znanja učencev eksperimentalne in kontrolne skupine pred uvedbo eksperimentalnega faktorja v oddelkih sedmega razreda osnovnih šol. |
| 4. faza | Vpeljava eksperimentalnega dejavnika v eksperimentalno skupino. |
| 5. faza | Izvedeno je bilo drugo empirično snemanje (testiranje znanja ob koncu eksperimenta) v eksperimentalni in kontrolni skupini. |

*Preglednica 1:* Prikaz poteka raziskave

Raziskava je potekala v petih fazah v šolskem letu 2009/10.

Začetno in končno znanje iz geometrijskih vsebin eksperimentalne in kontrolne skupine smo preverili z začetnim in končnim testom znanja, ki smo ju za namen raziskave izdelali sami. Pri sestavi testa smo upoštevali veljavni učni načrt in cilje, ki so v njem opredeljeni, ter Gagnejevo taksonomijo. Oba testa sta vsebovala 7 nalog.

*Obdelava podatkov*

Za ugotavljanje razlik v znanju matematike na vseh ravneh znanja med učenci eksperimentalne in kontrolne skupine na začetku eksperimenta smo uporabili t-preizkus; ob koncu eksperimenta pa smo v želji za objektivnejšo analizo rezultatov v obdelavo podatkov vključili analizo kovariance z eno samo kovariablo (rezultati začetnega testa).

*Rezultati in interpretacija*

Rezultate smo interpretirali v skladu z zahtevo po preglednosti in logiki dokazovanja postavljenih hipotez. Pri vsaki interpretaciji rezultatov je dodana še preglednica z rezultati. Pri preizkusu hipotez smo se ravnali po pravilu, da je največje dopustno tveganje za zavrnitev hipoteze 5-odstotna napaka.

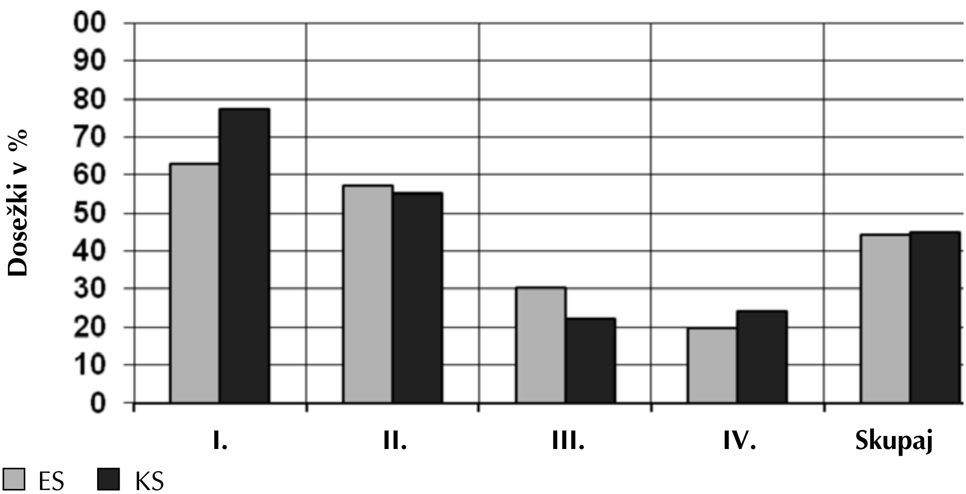
Analizirajmo razlike v znanju geometrije na vseh štirih taksonomskih ravneh znanja med učenci eksperimentalne (ES) in kontrolne skupine (KS) pred začetkom eksperimenta.

V preglednici 2 so zajete aritmetične sredine in standardni odkloni začetnega testa na štirih taksonomskih ravneh znanja (poznavanje in razumevanje geometrijskih pojmov (I), uporaba procedur (II), reševanje enostavnih problemov (III), reševanje zahtevnejših problemov (IV)) ter skupni dosežek med učenci ES in KS.

| **Dosežki učencev (začetni test)** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Raven znanja** | **Skupina** | **N** | **Aritmetična sredina** | **Standardni odklon** | **Dosežki v %** |
| I. | ES | 62 | 5,05 | 1,65 | 63,10 |
| | KS | 51 | 6,18 | 1,32 | 77,21 |
| II. | ES | 62 | 8,03 | 3,44 | 57,37 |
| | KS | 51 | 7,74 | 3,87 | 55,32 |
| III. | ES | 62 | 3,02 | 2,15 | 30,16 |
| | KS | 51 | 2,20 | 1,97 | 21,96 |
| IV. | ES | 62 | 1,58 | 2,21 | 19,76 |
| | KS | 51 | 1,92 | 2,50 | 24,02 |
| **Skupaj** | **ES** | **62** | **17,44** | **7,76** | **44,19** |
| | **KS** | **51** | **18,04** | **7,74** | **45,10** |

Preglednica 2: Osnovni statistični parametri začetnega testa pri geometriji na štirih taksonomskih ravneh znanja in skupni dosežek med učenci ES in KS

Prikažimo s histogramom še dosežke v odstotkih (%) pri geometriji na vseh štirih ravneh znanja.




Graf 1: Dosežki učencev v odstotkih (%) na štirih taksonomskih ravneh med ES in KS pred začetkom eksperimenta

Kot vidimo, so v začetnem stanju opazna odstopanja med ES in KS. ES je dosegla višje rezultate na II. in III. taksonomski ravni znanja. KS skupina pa je bila v začetnem testu občutno boljša na I. ravni ter nekoliko boljša na IV. taksonomski ravni znanja.

S t-preizkusom smo preverili, ali so te razlike med ES in KS statistično pomembne.

| Taksonomske ravni | t | Prostostne stopnje | Raven statistične pomembnosti | Razlika sredin | Standardna napaka |
|---|---|---|---|---|---|
| **I.** | –4,029 | 110,922 | 0,000 | –1,128 | 0,286 |
| **II.** | 0,418 | 111 | 0,677 | 0,287 | 0,687 |
| **III.** | 2,097 | 111 | 0,038 | 0,820 | 0,391 |
| **IV.** | –0,769 | 111 | 0,444 | –0,341 | 0,443 |
| **Skupaj** | **–0,245** | **111** | **0,807** | **–0,362** | **1,474** |

*Preglednica 3:* Prikaz razlik na vseh štirih taksonomskih ravneh znanja med učenci ES in KS (t-preizkus) v začetnem testu

Na osnovi vrednosti t-koeficienta in ravni statistične pomembnosti t-koeficienta lahko ugotavljamo, v katerih spremenljivkah se rezultati med ES in KS statistično pomembno razlikujejo. Analiza teh rezultatov kaže, da se pojavljajo statistično pomembne razlike v korist KS pri poznavanju in razumevanju osnovnih geometrijskih pojmov (I). Statistično pomembne razlike opazimo tudi pri reševanju enostavnih problemov (III), in sicer v korist ES. Že rezultati aritmetičnih sredin so kazali, da med ES in KS ni bistvenih razlik v uporabi procedur (II) in reševanju zahtevnejših problemov (IV), kar nam je posredno potrdil tudi t-preizkus.

Na osnovi teh podatkov lahko zaključimo, da se po nekaterih taksonomskih ravneh ES in KS sicer razlikujeta, vendar skupna ocena kaže, da večjih razlik v znanju geometrijskih vsebin med skupinama ni.

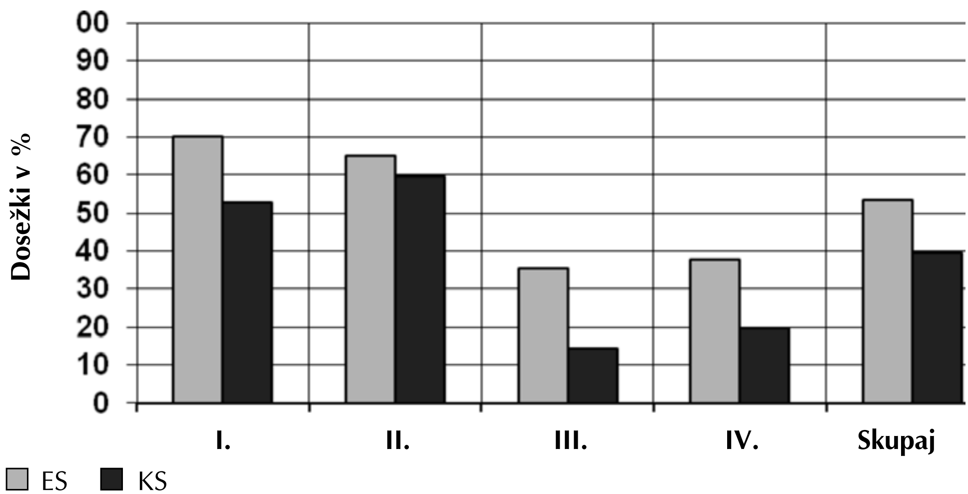
Analizirajmo razlike v znanju geometrije na vseh štirih taksonomskih ravneh znanja med učenci ES in KS ob koncu eksperimenta.

Kot smo že omenili, smo pri pouku geometrije v ES uvedli problemski pouk z uporabo geoplošče. Učenci KS so si za vizualizacijo pojmov pomagali z drugimi didaktičnimi sredstvi, predvsem z modeli geometrijskih likov in s klasičnimi didaktičnimi igrami, kot so tangrami, taktilo, domine z geometrijskimi liki idr. Zato nas je zanimalo tudi, kolikšno znanje dosežejo učenci, ki so deležni problemskega pouka z uporabo geoplošče, v primerjavi s klasičnim poučevanjem geometrije.

V spodnji preglednici so zajete aritmetične sredine in standardni odkloni na štirih taksonomskih ravneh na končnem testu znanja.

| **Dosežki učencev na prvi ravni znanja (končni test)** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Raven znanja** | **Skupina** | **N** | **Aritmetična sredina** | **Standardni odklon** | **Dosežki v %** |
| I. | ES | 62 | 5,61 | 1,94 | 70,16 |
| | KS | 51 | 4,22 | 1,83 | 52,70 |
| II. | ES | 62 | 8,45 | 3,54 | 65,01 |
| | KS | 51 | 7,73 | 3,78 | 59,43 |
| III. | ES | 62 | 3,18 | 3,39 | 35,30 |
| | KS | 51 | 1,29 | 2,43 | 14,38 |
| IV. | ES | 62 | 2,65 | 2,23 | 37,79 |
| | KS | 51 | 1,37 | 1,54 | 19,61 |
| **Skupaj** | **ES** | **62** | **19,89** | **9,05** | **53,57** |
| | **KS** | **51** | **14,61** | **7,74** | **39,48** |

*Preglednica 4:* Osnovni statistični parametri končnega testa pri geometriji na štirih taksonomskih ravneh znanja in skupni dosežek med učenci ES in KS




*Graf 2:* Dosežki učencev v odstotkih (%) na štirih taksonomskih ravneh med ES in KS po končanem eksperimentu

Če primerjamo razlike v rezultatih spremenljivk med ES in KS, vidimo, da je ES bila pri reševanju geometrijskih nalog uspešnejša na vseh štirih ravneh znanja.

Poglejmo si še, ali se rezultati med ES in KS statistično pomembno razlikujejo (t-preizkus).

| **Taksonomske ravni** | **t** | **Prostostne stopnje** | **Raven statistične pomembnosti** | **Razlika sredin** | **Standardna napaka** |
|---|---|---|---|---|---|
| **I.** | 3,916 | 111 | 0,000 | 1,397 | 0,357 |
| **II.** | 1,052 | 111 | 0,295 | 0,726 | 0,690 |
| **III.** | 3,436 | 109,09 | 0,001 | 1,883 | 0,548 |
| **IV.** | 3,576 | 107,824 | 0,001 | 1,273 | 0,356 |
| **Skupaj** | **3,290** | **111** | **0,001** | **5,279** | **1,605** |

*Preglednica 5:* Prikaz razlik na vseh štirih taksonomskih ravneh znanja med učenci ES in KS (t-preizkus) v končnem testu

Iz zgornje preglednice (preglednica 5) je razvidno, da se skupini statistično pomembno razlikujeta na I., III. in IV. taksonomski ravni znanja. Izkazalo se je, da so učenci, ki so bili deležni problemskega pouka z uporabo geoplošče, veliko boljše kot učenci iz kontrolne skupine poznali in razumeli geometrijske pojme, kot so lik, stranica in kot. Eksperimentalna skupina je bila občutno uspešnejša tudi pri reševanju enostavnih in zahtevnejših geometrijskih problemov.

Iz preglednice osnovnih statističnih parametrov (preglednica 4) in iz t-preizkusa (preglednica 5) razberemo, da je naloge, kjer so učenci morali uporabiti postopke (II. raven znanja), uspešneje reševala eksperimentalna skupina, vendar razlika med skupinama ni statistično pomembna. Pri klasičnem pouku geometrije je namreč poučevanje in učenje zelo usmerjeno v obvladovanje postopkov, ki se največkrat izvajajo, ne da bi učenci razumeli pojme.

V želji za objektivnejšo analizo naših rezultatov smo v obdelavo podatkov vključili tudi analizo kovariance. Za analizo rezultatov ob koncu našega eksperimenta je namreč odločilno, ali se glede na kontrolne spremenljivke ES in KS med seboj bistveno ne razlikujeta. Če skupini nista izenačeni, potem razlik ob koncu eksperimenta ne moremo pripisati samo vplivu eksperimentalnega dejavnika (geoplošče), ampak je nanje vplivalo tudi neizenačeno začetno stanje obeh skupin. Ravno analiza kovariance pa statistično odpravlja vpliv različnih položajev ES in KS.

| Vir variacije | Vsota kvadratov | Prostostne stopnje | Srednji kvadrirani odklon | F | p |
|---|---|---|---|---|---|
| Sospremenljivka | | | | | |
| Začetni test | 3,04514 | 1 | 3,04514 | 120,46 | 0,0000 |
| Skupini (EK in KS) | 0,638275 | 1 | 0,638275 | 25,25 | 0,0000 |
| OSTANEK | 2,78069 | 110 | 0,025279 | | |
| **Skupaj** | **6,40249** | **112** | | | |

Preglednica 6: Test kovariance v končnem stanju po parcializaciji rezultatov začetnega stanja

Analiza kovariance je pokazala, da so razlike v začetnem testu med ES in KS statistično pomembne. Kljub tem razlikam, ob upoštevanju le-teh pri analizi končnega testa, se je med skupinama pokazala statistično pomembna razlika v končnem stanju.

Na podlagi vseh dobljenih rezultatov in njihove analize lahko zaključimo, da je model geometrijskega pouka, ki je bil problemsko zastavljen in pri katerem so učenci uporabljali geoploščo, zelo uspešen, zato lahko potrdimo svojo raziskovalno hipotezo:

Učenci sedmih razredov devetletne osnovne šole, deležni problemskega pouka geometrije z uporabo geoplošče, so pri reševanju geometrijskih nalog uspešnejši kot učenci, deležni klasičnega transmisijskega pristopa brez uporabe geoplošče.

## Sklep

S prispevkom želimo seznaniti učitelje in strokovno javnost v slovenskem šolskem prostoru z raziskavo o učenju in poučevanju geometrije, ki je pokazala, da z uporabo geoplošče pri geometriji učenci dobro usvojijo osnovne geometrijske pojme in h geometriji pristopajo problemsko. Podobna raziskava je bila narejena v Italiji leta 1983 (Checcucci in Prodi, 1983).

V naši raziskavi so učenci na geoplošči raziskovali in odkrivali lastnosti geometrijskih pojmov in objektov, spoznali in razumeli nove geometrijske izraze, reševali različne vrste problemov in uporabili ter povezovali usvojena znanja. Ravno geoplošča je didaktično sredstvo, ki pri učencu razvija geometrijsko mišljenje ter višje miselne procese, kot so abstrakcija in generaliziranje.

Z izvajanjem eksperimenta in doseganjem ciljev, ki smo si jih zastavili, smo želeli prispevati k uporabi različnih pristopov in aktivnejših metod učenja ter poučevanja geometrije. Tako bomo z metodami dela, ki vključujejo raziskovalne dejavnosti in učenje z odkrivanjem, razvili miselne strategije in veščine otrok, da bodo pridobljena znanja neposredno uporabljali pri reševanju geometrijskih problemov v novih problemskih situacijah.

## LITERATURA

Allen, D. S. (2006). Geometry: More than just shapes. *Mathematics teaching in the middle school, 12* (2), 100.

Checcucci, V. in Prodi, G. (1983). *Proposte didattiche per la matematica*. Brescia: Editrice La Scuola.

Clements, D. in Battista, M. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. V A. Grouws Douglas (ur.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (str. 420–464). New York: MacMillan.

Cotič, M. in Hodnik Čadež, T. (2002). Teoretična zasnova modela sprememb začetnega pouka matematike v devetletni osnovni šoli. *Sodobna pedagogika, 53* (2), 8–24.

Cotič, M., Felda, D. in Hodnik Čadež, T. (2003). *Igraje in zares v svet matematičnih čudes. Kako poučevati matematiko v 1. razredu devetletne osnovne šole*. Ljubljana: DZS.

Cotič, M., Mešinović, S., Valenčič Zuljan, M. in Simčič, B. (2010). Geometrical Problems and the Use of Geoboard. V M. Valenčič Zuljan in J. Vogrinc (ur.), *Facilitating Effective Student Learning throught Teacher Research and Innovation* (str. 375–398). Ljubljana: Pedagoška fakulteta.

Frobisher, L. (1994). Problems, Investigations and an Investigative Approach. V A. Orton in G. Wain (ur.), *Issues in Teaching Mathematics* (str. 150–173). London: Cassell.

Frobisher, L. (1996). Changing a mathematics Problem into an Investigation. V S. Kmetič (ur.), *Prispevki k poučevanju matematike (The Improvement of Mathematics Education in Secondary Schools: a Tempus Project)* (str. 239–244). Maribor: Rotis.

Jaušovec, N. (1993). *Naučiti se misliti*. Nova Gorica: Educa.

Magajna, Z. (1996). Štirje iz enega. *Matematika v šoli, 4* (1), 23–26.

Moates, R. in Schumacher, G. M. (1983). *Psicologia dei processi cognitivi*. Bologna: Il Mulino.

Nickson, M. (2004). *Teaching and learning Mathematics 2nd edition: A guide to recent research and its applications*. London: Continuum.

*Učni načrt. Matematika*. (1998). Ljubljana: Nacionalni kurikularni svet. Področna kurikularna komisija za osnovno šolo. Predmetna kurikularna komisija za matematiko.

Usiskin, Z. (1987). Resolving the Continuing Dillemas in School Geometry. V M. M. Lindquist (ur.), *Learning and Teaching Geometry, K-12* (str. 17–32). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Van de Walle, J. (2001). Geometric thinking and geometric concepts. *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally, 4th ed*. Boston: Allyn and Bacon.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. London: Academic Press, Inc.