Apolonijev problem[1]

Petra Podlogar, Tamara Pogačar, Ana Štuhec
Mentorica: Tatiana Elisabet Sušnik

→ Za dane tri krožnice smo želeli konstruirati še eno, ki bi se dotikala vseh treh hkrati. Za rešitev tega problema smo spoznali invertiranje čez krožnico, uporabili pa smo tudi program GeoGebra, v katerem smo za boljšo predstavitev problematike rešitev tudi konstruirali.

Uvod

Marsovski vesoljski ladji se je na vzhodni medgalaktični obvoznici pokvarila navigacijska naprava in strmoglavila je neznano kam v Bermudski trikotnik. Iznajdljivi Marsovci so na hipernetu uspeli poiskati zemljevid območja in izbrskati, da se na Bermudskih otokih, Portoriku in obali Floride nahajajo trije svetilniki, ki sinhrono oddajajo signal. Kako se bodo opremljeni z zemljevidom, podatkih o časovnih razlikah med prispelimi signali in matematičnim znanjem rešili iz zagate?

Strmoglavljenci so se iskanja položaja lotili z geometrijo. Vedeli so, da je hiperbola množica točk, za katere je absolutna vrednost razlike razdalj od dveh izbranih točk konstantna. Iz časovnih razlik v prejemu signalov so za vsak par svetilnikov izračunali razliko med razdaljama od njihovega nahajališča do posameznega svetilnika. Na zemljevidu so nato želeli narisati hiperbole z gorišči na mestu svetilnikov in konstantno razliko razdalj, ki ustreza razlikam med razdaljami do svetilnikov, ter poiskati njihovo presečišče (ki predstavlja lego Marsovcev). A kaj več od šestila in geotrikotnika med razbitinami niso našli. Newton jim je prišepnil, da se je z ekvivalentnim geometrijskim problemom ukvarjal Apolonij. Seveda smo jim tudi zemeljski MaRSovci priskočili na pomoč.

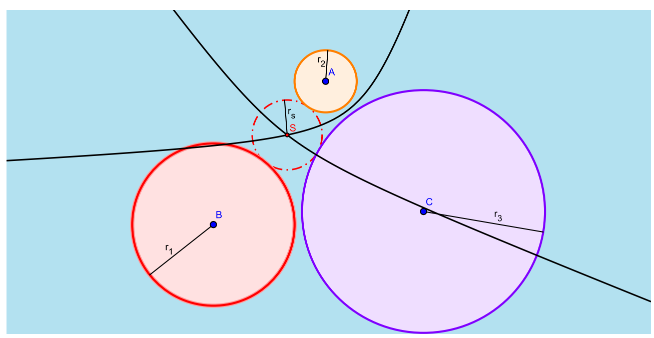
Apolonijeva krožnica

Apolonij iz Perge je v 3. stoletju pr. n. št. formuliral in rešil sledeči problem:

Problem. Načrtaj vsaj eno krožnico, ki je tangentna na tri dane krožnice v ravnini.

Kako sta Apolonijev problem in težave Marsovcev sploh povezana?

Recimo, da je razlika med razdaljama do svetilnika A in do svetilnika B enaka x ter razlika med razdaljama do svetilnika A in do svetilnika C enaka y. Ladja S je od točke A oddaljena za $r_s + r_2$, od točke B za $r_s + r_1$ in od točke C za $r_s + r_3$ (slika 1). Torej je razlika med razdaljama do svetilnika A in do svetilnika B enaka $r_1 - r_2 = x$ ter razlika med razdaljama do svetilnika A in do svetilnika C enaka



SLIKA 1.
Slika prikazuje oba načina iskanja lege Marsovcev. Ti se nahajajo na presečišču dveh hiperbol, ki je hkrati središče krožnice; ta je rešitev Apolonijevega problema.

[1]Članek je nastal na poletnem taboru MaRS 2016 (Matematično Raziskovalno Srečanje za srednješolce).

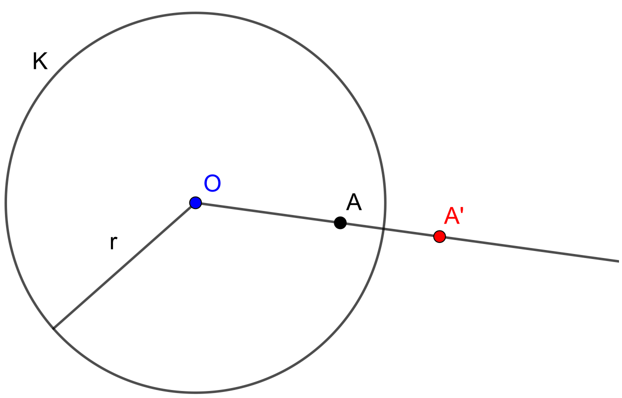
$r_3 - r_2 = y$. Izberemo poljubni r_2 in na zemljevidu narišemo krožnice s središči v svetilnikih in polmeri $r_1 = x + r_2$, r_2 in $r_3 = y + r_2$. Točka, kjer se nahajajo Marsovci, je središče krožnice, ki je tangentna na vse tri krožnice s središči v svetilnikih.

V zgodovini so se matematiki (in obupani brodolomci) naloge lotevali na različne načine; med drugim s hiperbolami, nekateri pa algebraično. Mi smo se konstrukcije krožnice lotili z inverzijo. Poglejmo si, kaj je inverzija.

Definicija. Inverzna točka točke A glede na krožnico K s središčem O in polmerom r je točka A', ki leži na poltraku OA tako, da velja

- $|OA| \cdot |OA'| = r^2$.

Na sliki 2 vidimo inverz točke A glede na krožnico K. Posebnost je središče O, katerega sliko nam definicija ne poda. Po dogovoru se preslika v neskončnost (in točka v neskončnosti v središče O).



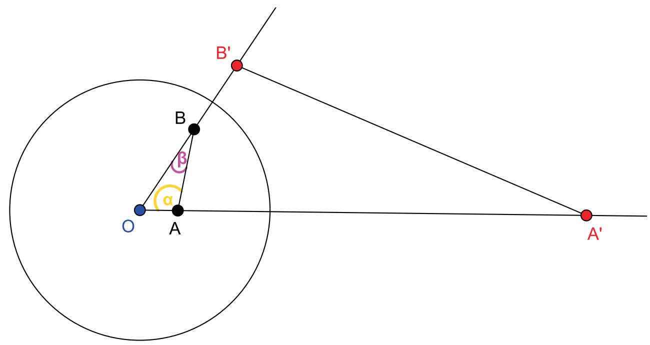
SLIKA 2.
Inverzna točka točke A

Navedimo nekaj lastnosti inverzije. Inverzija ohranja kote in preslika iz notranjosti krožnice K v njeno zunanjost (in iz zunanjosti v njeno notranjost).

Preslikava preslika

- točko, ki se nahaja na krožnici K, samo vase;
- premico, ki ne gre skozi središče O, v krožnico, ki poteka skozi središče O;
- premico, ki gre skozi središče O, samo vase;
- krožnico, ki gre skozi središče O, v premico;
- krožnico, ki ne gre skozi središče O, pa v krožnico.

Poglejmo si dokaz lastnosti ohranjanja kotov: Izberimo dve točki A in B. V trikotniku OAB označimo z α kot z vrhom v točki A in z β kot z vrhom v točki B. Narišimo še točki A' in B', ki sta inverzni točki točk A in B (slika 3).



SLIKA 3.
Točki A in B, pripadajoča kota in inverzni točki

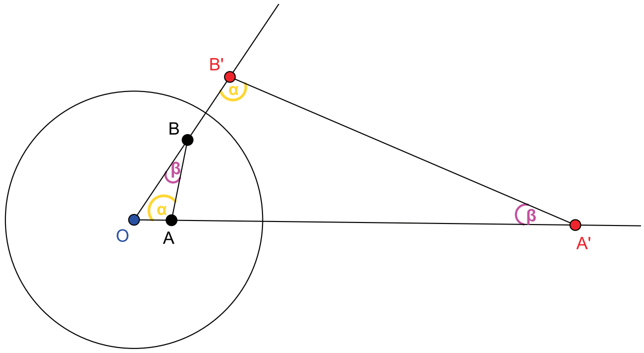
Oglejmo si trikotnik $OA'B'$. Vemo, da velja $|OA| \cdot |OA'| = r^2$ in $|OB| \cdot |OB'| = r^2$, torej velja $|OA| \cdot |OA'| = |OB| \cdot |OB'|$ ali drugače zapisano

- $\dfrac{|OA|}{|OB|} = \dfrac{|OB'|}{|OA'|}$.

Izrek o podobnosti trikotnikov pravi, da sta si dana trikotnika podobna, če se ujemata v razmerju dveh stranic in kotu med njima. Ker je kot z vrhom v točki O trikotnikoma OAB in $OA'B'$ skupen, iz zgornjega razmerja sledi, da sta si trikotnika OAB in $OB'A'$ podobna. Kot z vrhom v točki A' je torej enak β, kot z vrhom v točki B' pa je enak α (slika 4).

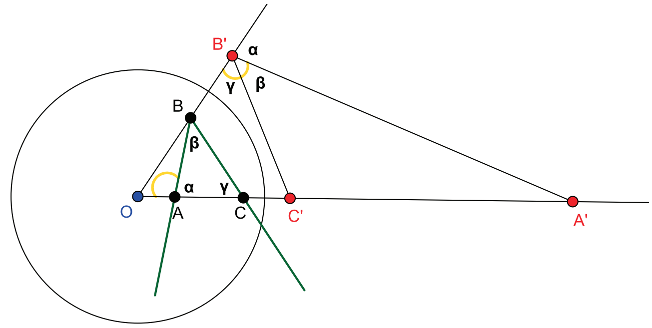
Vzemimo zdaj kot, katerega krak ne prečka središča krožnice. Označimo vrh kota z B in po eno točko na vsakem kraku z A in C ter njihove inverzne točke B', A' in C' (slika 5).

Označimo kote v trikotniku ABC z α, β in γ. Iz prvega dela dokaza sledi, da je kot $OB'C'$ enak γ, zunanji kot kota $OB'A'$ pa je enak α (slika 6). Ker je vsota kotov v trikotniku enaka iztegnjenemu kotu, sledi, da je kot $C'B'A'$ enak β; torej inverzija res ohranja kote.



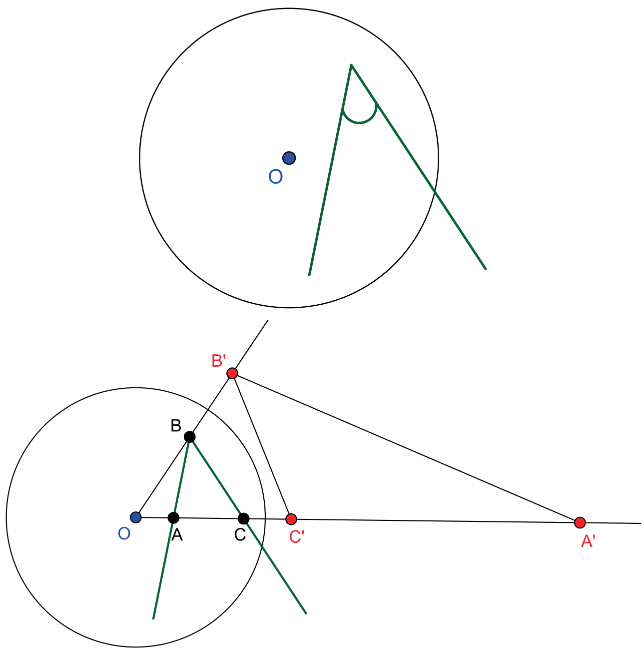
SLIKA 4.

Trikotnika OAB in $OB'A'$ sta si podobna.



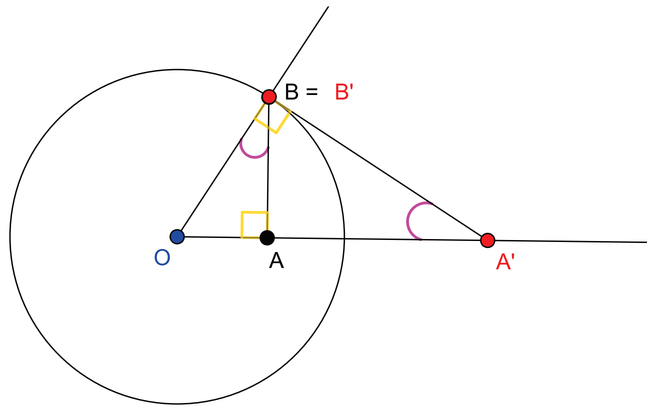
SLIKA 6.

Pari skladnih kotov v začetni in inverzni sliki



SLIKA 5.

Opazovani kot (zgoraj) in pripadajoče točke, s katerimi si pomagamo pri opazovanju kota (spodaj).



SLIKA 7.

Konstrukcija inverzne točke.

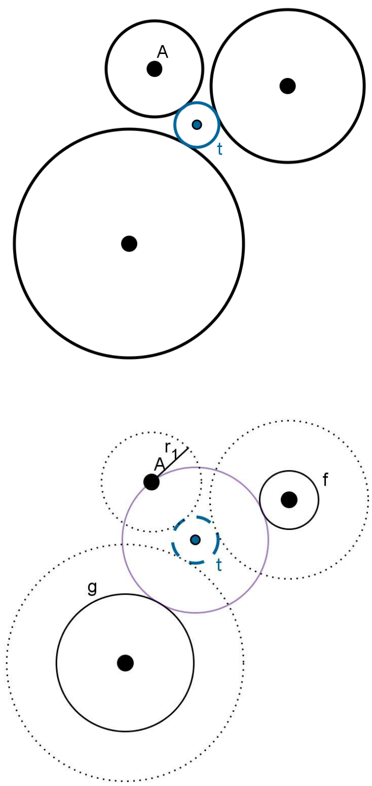
Dokaze preostalih lastnosti lahko bralec najde v [4, poglavje 1].

Oglejmo si še poseben primer slike 4. Kot α naj bo pravi kot, točka B pa naj se nahaja na krožnici K, kot prikazuje slika 7. Slika nam pravzaprav prikazuje zamisel, kako skonstruiramo inverzno točko A' točke A. Kakšen je torej postopek konstrukcije? Najprej narišemo poltrak OA, nato pa pravokotnico na poltrak skozi točko A. V točki, v kateri pravokotnica seka krožnico K, narišemo tangento na K. Presečišče tangente in poltraka OA je inverzna točka A'.

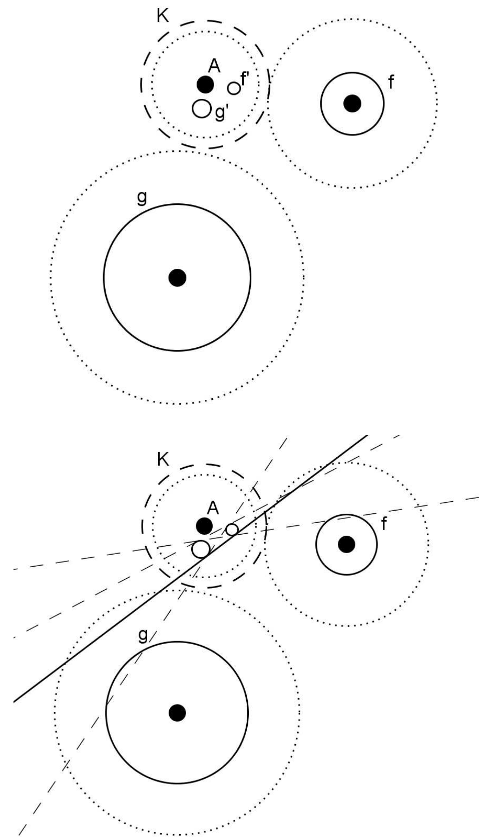
Opremljeni z novim znanjem se lahko zdaj lotimo reševanja našega problema (in brodolomcev).

Rešitev problema. Iskanja rešitve se lotimo po korakih:

(i) Posamezno krožnico zmanjšamo za polmer najmanjše krožnice r_1. S tem najmanjšo krožnico zmanjšamo v točko, ki jo označimo z A, namesto drugih dveh krožnic pa imamo zdaj dve manjši krožnici, ki ju poimenujemo f in g. Krožnica, ki se do-



SLIKA 8.
Zgoraj: Začetne krožnice in rešitev Apolonijevega problema (modra krožnica t). Spodaj: Začetne in zmanjšane krožnice ter rešitev začetnega in poenostavljenega problema.



SLIKA 9.
Zgoraj: Inverzija krožnic f in g preko krožnice K. Spodaj: Skupne tangente krožnic f' in g'.

tika krožnic f in g ter gre skozi točko A, ima središče v isti točki kot rešitev našega problema, polmer pa ima za r_1 večji. S tem smo problem poenostavili na iskanje krožnice, ki se dotika dveh krožnic in gre skozi dano točko (slika 8).

(ii) Preko krožnice K s središčem v točki A in poljubnim polmerom invertiramo krožnici f in g ter točko A. Sliki krožnic f in g sta krožnici, ki ju označimo f' in g', slika točke A pa je točka v neskončnosti. Krožnica, ki reši poenostavljen problem, poteka skozi točko A, ki smo jo izbrali za središče inverzije, zato je njena slika premica. Ker se ta krožnica dotika krožnic f in g, se njena slika dotika krožnic f' in g', torej mora biti skupna tangenta f' in g' (slika 9 spodaj).

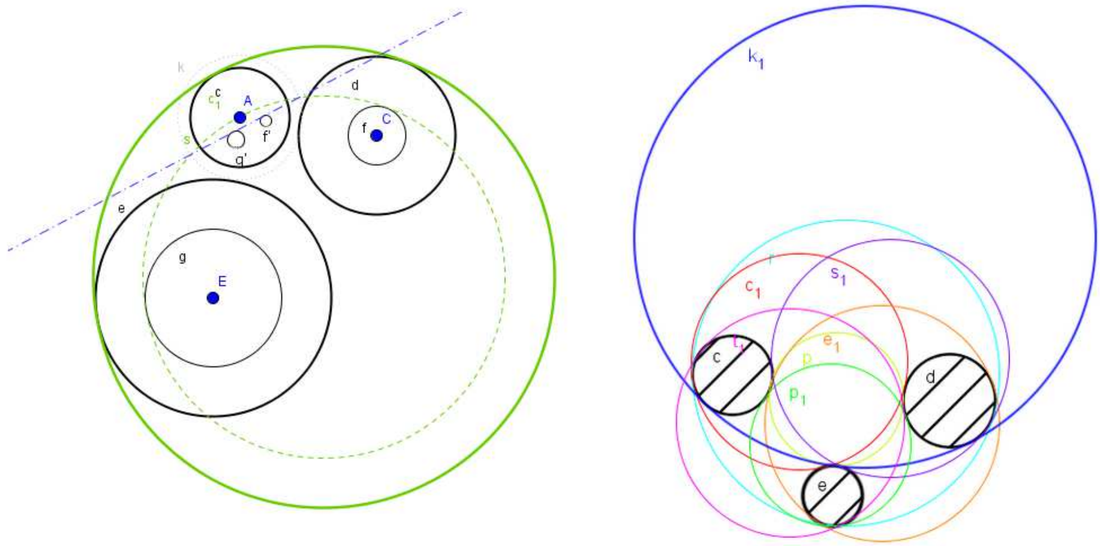
(iii) Na invertirani krožnici q' in f' narišemo skupno tangento. Možne tangente so štiri, izbrali pa bomo tisto, ki se krožnic q' in f' dotika na zunanji strani glede na središče krožnice K [2] (slika 9 spodaj).

(iv) Tangento invertiramo preko krožnice K. Slika tangente je krožnica, ki se dotika krožnic f in g ter poteka skozi točko A.

(v) Dobljeno krožnico nato zmanjšamo za polmer najmanjše krožnice r_1. Tako dobimo krožnico t, ki je rešitev začetnega problema.

[2] Če bi izbrali tangento, ki se krožnic q' in f' dotika na notranji strani glede na središče krožnice K, bi dobili drugo rešitev. Premislite lahko, zakaj preostali dve tangenti v tem primeru ne dasta rešitve.

→



SLIKA 10.

Možne rešitve Apolonijevega problema za tri krožnice

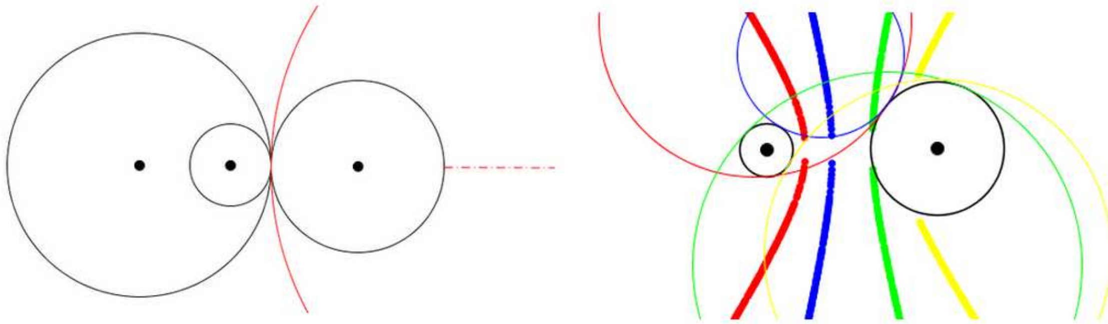
Marsovci so tako sporočili, kam jih lahko MaRSovci pridemo iskat. Po uspešni reševalni akciji smo se skupaj usedli za mizo in vneto premlevali, če je za dani problem na voljo več rešitev. Ugotovili smo, da ima problem osem rešitev.

Preostale rešitve problema. V koraku (iii) konstrukcije rešitve lahko na invertirani krožnici g in f narišemo skupno tangento, ki se krožnic q' in f' dotika na *notranji* strani glede na središče krožnice K. Tangento invertiramo preko krožnice K in dobljeno krožnico povečamo za polmer najmanjše krožnice r_1. Tako dobljena krožnica je druga rešitev Apolonijevega problema, ki prvotne krožnice zaobjame v svoji notranjosti. Možnih je nadaljnih šest rešitev, ki se prvotnih krožnic dotikajo izmenično na zunanji ali notranji strani. Konstrukcije teh rešitev se razlikujejo v tem, da v koraku (i) v rešitvi problema ne zmanjšamo vseh treh krožnic, temveč eno ali obe izmed večjih dveh krožnic povečamo za polmer r_1 in v izbiri tangente v koraku (iii) (slika 10).

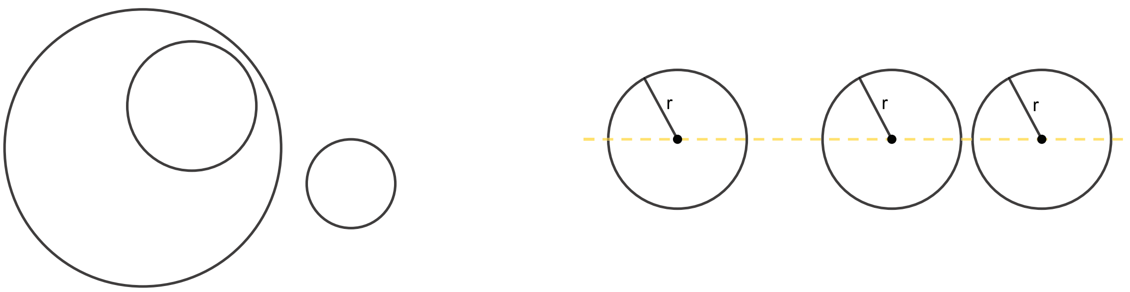
Število možnih rešitev je v splošnem osem, vendar je to odvisno od razporeditve objektov v ravnini. V nekaterih primerih je tako mogoče dobiti neskončno rešitev. Predstavimo jih nekaj:

- Tri krožnice, ki sovpadajo. Izberemo lahko poljubno točko, skozi katero načrtamo krožnico, katere polmer naj bo razdalja od krožnice do točke. Tako dobimo neskončno mnogo rešitev.
- Tri poljubne krožnice, ki se stikajo v eni točki, pri čemer mora vsaj ena ležati znotraj druge. Za središče rešitve si izberemo poljubno točko na premici, ki povezuje središča krožnic. Rešitvena krožnica poteka skozi dotikališče krožnic. Tako dobimo neskončno mnogo rešitev (slika 11 levo).
- Dve poljubni krožnici, ki sovpadata, ter ena, ki leži zunaj njiju in se ju ne dotika. Središči krožnic sta gorišči hiperbol, ki imata stalno razliko razdalj do gorišč enako vsoti oz. razliki polmerov danih krožnic. Tako dobimo dve hiperboli, na katerih ležijo središča krožnic, ki so rešitve tega primera (slika 11 desno).

Po drugi strani pa problem nima rešitve, kadar so središča enako velikih krožnic, ki se ne stikajo, kolinearna. Druga možnost, kjer rešitev ni, je, kadar ena krožnica leži v notranjosti druge in se krožnice ne dotikajo (slika 12).



SLIKA 11.
Primera s neskončno rešitvami. Na levi je množica vseh središč rešitev Apolonijevega problema premica na desni pa središča rešitev ležijo na hiperbolah.



SLIKA 12.
Primera, kjer rešitve ni.

Zaključek

Skonstruirali smo rešitev Apolonijevega problema, premislili, koliko različnih rešitev ima problem v splošnem primeru, in našli nekaj posebnih primerov z neskončno rešitvami in brez rešitev. V tem trenutku se nam lahko porodi vprašanje, kako bi rešili t. i. posplošeni Apolonijev problem, ki nas sprašuje, kako poiskati vsaj eno krožnico, ki je tangentna na tri dane objekte v ravnini, pri čemer so ti objekti lahko točka, premica ali krožnica. Če vas je Apolonijev problem pritegnil, lahko sami poskusite rešiti še posplošeni problem.

Literatura

[1] Wikipedia (2016), *Problem of Apollonius*, dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/Problem_of_Apollonius`, ogled 17. 8. 2016.

[2] J. Cox in M. B. Partensky, *Spatial Localization Problem and the Circle of Apollonius*, 2009, dostopno na `arxiv.org/ftp/physics/papers/0701/0701146.pdf`, ogled 17. 8. 2016.

[3] M. Hladnik, *Grška matematika po Evklidu*, 2012, dostopno na `www.fmf.uni-lj.si/~hladnik/ZgodMat/Arhimed(b).pdf`, ogled 17. 8. 2016.

[4] K. Kozai in S. Libeskind, *Circle Inversions and Applications to Euclidean Geometry*, 2009, dostopno na `jwilson.coe.uga.edu/MATH7200/InversionCompanion/inversion/inversionSupplement.pdf`, ogled 17. 8. 2016.

× × ×