PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **25** (1997/1998)
Številka 3
Strani 138–140

Andrej Likar:

SPUST PO KLANCU

Ključne besede: fizika, mehanika, kinematika, trenje, zračni upor.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/25/1335-Likar.pdf

SPUST PO KLANCU

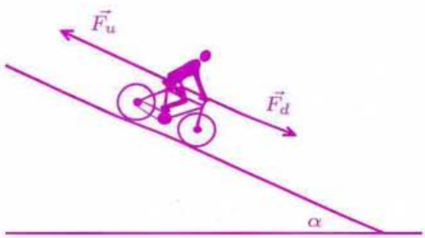
Oče in sin sta se peljala s kolesi. Sin je predlagal naslednji poskus: "Peljiva se po klancu navzdol, kolikor naju samo nese, in opazujva, kdo bo hitrejši. Hitrejši od naju ima boljše kolo z manj trenja." Izkazalo se je, da je bil hitrejši oče. "Vidiš," je dejal sin, "tvoje kolo je boljše, verjetno zato, ker je starejše in zato bolje utečeno." Očetu sklep ni bil všeč. "Zamenjajva kolesi," je predlagal. Dirko sta ponovila na naslednjem klancu in spet je bil hitrejši oče. "Če ne bi bilo trenja, bi bila oba enako hitra, kljub temu da je očetova masa večja od moje," je sklepal sin. "Tako je učil že Galileo Galilei. Če je trenje sorazmerno z maso, kar smo slišali v šoli, bi ob enakih koeficientih trenja morala biti spet enako hitra." "Pozabil si na zračni upor. Pri vožnji sva bila oba sklonjena naprej, da je bil upor čim manjši. Sila trenja je neodvisna od hitrosti, zračni upor pa s hitrostjo močno narašča. Na trenje lahko v najinem primeru kar pozabiš, saj je zanemarljivo v primeri z zračnim uporom. Zmagal sem preprosto zato, ker imam večjo maso."

Oglejmo si, kako masa kolesarja vpliva na njegovo hitrost. Razmere pri poskusu bomo močno poenostavili. Privzeli bomo klanec z enakim nagibom α in določili le končno hitrost kolesarja, ko je sila teže vzdolž klanca enaka uporu. Zapletenim razmeram ob pospeševanju se bomo tako izognili. Silo upora F_u izračunamo iz enačbe

$$F_u = \frac{1}{2} S c_u \rho v^2 ,$$

kjer je S čelni presek kolesarja, c_u pa koeficient, ki odraža vrtinčenje zraka za telesom in je odvisen predvsem od njegove oblike. Privzeli bomo, da imata oče in sin enaka koeficienta, saj je njuna oblika zelo podobna. Z ρ smo označili gostoto zraka, z v pa hitrost telesa v zraku. Kolesarja žene po klancu navzdol dinamična komponenta teže F_d, to je komponenta, ki je vzporedna s klancem in jo izračunamo iz $F_d = mg \sin\alpha$. Ko se hitrost kolesarjev ne spreminja več, sta sili F_d in F_u v ravnovesju (glej sliko 1). Takrat velja $F_d = F_u$ ali

$$mg \sin\alpha = \frac{1}{2} S \rho c_u v^2 .$$



Slika 1. Spust po klancu. Ko se hitrost ne spreminja več, je sila upora F_u enaka komponenti sile teže vzdolž klanca F_d.

Iz te enačbe dobimo hitrost

$$v = \sqrt{\frac{2gm\sin\alpha}{\rho c_u S}}\,.$$

Označimo z v_o očetovo hitrost, z v_s pa sinovo. Razmerje njunih hitrosti je potem

$$\frac{v_o}{v_s} = \sqrt{\frac{m_o/S_o}{m_s/S_s}}\,.$$

Spet smo količine, ki se nanašajo na očeta, označili z indeksom o, sinove pa z s. Razmerje količnikov m/S lahko izrazimo le z maso m, če privzamemo, da je oče po obliki le povečan sin. Razmerje njunih višin naj bo r. Privzamemo, da so v istem razmerju tudi njuni glavi, roke, noge, obseg pasu, širina ramen... Razmerje njunih mas je potem enako r^3, razmerje čelnih presekov pa r^2. (Tako je pri vseh podobnih telesih. Pomislimo na dve kocki iz iste snovi, katerih robova sta v razmerju r, $r = \frac{a_1}{a_2}$. Njuni prostornini, in s tem masi, sta v razmerju $\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{(ra_2)^3}{a_2^3} = r^3$, ploščini kvadratov pa v razmerju r^2.) Privzamemo torej

$$\frac{m_o}{m_s} = r^3$$

in

$$\frac{S_o}{S_s} = r^2 = (\frac{m_o}{m_s})^{2/3}\,.$$

Razmerje hitrosti $\frac{v_o}{v_s}$ je potem

$$\frac{v_o}{v_s} = (\frac{m_o}{m_s})^{1/6}\,.$$

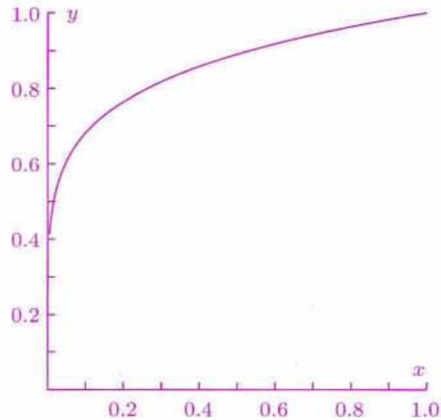
Vidimo, da imajo telesa z večjo maso res večjo končno hitrost. Razmerje hitrosti je enako šestemu korenu iz razmerja mas, kar je za razmerja mas blizu 1 približno linearna odvisnost. Prikladno jo zapišemo kot

$$\frac{v_o}{v_s} \approx 1 + \frac{\Delta m}{6m_s}\,,$$

kjer smo z Δm označili razliko mas $\Delta m = m_o - m_s$. Odvisnost razberemo z grafa na sliki 2. Oglejmo si tale primer: Denimo, da je masa $m_o = 110$ kg in $m_s = = 65$ kg. Masi koles (po 15 kg) smo všteli. Razmerje hitrosti je pri teh podatkih

$$\frac{v_o}{v_s} = (\frac{110 \text{ kg}}{65 \text{ kg}})^{1/6} = 1{,}092 \,.$$

Če vozi sin s hitrostjo 40 km/h, je očetova hitrost 43,7 km/h, kar brez težav opazimo.



Slika 2. Odvisnost razmerja hitrosti dveh teles $y = \frac{v_o}{v_s}$ od razmerja mas $x = \frac{m_o}{m_s}$ podaja funkcija $y = x^{1/6}$. Prikazana je odvisnost za razmerje x med 0 in 1, saj lahko vedno izberemo masi m_o in m_s tako, da je njuno razmerje manjše od 1.

Ob tem razmišljanju se spomnimo zgodbe o poskusih, ki naj bi jih izvajal Galileo Galilei na poševnem stolpu v Pisi. Zvemo, da je s stolpa metal različno težke krogle in opazil, da padejo vse hkrati spuščene krogle istočasno na tla. Če bi bile vse krogle iz enake snovi, na primer iz železa, bi zaradi zračnega upora večje, in zato tudi težje krogle, prehitele manjše. Še večje razlike v hitrosti pa bi imele krogle iz različnih snovi. Enako veliki krogli, ena iz lesa, druga iz svinca, bi imeli zelo različni hitrosti. V tem primeru bi bilo razmerje hitrosti enako kvadratnemu korenu iz razmerja mas. Še večje razmerje pa bi dobili, če bi bila lesena krogla manjša od svinčene. Bolje bi se poskus posrečil z leseno kroglo in z od nje večjo, votlo svinčeno kroglo. Takih krogel pa Galileo zanesljivo ni imel. Zelo verjetno je, da Galilei teh poskusov ni naredil. Do zakona, da padajo vsa telesa v brezzračnem prostoru z enakim pospeškom, se je dokopal z logičnim sklepanjem. Razmišljal je takole. "Denimo, da ima Aristotel prav; telo z večjo maso pada hitreje od telesa z manjšo. Mislimo si sedaj novo telo, zgrajeno iz teh dveh, ki ju povezuje lahka vrvica. Ker ima telo še večjo maso, bi moralo padati hitreje kot posamezno telo zase. To pa je protislovno, saj lažje telo pri padanju gotovo zavira telo z večjo maso. Vsa telesa torej padajo z enakim pospeškom, ne glede na svojo maso." Ta sklep so pozneje potrdila natančna opazovanja padanja v brezzračnem prostoru.

Andrej Likar