

S kotaljenjem krožnice do astroide in kardioide



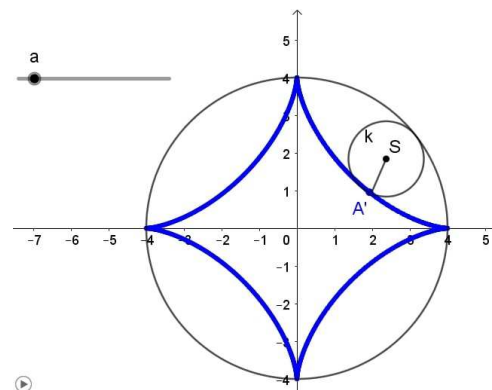
EMA ČEŠEK

→ Astroida je krivulja, katere ime izvira iz grške besede aster, ki pomeni zvezda. Ima namreč obliko zvezde s štirimi kraki in zato zanjo uporabljamo tudi ime zvezdnica. Poimenovanje kardioida prav tako izhaja iz grščine. Oblika krivulje spominja na srce, zaradi česar jo imenujemo tudi srčnica. Ogleдали si bomo tri načine, kako ti dve krivulji narišemo v GeoGebri - z animacijo sledi točke, kot ogrinjačo množice daljic in direktno s parametrično enačbo krivulje.

Astroido uvrščamo med hipocikloide. To so krivulje, ki jih opiše točka na krožnici, ki se kotali po notranji strani druge krožnice. Oblika krivulje je odvisna od razmerja med polmeroma obeh krožnic. Da nastane astroida, morata biti polmera kotaleče se notranje krožnice in zunanje krožnice v razmerju 1 : 4. V nadaljevanju bomo ves čas obravnavali primer, ko ima notranja krožnica polmer 1, zunanja pa 4.

Konstrukcija astroide v GeoGebri s sledjo gibanja točke:

- Zunanjo krožnico narišemo z ukazom `Krožnica((0,0),4)`.
- Za kotaljenje manjše krožnice ustvarimo drsnik a z vrednostmi med 0 in 2π . Hitrost drsnika zmanjšamo na 0.5 in ponavljanje animacije nastavimo na naraščajoče. Začetno vrednost drsnika nastavimo na 0.
- Središče manjše krožnice se bo gibalo po krožnici s središčem v koordinatnem izhodišču in polmerom 3. Za središče vnesemo ukaz `S=(3*cos(a), 3*sin(a))`.
- Manjšo krožnico narišemo z ukazom `Krožnica(S,1)` in jo preimenujemo v k .
- Na manjšo krožnico dodamo točko A z ukazom `Point(k)` in jo po krožnici premaknemo v točko $(4,0)$.



SLIKA 1.

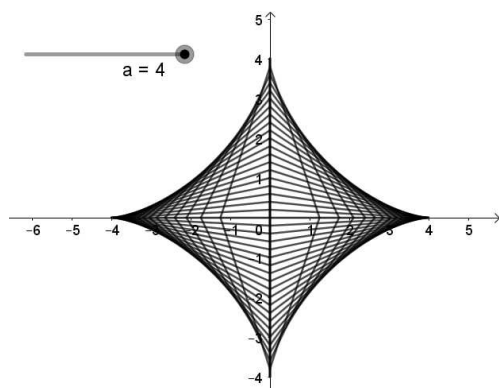
Točka A' na manjši krožnici opiše astroido, medtem ko se kotali po notranji strani večje krožnice. Aplet najdete na spletnem naslovu <https://www.geogebra.org/m/znfgyerr>.

- Točko A' , ki bo opisovala astroido, vstavimo z ukazom `Zasuk(A,-3*a,S)`.
- Skrijemo točko A in narišemo daljico z ukazom `Daljica(S,A')`.
- Vklompimo sled točke A' in z vklopom animacije drsnika izrišemo astroido.

Zgornjo astroido lahko dobimo tudi kot ogrinjačo družine daljic. Eno krajišče teh daljic naj leži na y -osi, drugo na x -osi in dolžina daljic naj bo enaka 4. Ogrinjača je nato krivulja, ki je tangentna na vsako izmed narisanih daljic.

Konstrukcija astroide v GeoGebri kot ogrinjače množice daljic:

- Ustvarimo drsnik a z vrednostmi med -4 in 4 . Pri-rastek drsnika nastavimo na 0.2. Drsnik naj vrednosti ponovi le enkrat, torej nastavimo enkratno naraščajoče ponovitve.
- Točko A , ki se bo z vrednostjo drsnika premikala po y -osi, ustvarimo z ukazom `(0,a)`.
- Narišemo krožnico z ukazom `Krožnica(A,4)`, da bo dolžina daljic ves čas ustrezna.



SLIKA 2.

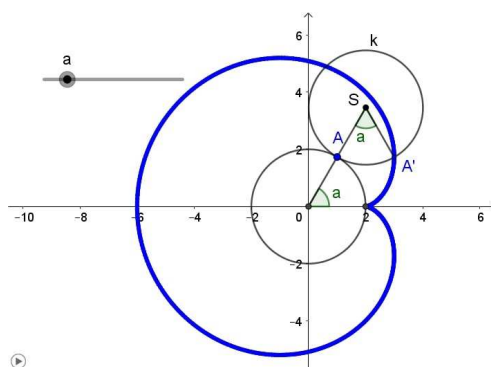
Astroida nastane tudi kot ogrinjača družine daljic. Aplet najdete na spletnem naslovu <https://www.geogebra.org/m/qw9v7ymh>.

- Z orodjem Presečišče določimo točki B in C , kjer krožnica seka x -os.
- Narišemo daljici AB in AC .
- Vklompimo sledi daljic, skrijemo odvečne objekte in vklompimo animacijo drsnika.

Najlažje sicer astroido narišemo s pomočjo njenih parametričnih enačb. Uporabimo ukaz Krivulja($4*\cos(t)^3, 4*\sin(t)^3, t, 0, 2*\pi$). Omenili smo, da astroido uvrščamo med hipocikloide. Bralca in bralka vabimo, da raziščeta tudi druge krivulje, ki jih dobimo, če spremenimo razmerje med polmeroma obeh krožnic.

Kardioida je poseben primer epicikloide. Za razliko od hipercikloid so to krivulje, ki jih opiše točka na krožnici, ki se kotali po zunanji strani druge krožnice. Oblika krivulje je znova odvisna od razmerja polmerov obeh krožnic. Kardioida nastane, če imata obe krožnici enak polmer. Bralec in bralka naj poskusita konstrukcijo astroida s sledjo gibanja točke prilagoditi tako, da bo točka A' opisala kardioido. V pomoč naj jima bo slika 3, kjer imata krožnici polmer 2.

Kardioido lahko dobimo tudi kot ogrinjačo daljic. Namesto konstrukcije z drsnikom kot pri astroidi bomo tokrat daljice konstruirali s pomočjo ukaza Zaporedje. Ogledali si bomo primer, ko krožnico s točkami razdelimo na 60 skladnih lokov. Točke oštevilčimo. Izbrano n -to točko povežemo s točko, ki ji pripada številka $2n$ po mod 60. Dobljene daljice predstavljajo tangente na kardioido. V GeoGebri

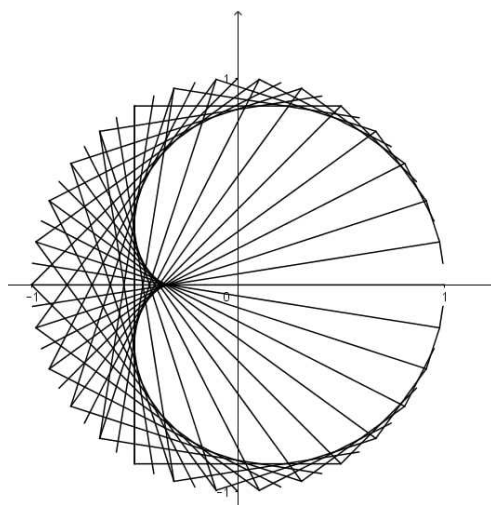


SLIKA 3.

Točka A' opiše kardioido, medtem ko se krožnica k kotali po zunanji strani enako velike krožnice. Aplet najdete na spletnem naslovu <https://www.geogebra.org/m/swafjau7>.

daljice izrišemo z ukazom: Zaporedje(Daljica($\cos(2*\pi*n/60), \sin(2*\pi*n/60)$), ($\cos(4*\pi*n/60), \sin(4*\pi*n/60)$)), $n, 0, 60$). Bralec in bralka lahko poskusita daljice po zgornjem postopku tudi sešiti na debelejšo lepenco. Kardioido hitreje narišemo s pomočjo njenih parametričnih enačb. Uporabimo ukaz Krivulja($4*\cos(t)-2*\cos(2t), 4*\sin(t)-2*\sin(2t), t, 0, 2*\pi$).

Epicikloide in hipocikloide imajo številne zanimive lastnosti. Več o njih pa ob kaki drugi priložnosti.



SLIKA 4.

Kardioida nastane tudi kot ogrinjača družine daljic.

