



Pri matematiki so pomembne ideje

What's Important in Mathematics are Ideas

Moj um je bil obsijan
s svetlobo in moje želje
izpolnjene.
Dante, Raj, petje XXXIII

V glavi Arhimeda
je bilo več domišljije
kot v glavi Homerja.
Volter

Šefket Arslanagić

Σ Povzetek

V članku so predstavljene tri naloge, in sicer iz algebre, teorije števil in geometrije. Za vsako od nalog sta podani dve ali več rešitev. Najprej so podane standardne oz. klasične rešitve teh nalog, nato pa rešitve z uporabo različnih idej, ki vodijo do zelo »lepih in elegantnih« rešitev teh nalog.

Ključne besede: dokaz, ideja, neenakost, enakost, kot, pravokotnost, rešitev

Σ Abstract

The article presents three exercises from the fields of algebra, theory of numbers and geometry. For every exercise, two or more solutions are given. At first just standard or classical solutions of those exercises are given and later solutions by using various ideas are given, providing "nice and elegant" solutions of these problems.

Key words: proof, idea, inequality, equality, angle, perpendicularity, solution

α Uvod

Pri pouku matematike ima reševanje nalog zelo pomembno vlogo. Naloge se največkrat rešujejo s standardnimi metodami, s čimer se večina učiteljev zadovolji. Včasih se zgodi, da kateri od učencev ponudi eno ali več rešitev, ki so drugačne od standardnih. Dober učitelj, ki je strokovno podkovan na področju srednješolske matematike in metodologije poučevanja matematike, bo tega zelo vesel. Učence bo pohvalil in jih še naprej vzpodbujal pri njihovem delu. Učencem bo ponudil sodelovanje ter jim predstavil zahtevnejše gradivo, knjige, članke ... iz matematike.

To področje dela mi je zelo znano, saj se že celo svoje delovno obdobje ukvarjam z delom z nadarjenimi učenci, pri čemer neizmerno uživam, predvsem pa se veselim uspehov, ki jih dosegajo učenci na tekmovaljih doma in v tujini. Takšni učenci imajo zelo veliko dobrih idej pri reševanju matematičnih nalog, predvsem pri dokazovanju. Njihove ideje prinašajo v reševanje nalog jasnost in natančnost (red) v tistih delih, ki so bili do takrat nejasni, izgubljeni in na videz nedosegljivi.

Da bi bolje razumeli, kaj pomeni osebna izkušnja pri delu z nadarjenimi učenci, vam bomo v nadaljevanju pokazali primere nalog, ki se rešujejo po standardni metodi. Nato bomo prikazali reševanje istih nalog še na druge različne načine, predvsem z uporabo idej, ki jih podajo posamezni učenci (na našo srečo in zadovoljstvo). V nadaljevanju bodo predstavljene naloge iz algebre (neenakosti), teorije števil in geometrije.

β Naloga iz algebre

Najbosta a in b pozitivni realni števili. Dokažite, da velja neenakost

$$\frac{(a+b)^3}{a^2b} \geq \frac{27}{4} \quad (1)$$

Kdaj velja enakost?

1. rešitev (standardna)

Z množenjem obeh strani neenakosti (1) s $4a^2b$ dobimo enakovredno neenakost:

$$4a^3 + 12a^2b + 12ab^2 + 4b^3 \geq 27a^2b$$

$$\Leftrightarrow 4a^3 - 15a^2b + 12ab^2 + 4b^3 \geq 0 : (b^3 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\frac{a}{b}\right)^3 - 15\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 12\left(\frac{a}{b}\right) + 4 \geq 0$$

Naj bo $\frac{a}{b} = t > 0$. Dobimo:

$$\Leftrightarrow 4t^3 - 15t^2 + 12t + 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (4t + 1)(t^2 - 4t + 4) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 2)^2(4t + 1) \geq 0$$

Ker je $4t + 1 > 0 \quad 4t + 1 > 0 \forall t \in \mathbb{R}^+$ in $(t - 2)^2 > 0 \quad (t - 2)^2 \geq 0 \forall t \in \mathbb{R}^+$, velja zadnja neenakost in potemtakem tudi njej enakovredna neenakost (1).

Enakost velja v (1) le v primeru $t - 2 = 0 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow \frac{a}{b} = 2 \Rightarrow a = 2b$.

Pri dokazovanju neenakosti (1) smo uporabili regresivni dokaz, v katerem smo izhajali iz neenakosti (1) in z uporabo več resničnih trditev potrdili njeno veljavnost. Seveda obstaja tudi težji direktni dokaz.

2. rešitev (z idejo)

Pri tej rešitvi, ki bo zelo kratka in elegantna, bomo uporabili učencem znano neena-

kost med aritmetično in geometrijsko sredino treh pozitivnih števil, ki se glasi:

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}; (x, y, z > 0) \quad (2)$$

Enakost velja, če je $x = y = z$.

Sledi:

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{3}\right)^3 \geq \frac{a^2b}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{a^2b}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + b}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot b}$$

Ta neenakost velja zaradi (2). Enakost velja, če je $\frac{a}{b} = b$, to je $a = 2b$.

Vsekakor je predstavljena rešitev enostavna in kratka. Kljub temu morajo učenci poznati določena dejstva o neenakostih, kot je na primer neenakost (2). Nadarjeni učenci za matematiko jih seveda poznajo, kar lahko potrdim iz številnih delovnih izkušenj z njimi.

Υ Naloga iz teorije števil

Dokažite trditev: Ne obstajata pozitivni celi števili a in b , za kateri velja enakost $4a(a+1) = b(b+3)$.

1. rešitev (standardna)

Podano enakost lahko zapišemo v obliki $(2a+1)^2 - (b+1)^2 = b$ oziroma (razlika kvadratov):

$$(2a+1+b+1)(2a+1-b-1) = b,$$

$$\text{to je } (2a+b+2)(2a-b) = b.$$

Prvi faktor $2a+b+2$ je pozitiven in večji od b . Drugi faktor $2a-b$ ne more biti enak nič, ker bi za $b = 2a$ takrat veljalo, da je $b = 0$. To je seveda nemogoče, ker je $b \in \mathbb{Z}^+$. Zato je drugi faktor enak najmanj 1, od tu sledi, da je produkt teh dveh faktorjev večji od b . S tem je trditev dokazana.

Z učenci, ki znajo reševati kvadratne enačbe, lahko v primeru realnih rešitev kvadratne enačbe in z upoštevanjem dejstva, da je $\sqrt{(x^2)} = x$, ($x \geq 0$), dobimo naslednji dve rešitvi:

2. Rešitev (z idejo)

Zapišimo podano enakost iz naloge v obliki kvadratne enačbe z neznanko a :

$$4a^2 + 4a - (b^2 + 3b) = 0$$

$$\Rightarrow a_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 16(b^2 + 3b)}}{8},$$

$$\text{to je } a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{b^2 + 3b + 1}}{2}.$$

Da bi bilo število a pozitivno celo število (naravno število), mora biti število popolni kvadrat nekega naravnega števila. Vendar je $(b+1)^2 = b^2 + 2b + 1 < b^2 + 3b + 1 < b^2 + 4b + 4 = (b+2)^2$.

Od tu sledi, da je število $b^2 + 3b + 1$ med dvema zaporednima popolnima kvadratoma $(b+1)^2$ in $(b+2)^2$, vendar to število ne more biti popolni kvadrat. To pomeni, da je $a \in \mathbb{Z}^+$, s čimer je trditev iz naloge dokazana.

3. Rešitev (z idejo)

Zapišimo dano enakost kot kvadratno enačbo z neznanko b :

$$b^2 + 3b - 4a(a+1) = 0$$

$$\Rightarrow a_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16a(a+1)}}{2},$$

$$\text{to je } a_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{16a^2 + 16a + 9}}{2}.$$

Če bi veljalo $b \in \mathbb{Z}^+$, sklepamo, da mora biti število $16a^2 + 16a + 9 = (4a + 2)^2 + 5$ popolni kvadrat nekega naravnega števila. Torej mora biti $16a^2 + 16a + 9 = (4a + 2)^2 + 5$ popolni kvadrat nekega naravnega števila.

Edina popolna kvadrata, pri katerih je razlika enaka 5, sta števili 2^2 in 3^2 . Zato mora veljati $4a + 2 = 2$. Torej je $a = 0$, kar pa ne pride v poštev. Ker je $4a + 2 > 0$, ne more biti niti $4a + 2 = -2$ (čeprav je $(-2)^2 = 4$).

Menimo, da so vse tri predstavljene rešitve te naloge lepe in enostavne. Kljub temu sta 2. in 3. rešitev močnejši in zahtevnejši od 1. rešitve, ker je treba podano enakost preoblikovati in jo zapisati kot razliko kvadratov in iz nje izpeljati zaključek.

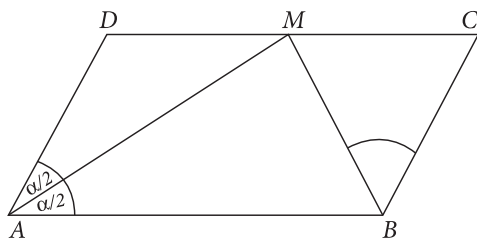
δ Naloga iz geometrije

V paralelogramu $ABCD$ je točka M razpolovišče stranice CD in leži na simetrali kota $\angle BAD$. Dokažite, da je kot $\angle BAD$ pravi kot.

1. Rešitev (standardna)

Daljšica AM leži na simetrali kota $\angle BAD = \alpha$. Velja (glej sliko 1):

$$\angle BAM = \angle MAD = \frac{\alpha}{2} \text{ in } \angle BAM = \angle AMD = \frac{\alpha}{2} \text{ (kota z vzporednima krakoma).}$$



[Slika 1] K 1. rešitvi naloge iz geometrije

Od tod sledi, da je $\angle MAD = \angle DMA = \frac{\alpha}{2}$, zato je trikotnik $\triangle AMD$ enokraki in velja $|AD| = |MD|$. Zaradi $|AD| = |BC|$ in $|MD| = |MC|$, je $|BC| = |MC|$, kar pomeni, da je tudi trikotnik $\triangle BMC$ enakokraki, od koder je $\angle MCB = \angle BAD = \alpha$. Ker je $\angle CBM = \angle BMC = \frac{1}{2} (180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, dobimo:

$$\angle DMA + \angle BMC = \frac{\alpha}{2} + 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 90^\circ$$

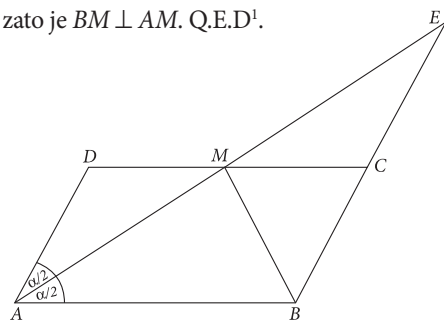
$\angle AMB = 180^\circ - (\angle AMD + \angle BMC) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, kar je bilo treba tudi dokazati.

2. Rešitev (z idejo)

Označimo z E presečišče med simetralo AM kota $\angle BAD$ in nosilko stranice BC paralelograma $ABCD$ (sl. 2). Sedaj imamo:

$\angle BAM = \angle MAD = \angle AEB$. Od tu sledi, da je trikotnik $\triangle ABE$ enakokraki z osnovnico AE .

Očitno sta trikotnika $\triangle AMD$ in $\triangle EMC$ skladna, saj velja $|MD| = |MC|$, $\angle DMA = \angle CME$ in $\angle MAD = \angle MEC$. Zato je, torej je točka M razpolovišče osnovnice trikotnika $\triangle ABE$. Zaradi $\angle BAM = \angle MEB$ je trikotnik $\triangle ABE$ enakokraki. Iz tega zaključimo, da je dolžina daljice BM višina enakokrakega trikotnika $\triangle ABE$, zato je $BM \perp AM$. Q.E.D.¹

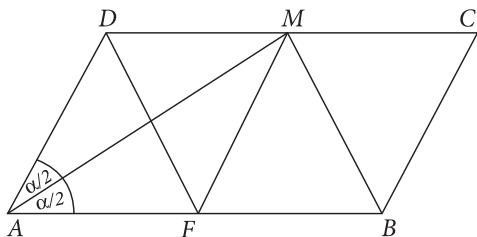


[Slika 2] K 2. rešitvi naloge iz geometrije

1 Q. E. D. je okrajšava za latinski izraz *quoderatdemonstrandum* (dobesedno kar je bilo treba pokazati). Q.E.D. se lahko zapiše na konec matematičnega dokaza, kar pomeni, da je dokaz končan. (vir: <http://sl.wikipedia.org/wiki/Q.E.D.> (27. 12. 2012))

3. Rešitev (z idejo)

Naj bo točka F razpolovišče stranice AB paralelograma $ABCD$ (sl.3). Daljica AM je simetrala kota $\angle BAD$ tega paralelograma in ker je $MF \parallel AD$, velja: $\angle BAM = \angle MAD = \angle AMF$. Od tu sledi, da je trikotnik $\triangle AMF$ enakokrak, kar pomeni, da imamo: $|BF| = |AF| = |MF|$. To pomeni, da točka M leži na krožnici, katere premer je daljica AB . Kot $\angle AMB = 90^\circ$ (Talesov izrek o kotu v polkrogu: Kot, ki ima vrh na krožnici, njegova kraka pa potekata skozi krajišči premera te krožnice, je pravi kot.)



[Slika 3] K 3. rešitvi naloge iz geometrije

4. Rešitev (z idejo)

Naj bo točka F razpolovišče stranice AB paralelograma $ABCD$. Ker je $MF \parallel AD$ in $AB \parallel CD$ ter daljica AM leži na simetrali kota $\angle BAD$, je

$\angle BAM = \angle MAD = \angle AMF = \angle DMA$. Zaradi tega sta trikotnika $\triangle AFM$ in $\triangle MDA$ enakokraka in skladna. Skupaj tvorita romb $AFMD$. Diagonali AM in DF romba $AFMD$ sta pravokotni. Ker je $DF \parallel BM$, iz tega sledi, da je $AM \perp MB$, torej je $\angle AMB = 90^\circ$. Q.E.D.

Poglejmo vse štiri rešitve navedenih nalog iz geometrije. 1. rešitev je klasična rešitev, v kateri uporabimo računanje kotov enakokrakega trikotnika, kar je učencem najbližje in najbolj enostavno. Menim, da bi se velika večina učencev odločila za prvo rešitev. 2., 3. in 4. rešitev prinašajo ideje, katerih uporaba

hitro pripelje do lepih rešitev predstavljene naloge iz geometrije. V 2. rešitvi izhajamo iz dejstva, da je višina na osnovnico v enokrakem trikotniku pravokotna na osnovnico. V 3. rešitvi je uporabljeno dejstvo, da je kot v polkrogu pravi kot. V 4. rešitvi je uporabljena ena izmed lastnosti romba, da se diagonali romba sekata pod pravim kotom.

ε Zaključek

Pri teh treh nalogah in njihovih različnih rešitvah lahko v veliki meri preučimo pomen reševanja nalog na več različnih načinov. Najbolj pomembno je, da znamo rešiti nalogo na katerikoli način, kasneje pa razmislimo, na kateri način se še lahko reši posamezna naloga. Tu pridejo v ospredje različne ideje, ki so neločljivo povezane z maloštevilnimi nadarjenimi učenci pri matematiki. Vselej bi nas, da bi v prihodnosti (tudi mladi) bralci tega članka imeli predvsem korist od njega, tako pri obvladovanju gradiva iz matematike kot tudi pri učinkovitem in pestrem reševanju nalog.

Naj povem, da sem pri večletnem delu z nadarjenimi učenci iz matematike že od prvega letnika gimnazije vztrajal, da matematično nalogo poskusijo rešiti (včasih z mojo pomočjo in podporo) na več različnih načinov. Kasneje sem doživel oz. ugotovil, da so starejši dijaki (tretjega in četrtega letnika) rešili neko nalogo na več različnih načinov. To je še posebej pomembno pri pripravi članov ekipe BiH IMO (mednarodna matematična olimpijada). Zame je bilo to veliko zadovoljstvo in o tem sem pisal v svoji knjigi Matematiška čitanka 1, 2, 3 in 4. Namen mojega članka je pomagati učencem in učiteljem v Sloveniji in izven nje pri delu z nadarjenimi učenci, s ciljem doseganja čim boljših rezultatov pri matematiki.

ζ Viri in literatura:

1. Arslanagić, Š., *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.
2. Engel, A., *Problem-Solving Strategies*, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1998.
3. Grozdev, S., *For High Achievements in Mathematics*, The Bulgarian Experience (Theory and Practice), Association for the Development of Education, Sofia, 2007.
4. Kurnik, Z., *Posebne metode rješavanja matematičkih problema*, Element, Zagreb, 2010.
5. Kurnik, Z., *Znanstveni okviri nastave matematike*, Element, Zagreb, 2009.
6. Polya, G., *Matematičko otkriće*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2003.