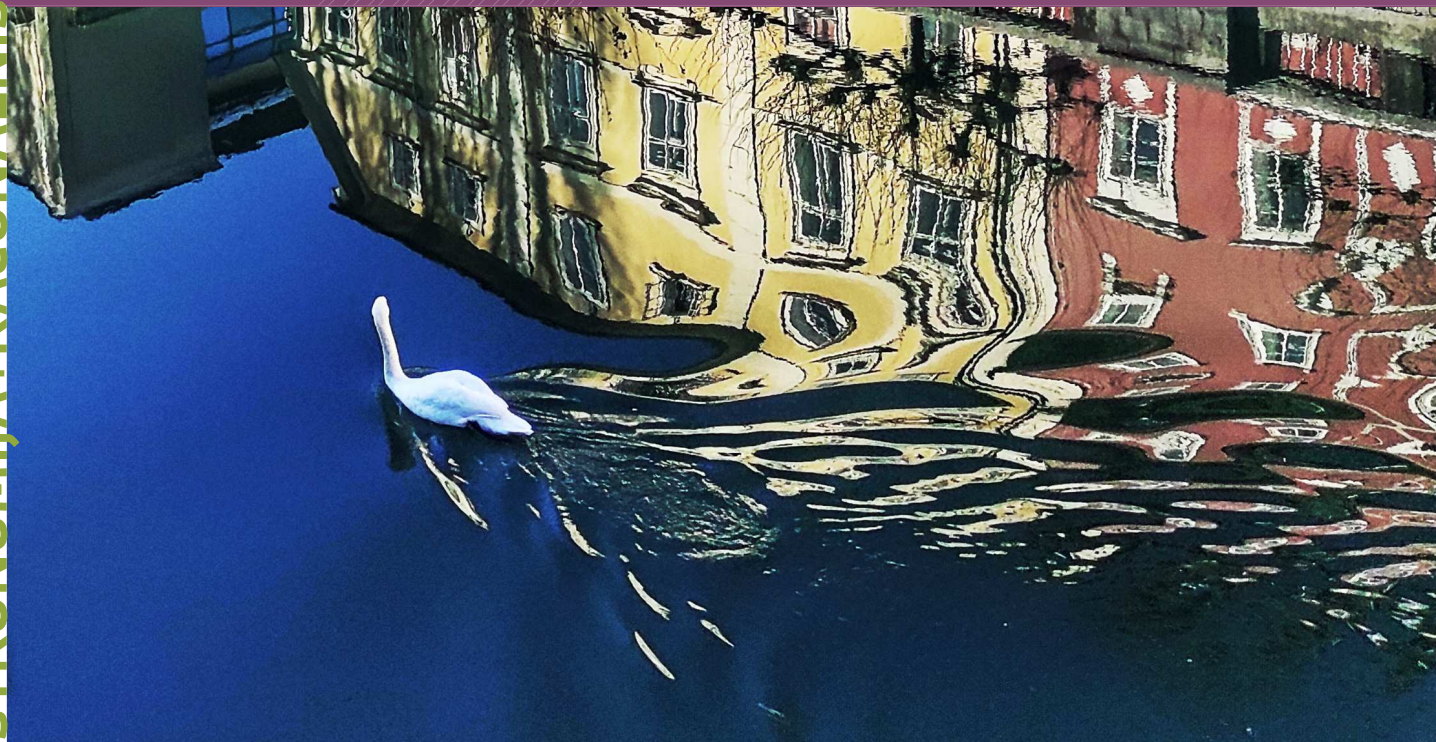




- PRITISNJENA KROŽNICA IN UKRIVLJENOST KRIVULJE
- PO DEBLU Z VRVNO ZANKO
- UPORABA VIRIALNEGA TEOREMA V ASTROFIZIKI
- RAZDALJE UREJANJA



# Raziskovanje termodinamike z bilijardi

↓↓↓



→ Če ste kdaj igrali bilijard, ste pri načrtovanju svojih udarcev gotovo uporabljali geometrijsko predstavo in intuicijo. Matematiki so pri tem naredili še dodaten korak in igro uporabili kot navdih za nove matematične probleme. Od začetne situacije, pri kateri se posamezna krogla odbija po omejenem območju, se hitro odpre neskončno možnosti. Če ima območje oblike stadiona (pravokotnik z dodanima polkrogoma na nasprotnih straneh) in se več krogel prične pomikati iz skoraj istega izhodišča z enako hitrostjo, bodo njihove poti divje različne – temu rečemo kaos. Matematični bilijardi so povezani tudi s termodinamiko, vejo fizike, ki obravnava toploto, temperaturo in prenos energije.

Tipični modeli predpostavljajo, da se krogla od stene odbije z nespremenjeno hitrostjo pod kotom, ki je nasproten vpadnemu. V zadnjem obdobju so matematiki v ta model dodali še naključnost. Naključno določanje kota po odboju lahko predstavlja model mikroskopskih kanalov z grobimi robovi. Predstava o »vročih« ali »mrzlih« stenah, ki lahko delec pospešijo ali upočasnijo, pa omogoča povsem nove poglede na pomembne koncepte termodinamike. Eden od njih je smer časa: mikroskopski procesi, po katerih se stanje lahko povrne v prvotno, vodijo v makroskopske, ki so nepovratni. Četudi je večina naključnih bilijardnih modelov še vedno bistveno enostavnejša od resničnih naravnih procesov, lahko taki modeli predstavljajo nov korak k razumevanju in napredku mikrotehnologije, pa čeprav nam ne bodo nujno pomagali potopiti krogle v luknjo pri naši naslednji igri na bilijardni mizi.

**Več informacij v članku** *From billiards to thermodynamics*, T. Chumley, S. Cook, R. Feres, *Computers & Mathematics with Applications* 65(10), 2013, 1596–1613.

Izvirno besedilo: *Exploring Thermodynamics with Billiards, Mathematical moments from the AMS*. Prevod in priredba: Boštjan Kuzman. × × ×

## KOLOFON



### Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje letnik 49, šolsko leto 2021/2022, številka 5

**Uredniški odbor:** Vladimir Batagelj, Nino Bašič (računalništvo) Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domajnko, Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija), Martin Juvan, Maja Klavžar, Damjan Kobal, Lucijana Kračun Berc (tekmovanja), Boštjan Kuzman (matematika), Peter Legiša (glavni urednik), Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Marko Razpet, Matjaž Vencelj, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

**Dopisi in naročnine:** DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 633, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

**Internet:** [www.presek.si](http://www.presek.si)

**Elektronska pošta:** [info@dmfa-zaloznistvo.si](mailto:info@dmfa-zaloznistvo.si)

**Naročnina** za šolsko leto 2021/2022 je za posamezne naročnike 22,40 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 19,60 EUR, posamezna številka 6,00 EUR, stara številka 4,00 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 30 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

**List sofinancira** Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

**Založilo** DMFA–založništvo

**Oblikovanje** Tadeja Šekoranja

**Tisk** Collegium Graphicum, Ljubljana

**Naklada** 1100 izvodov

© 2022 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 2151

ISSN 2630-4317 (Online)

ISSN 0351-6652 (Tiskana izd.)

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

## NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Priказe novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva DMFA–založništvo, Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana ali na naslov elektronske pošte [info@dmfa-zaloznistvo.si](mailto:info@dmfa-zaloznistvo.si).

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvirne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

# Kazalo

## MATEMATIČNI TRENUTEK

- 2 Raziskovanje termodinamike z bilijardi

## UVODNIK

- 4–5 Matematika – jezik, ki povezuje?  
(Boštjan Kuzman)

## MATEMATIKA

- 6–9 Pritisnjena krožnica in ukrivljenost krivulje  
(Peter Legiša)
- 18–19 Geogebra kotiček – Linearne preslikave  
ravninskih likov  
(Boštjan Kuzman)

## FIZIKA

- 10–15 Po deblu z vrvno zanko  
(Barbara Rovšek)

**SLIKA NA NASLOVNICI:** Labod, odsevi in valovanje na Ljubljani. Foto: Andrej Guštin

## ASTRONOMIJA

- 20–24 Uporaba virialnega teorema v astrofiziki  
(Krištof Skok)

## RAČUNALNIŠTVO

- 25–30 Razdalje urejanja 1. del  
(Mladen Borovič in Jani Dugonik)

## RAZVEDRILO

- 16–17 Nagradna križanka  
(Marko Bokalič)
- 24 Križne vsote
- 30 Rešitev nagradne križanke Presek 49/3  
(Marko Bokalič)
- 31 Bilo je nekoč v reviji Presek – Kako rešujemo  
naloge iz matematike in fizike

## TEKMOVANJA

- priloga** 57. tekmovanje iz matematike za Vegovo  
priznanje – državno tekmovanje
- priloga** 59. fizikalno tekmovanje srednješolcev  
Slovenije – državno tekmovanje

# Matematika – jezik, ki povezuje?



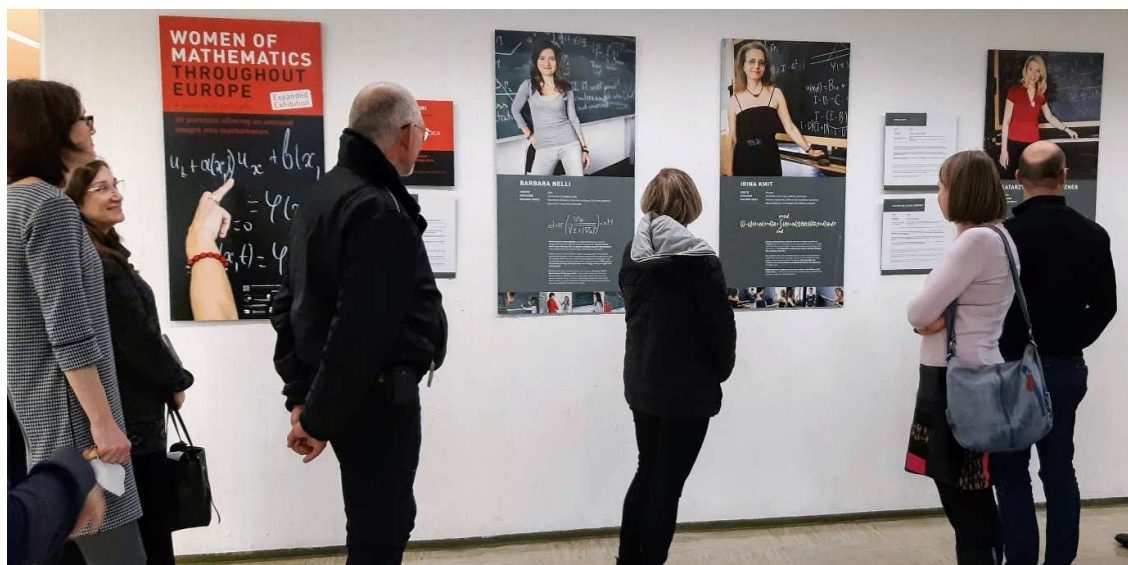
BOŠTJAN KUZMAN, UREDNIK ZA MATEMATIKO

→ Na Pedagoški fakulteti v Ljubljani smo si lahko v mesecu marcu ogledali razstavo plakatov **Ženske v matematiki – galerija portretov**. Na plakatih je s fotografijami in odlomki intervjujev predstavljenih 20 matematičark raziskovalk iz različnih evropskih držav. Avtorici razstave fotografiranja Noel Matoff in matematičarka Sylvie Paycha sta vsako od njih fotografirali pred z matematičnimi formulami porisano temnozeleno tablo. Portretirane raziskovalke so različnih starosti, v svojih izjavah pa razmišljajo o matematiki, svojem delu, prostem času in karierni poti.

Razstava, ki že nekaj let potuje po Evropi, pomaga razbijati še vedno zelo močan stereotip, da je matematika nekakšen šport za moške, v katerem ženske sicer lahko sodelujejo, a predvsem kot tajnice, asistentke ali učiteljice, ne pa kot samostojne znanstvenice ali celo vodje raziskovalnih ustanov. Ob po-

gledu na skupino samozavestnih, sicer pa povsem človeških matematičark na plakatih si obiskovalci razstave, še posebej bodoči učitelji in učiteljice, morda lažje predstavljajo, da lahko v 21. stoletju tudi komaj opazna deklica iz soseščine nekoč postane mednarodno uveljavljena znanstvenica, če bo na svoji študijski in karierni poti dobivala ustrezne spodbude.

Dejstvo je, da zaradi družbenega ustroja v preteklih stoletjih to praktično ni bilo mogoče. Ena redkih ženskih osebnosti, ki so nam znane iz zgodovine matematike, je bila Sophie Germain (1776–1831). Hčerka premožnega Parižana je imela 13 let, ko je v nemirnem času francoske revolucije leta 1789 v domači knjižnici odkrila matematična dela Eulerja in Newtona ter nekaterih francoskih avtorjev. Starša nje-nega navdušenja vsaj v začetku nista podpirala in naj bi ji celo odrekala topla oblačila in ogrevanje, da ne bi pozno v noč brala matematičnih del. Nekaj let kasneje se kot ženska ni mogla vpisati na univerzo, zato je pridobila zapiske predavanj in si pod (moškim) psevdonimom g. Le Blanc začela dopisovati s profesorjem Lagrangem.



SLIKA 1.

Poleg fizikalne teorije elastičnosti so jo najbolj pritegnili matematični problemi teorije števil, o katerih sta v tistem času svoji znameniti deli izdala Legendre in Gauss. Z obema si je dlje časa dopisovala in pri tem skrivala, da je ženska. Ko je leta 1807 Napoleonova vojska napadla nemško mesto Braunschweig, kjer je takrat prebival Gauss, je pod vtisom legende o Arhimedovi smrti pod vojaškim mečem osebno prosila generala Pernetyja, družinskega prijatelja, da Gaussu zagotovi varnost. Šele tri mesece kasneje je Gauss izvedel o njenem posredovanju in zapisal: »Kako naj izrazim svojo osuplost in občudovanje ob tem razkritju o svojem uglednem dopisovalcu gospodu Le Blancu [...] ko uspe ženski, ki zaradi svojega spola, naših navad in predsodkov sreča neskončno več ovir kot moški pri spoznavanju z zavitimi problemi teorije števil, vse to preseči in prodreti do najglobljih znanstvenih spoznanj, tedaj brez dvoma premore najbolj plemenit pogum, izjemnen talent in vrhunsko genialnost.«

Žal se je prav v mesecu marcu leta 2022, ko nastaja ta uvodnik, v Evropo spet vrnila silovita, kruta in brezobzirna vojna. Željo po enakopravnejši obravnavi žensk v matematiki in znanosti nasploh so v hipu preglasile pretresljive novice z ukrajinskih bojišč, v katerih je tu in tam omenjena tudi matematična skupnost. Med žrtvami napadov na mesto Kharkov je bila tako tudi 21-letna Julija, nekdanja udeleženka evropske dekliške matematične olimpijade. Ob tako tragični novici so zadnje vesti o letošnji odpovedi Mednarodnega matematičnega kongresa v Rusiji ali o napovedanem bojkotu Mednarodne fizikalne olimpijade v Belorusiji skoraj povsem nepomembne.

Posebej neprijetno je spoznanje, da je prav razvoj matematike in fizike zelo pripomogel k uničevalnemu orožju, ki v teh dneh seje smrt in opustošenje, namesto, da bi z njim omogočali boljše življenje vseh prebivalcev našega zelenega planeta. Tudi zato je pomembno, da v 21. stoletju na poti mladih v matematiko in fiziko ne spodbujamo zgolj tekmovalnosti in zmagovalne mentalitete, ampak tudi sodelovanje, vključenost in predvsem odločnost, da se zoperstavimo kakršnemukoli izločanju ali nadvladovanju na podlagi spola, kulture, vere, premoženja ali drugih, v bistvu nepomembnih stvari in se osredotočimo na številne resnično pomembne svetovne izzive, ki jih bodo morale reševati prihodnje generacije.



SLIKA 2.

Sophie Germain je pomembno prispevala reševanju Fermatove zadnje domneve in razvoju matematične teorije za opis Chladnijeve vibrirajoče plošče. Po njej se imenujejo tudi praštevila  $p$ , za katera je tudi  $2p + 1$  praštevilo, in se uporabljajo v kriptografiji. Portret naj bi jo prikazoval v starosti 14 let.



SLIKA 3.

Julia Zdanovska, uspešna udeleženka tekmovanj iz matematike in računalništva, je diplomirala na Nacionalni univerzi v Kijevu in kot prostovoljka poučevala otroke iz podeželja v okviru programa »Učenje za Ukrajino«, med obleganjem mesta Kharkov pa pomagala pri reševanju civilistov. Na univerzi MIT so njej v spomin že pripravili program matematičnega izobraževanja za ukrajinske otroke na daljavo, imenovan »Julia's dream«.

× × ×

# Pritisnjena krožnica in ukrivljenost krivulje



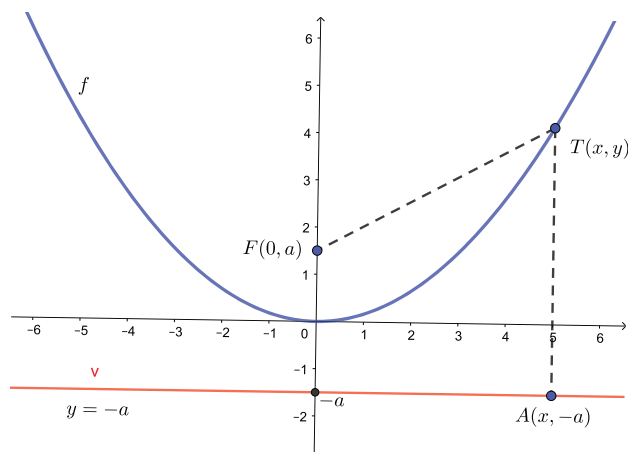
PETER LEGIŠA

→ Ukrivljenost krivulje v dani točki lahko merimo s pomočjo krožnice, ki se v tej točki dotika krivulje in ki se ji v dotikališču kar najboljše prilega. Izračunali bomo ukrivljenost parabole v temenu in ukrivljenost elipse v temenih. Povedali bomo še nekaj o ukrivljenosti bolj splošnih krivulj in o uporabi tega pojma v praksi.

## Parabola

Naj bo  $a > 0$ . V pravokotnem koordinatnem sistemu narišimo premico  $v$  z enačbo  $y = -a$  in točko  $F(0, a)$  kot na sliki 1.

Zanima nas množica točk  $T(x, y)$ , ki so enako oddaljene od  $v$  in  $F$ . Tej množici točk rečemo **parabola**. Ena točka na tej paraboli je izhodišče  $O$ . Razdalja med  $T$  in  $v$  je  $y + a$ . Razdalja med  $T$  in  $F$  pa je



SLIKA 1.

Parabola  $y = x^2/6$

kvadratni koren izraza  $x^2 + (y - a)^2$ . Torej je

$$\sqrt{x^2 + (y - a)^2} = y + a.$$

Če poenostavimo, dobimo  $4ay = x^2$  ali

$$y = \frac{x^2}{4a}.$$

Naša krivulja je torej graf enostavne kvadratne funkcije  $f(x) = x^2/4a$  in je simetrična glede na ordinatno os, ki ji zato rečemo *os parabole*.

Premico  $v$  imenujemo *vodnica* parabole. Točka  $(0, 0)$ , ki je presečišče parabole in njene osi, je *teme* parabole. Točka  $F$  pa je **gorišče** parabole. Če je naša parabola zrcalo, se namreč žarki, ki od zgoraj vpadajo na parabolo in so vzporedni njeni osi, odbijejo v gorišče  $F$ . Tega tu ne bomo dokazovali. Je pa to lastnost, zaradi katere uporabljamo parabolične antene, parabolična zrcala v teleskopih in podobno.

## Pritisnjena krožnica v temenu parabole

Narišimo krožnico  $K$  s polmerom  $r$  in s središčem  $S(0, r)$  na ordinatni osi kot na sliki 2. Ta krožnica se dotika abscisne osi in naše parabole v izhodišču.

Določimo presečišča naše parabole in krožnice  $K$ . Enačba krožnice je  $x^2 + (y - r)^2 = r^2$  ali  $x^2 + y^2 - 2ry = 0$ .

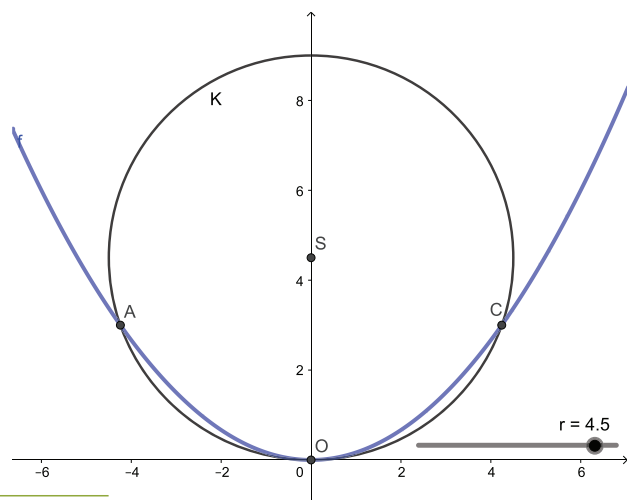
V presečišču je  $x^2 = 4ay$ . Tako je tam  $4ay + y^2 - 2ry = 0$  ali

$$y(y + 4a - 2r) = 0.$$

Eno presečišče je seveda pri  $y = 0, x = 0$ . Druga presečišča morajo zadoščati pogoju

$$y = 2r - 4a = \frac{x^2}{4a}.$$

Tako je  $x^2 = 8a(r - 2a)$ . Za  $r > 2a$  dobimo dve presečišču:  $A, C$ . Na sliki 2 imamo to narejeno za



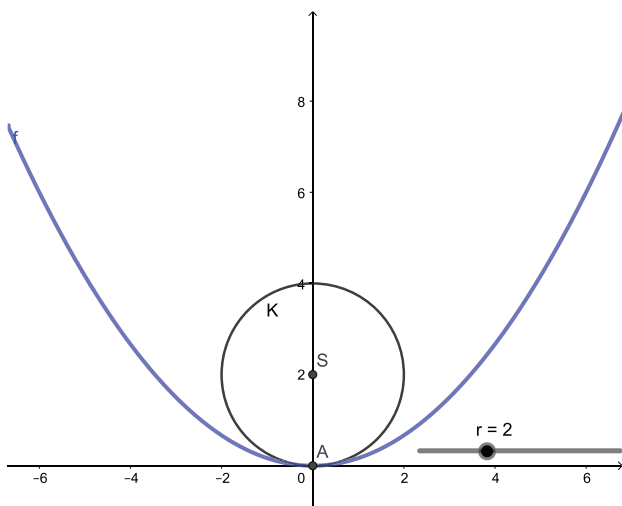
SLIKA 2.

Presečišča pri  $r = 4,5 > 2a$

parabolo  $6y = x^2$ , torej pri  $a = 1,5$ . Vidimo, da je v tem primeru v temenu parabola bolj »ukrivljena« kot pa krožnica  $K$ . Na Geogebra strani [1] poženite animacijo, ki spreminja  $r$ . Abscisi točk  $A, C$  sta

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{8a\sqrt{r - 2a}}.$$

Za  $r < 2a$  pa ni dodatnih presečišč; krožnica leži znotraj parabole, se je dotika v temenu, a je tam bolj ukrivljena kot parabola. To vidimo na sliki 3.



SLIKA 3.

Presečišča pri  $r = 2 < 2a$

Če začnemo z velikim  $r$  in ga počasi zmanjšujemo proti  $2a$ , se presečišči  $A, C$  zbližujeta in se pri  $r = 2a$  združita v izhodišču – temenu parabole. Na animaciji [1] lahko vidimo, da se v trenutku, ko se  $A, C$  združita, torej pri  $r = 2a$ , dobljena krožnica **najbolje prilega** paraboli v temenu. Tik pred tem se obe krivulji ujemata v treh zelo bližnjih točkah. Zato tej krožnici rečemo **pritisnjena krožnica** k paraboli v njenem temenu. Imamo jo na sliki 4.

Če ima krožnica polmer  $r$ , število  $1/r$  imenujemo **ukrivljenost** te krožnice. Smiselno je reči, da je ukrivljenost parabole v temenu enaka ukrivljenosti pritisnjene krožnice v tej točki, torej enaka  $1/r$ , kjer je  $r$  polmer pritisnjene krožnice. V našem primeru je  $r$  celo enak razdalji med goriščem in vodnico parabole.

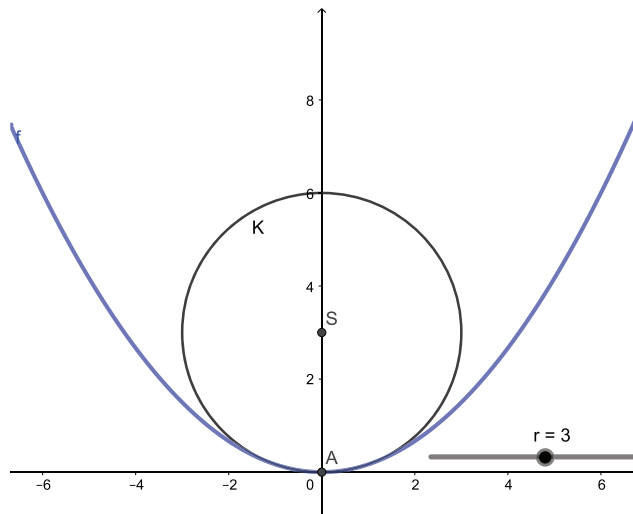
## Elipsa

Vzemimo zdaj elipso s polosema  $a$  in  $b$  in z enačbo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

kjer je  $a > b$ .

Spet bi radi našli krožnico, ki se najbolje prilega elipsi v temenu  $A(a, 0)$ . Ta krožnica bo vsebovala  $A$ . Njeno središče bo zaradi simetrije v točki  $S(c, 0)$ , kjer je  $0 < c < a$  kot na sliki 5. Če je  $r$  polmer



SLIKA 4.

Pritisnjena krožnica k paraboli

→ krožnice, je  $c = a - r$ . Enačba krožnice je torej

$$\blacksquare (x - a + r)^2 + y^2 = r^2.$$

Poiščimo presečišča obeh krivulj. Iz enačbe elipse je  $y^2 = b^2 - b^2 x^2 / a^2$  in tako za absciso presečišča velja

$$\blacksquare x^2 - 2x(a - r) + (a - r)^2 + b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2} - r^2 = 0.$$

Če malo predelamo, imamo

$$\blacksquare p(x) = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 + 2(r - a)x + a^2 - 2ar + b^2 = 0.$$

Vemo, da je  $x = a$  ena od rešitev enačbe, torej je polinom  $p(x)$  deljiv z  $(x - a)$ . Zdelimo (z dolgim deljenjem ali s Hornerjevim algoritmom), pa dobimo količnik

$$\blacksquare q(x) = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x + 2r - a - \frac{b^2}{a}.$$

V (dodatnih) presečiščih je ta količnik 0. Na spletni strani [2] poženite animacijo, ki spreminja polmer  $r$ . Opazujte, kaj se dogaja s presečišči. Animacija nas privede na misel, da dobimo pritisnjeno krožnico takrat, ko se dodatni presečišči ujemata s temenom, se pravi pri  $x = a$ . (Malo pred tem se obe krivulji ujemata v treh zelo bližnjih točkah.) Ob ujemanju je  $q(a) = 0$ . Takrat je

$$\blacksquare r = \frac{b^2}{a}.$$

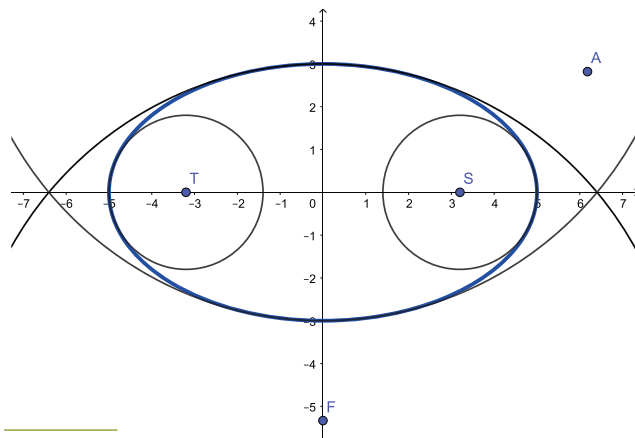
To imamo na sliki 5.

Še malo bolj lahko to utemeljimo, če ničlo polinoma  $q$  zapišemo kot

$$\blacksquare x = a + \left(\frac{b^2}{a} - r\right) \frac{2a^2}{a^2 - b^2}.$$

Če je  $r < b^2/a$ , je  $x > a$ , kar za nas nima pomena. Če je  $r > b^2/a$ , pa je  $x < a$  in se krožnica očitno slabo prilega elipsi. V temenih elipse na osi  $y$  ima pritisnjena krožnica polmer  $a^2/b$ .

Avtor tega članka je še poslušal predmet *Opisna geometrija*. Za izpit je bilo potrebno najprej oddati več slik, narisanih s tušem. Na eni je bilo med drugim potrebno narisati pritisnjene krožnice v vseh temenih elipse z danima polosema. To je dalo slutiti



SLIKA 5.

Elipsa s polosema  $a = 5$  in  $b = 3$ . Narisani so loki pritisnjenih krožnic v vseh temenih.

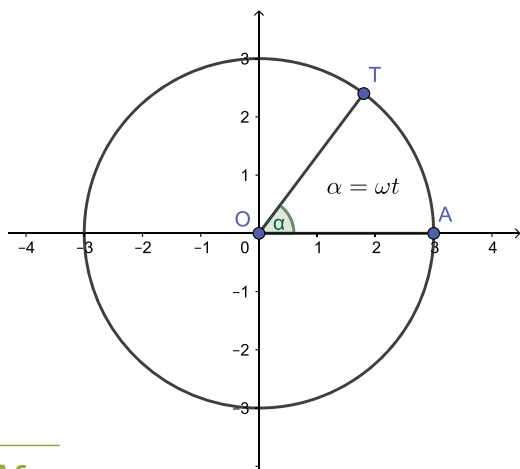
podobo elipse. Nato je bilo s pomočjo orodja, imenovanega *krivuljnik*, potrebno nekako povezati dele pritisnjenih krožnic v dokončno podobo elipse (slika 5). Kljub raznim krivuljam, vrezanim v orodje, kljub vrtenju krivuljnika v vse smeri – avtorju ni in ni šlo. Ni bilo mogoče v eni potezi s tem orodjem povezati oba krožna loka s črto in kolikor toliko prepričljivo sestaviti četrtno elipse. Dodaten problem je bilo dejstvo, da je napake, narejene s tušem, skoraj nemogoče popravljati. Da ne govorimo o packah! Skoraj vsi smo uporabljali preprosta jeklena peresa. (Mimogrede, podobna zoprna je bila naloga: Nariši ravno črto dolžine 15 cm iz samih pikic. Na centimeter naj bi bilo kakih dvajset do trideset pikic! Pregledovalec je bil znan po silno ostrem očesu.)

Naša obravnava pritisnjene krožnice je bila zabaven primer uporabe preproste srednješolske matematike. Sami lahko na ta način poskusite določiti polmer pritisnjene krožnice v temenu hiperbole. Za bolj zapletene krivulje pa se stvari lotimo drugače.

## Posplošitev

Krivuljo lahko podamo kot pot gibajoče se točke. V ravnini, recimo, za vsak čas  $t$  podamo koordinati  $x(t)$  in  $y(t)$  oziroma krajevni vektor  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ .

Primer je enakomerno kroženje točke  $A$  v razdalji  $R$  okrog izhodišča. Na sliki 6 imamo krožnico s polmerom  $R$  in s središčem v izhodišču. Zveznica točke



SLIKA 6.

Kroženje s kotno hitrostjo  $\omega$ .

$T$  z izhodiščem oklepa kot  $\alpha$  s pozitivnim delom abscisne osi.

Naj bo  $\alpha = \omega t$ . Tu je  $\omega$  (fiksna) **kotna hitrost**. Koordinati točke  $T(x, y)$  sta  $(R \cos \alpha, R \sin \alpha)$ . Tako je

$$\vec{r}(t) = (R \cos(\omega t), R \sin(\omega t)).$$

Ker točka  $T$  v času  $t$  preteče lok dolžine  $R\alpha = R\omega t$ , je velikost njene hitrosti enaka  $v = R\omega$ .

V naslednjem kratkem odstavku bomo izpeljali še pospešek točke  $T$  pri takem kroženju. (Če še ne poznate odvoda, lahko ti dve vrstici preskočite.)

Če formulo za  $\vec{r}(t)$  dvakrat odvajamo, dobimo vektor pospeška točke

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \left( \frac{d^2}{dt^2} x(t), \frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) \\ &= (-R\omega^2 \cos(\omega t), -R\omega^2 \sin(\omega t)) \end{aligned}$$

ali

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t).$$

Pospešek kaže od točke  $T$  proti središču krožnice. To je **centripetalni pospešek**.

Njegova velikost je

$$a = R\omega^2 = \frac{v^2}{R}.$$

Če je velikost hitrosti enaka 1,  $v = 1$ , je pospešek enak  $1/R$ , kjer je  $R$  polmer krožnice.

Imejmo zdaj kako bolj splošno krivuljo. Če v točki  $A$  take krivulje obstaja pritisnjena krožnica, se v bližini te točke krivulja zelo dobro prilega tej krožnici.

Če se po krivulji vozimo s hitrostjo 1, bo v bližini točke  $A$  praktično enako, kot bi se vozili po pritisnjeni krožnici s hitrostjo 1, torej bo pospešek v točki  $A$  enak  $1/R$ , kjer je  $R$  polmer pritisnjene krožnice. Pravimo, da je  $1/R$  **ukrivljenost** krivulje v točki  $A$ ,  $R$  pa **krivinski polmer** v tej točki.

To nam za »lepe« krivulje zagotavlja obstoj pritisnjene krožnice in omogoča določiti polmer pritisnjene krožnice. Obstaja sorazmerno enostavna formula za ukrivljenost, v kateri nastopajo prvi in drugi odvodi funkcij  $x(t), y(t)$ , vendar izpeljava presega nivo Preseka.

Ker imata pritisnjena krožnica in krivulja v točki  $A$  skupno tangento, je za ravninske krivulje lahko najti središče  $S$  pritisnjene krožnice: zveznica  $AS$  je pravokotna na tangento.

Krivinski polmer je zelo pomemben pri projektiranju cest. Predpisi določajo, kakšna sme biti in kako se lahko spreminja ukrivljenost ceste določene kategorije. Prenaglo povečanje ukrivljenosti namreč pomeni – ker tisti, ki spregledajo omejitev hitrosti, težko dovolj hitro zavrejo – veliko povečanje centrifugalnega pospeška (po formuli  $a = \frac{v^2}{R}$ ). Z avtom, kolesom lahko zletimo s ceste ali pa se znajdemo na napačni strani. Pred desetletji je bilo nekaj takih »črnih točk« celo na najpomembnejših cestah zaradi težkega terena in pomanjkanja finančnih sredstev za gradnjo predorov. Tako je bilo, recimo, na štajerski strani trojanskega klanca.

V angleščini je termin za pritisnjeno krožnico *osculating circle*. Latinski izraz *osculum* pomeni *poljub*. To je torej krožnica, ki poljublja krivuljo v dani točki.

## Literatura

- [1] P. Legiša, *Krožnica se dotika parabole v temenu*, GeoGebra, dostopno na [www.geogebra.org/m/tackgfvq](http://www.geogebra.org/m/tackgfvq), ogled 21. marca 2022.
- [2] P. Legiša, *Krožnica se dotika elipse*, GeoGebra, dostopno na [www.geogebra.org/m/m6bn74sg](http://www.geogebra.org/m/m6bn74sg), ogled 21. marca 2022.

× × ×

# Po deblu z vrvno zanko



BARBARA ROVŠEK

→ Navdih za ta prispevek je druga teoretična naloga s 5. Evropske fizikalne olimpijade (EFO), naloga je na sliki 1. Spodbudo za pisanje pa je prispeval urednik Preseka potem, ko smo nalogo v stiski s časom le približno rešili na prvem zoom srečanju Presekovega seminarja za učitelje matematike in fizike. Zdaj nas čas ne davi in si bomo privoščili uvod, jedro in zaključek, pa še o praktičnem preizkusu bomo poročali.

Včasih mora gozdar pri delu splezati na drevo, delavec elektro podjetja na drog javne razsvetljave, vojak pa za vajo na kar en drog. Pri plezanju si lahko pomagajo na različne načine; eden od načinov je, da okoli drevesa ali droga napeljejo vrvno ali tračno zanko, ki jo na deblu zadrži sila lepenja (slika 2). Ta sila ne zadrži le same zanke, ampak tudi gozdarja, delavca ali vojaka, ki je vpet v zanko, kot prikazuje slika 2. Ta tehnika ni nova iznajdba; tako so si npr. pri plezanju na drevesa med obiranjem plodov že davno pomagali nabiralci kokosovih oreh (slika 3).

Izkaže se, da lahko pogoj za to, da zanka ne zdrsi ob deblu ali drogu navzdol, izrazimo kot pogoj, ki mu mora zadostiti razmerje med dolžino zanke  $L$  in obsegom debla ali droga  $2\pi R$  in v katerem, seveda, nastopa tudi koeficient lepenja (statičnega trenja). Za povrh bomo izračunali še obliko zanke.

**Naloga.** Okoli navpičnega valja s polmerom osnovne ploskve  $R$  je ovita vrvna zanka z dolžino  $L \geq L_0 = 2\pi R$ . Iščemo največjo možno dolžino zanke  $L$ , pri kateri zanka še obstane na valju, ko jo vlečemo vzdolž osi valja s silo  $\vec{F}$ , ki je poljubno velika (in se vrvica še ne pretrga), kot prikazuje slika 4. Silo težje vrvice lahko zanemarimo, ker je bistveno manjša od sile  $\vec{F}$ . Zanko vlečemo ob valju vzporedno z njegovo osjo.

## T2: Valj na povodcu

Na vrvici je zanka z obsegom  $L > 2\pi R$ , v katero namestimo valj s polmerom  $R$ . Med vrvico in valjem deluje trenje, koeficient trenja je  $\mu$ . Prosto krajišče vrvice vlečemo navzdol vzporedno z osjo nepremičnega valja (kot prikazuje slika). Če je obseg zanke večji od kritičnega obsega  $L > L_0$ , zanka zdrsne po valju, pri čemer se njena oblika ne spremeni. Če je obseg zanke manjši od kritičnega, trenje med zanko in valjem povzroči, da zanka ostane na svojem mestu (trenje jo "zaklene"). S povečevanjem sile bi se zanka v tem primeru v nekem trenutku strgala. Poišči kritični obseg zanke  $L_0$ . Maso vrvice zanemari; prav tako upoštevaj, da se vrvica niti ne zvija niti ne suče, ko jo vlečemo navzdol.

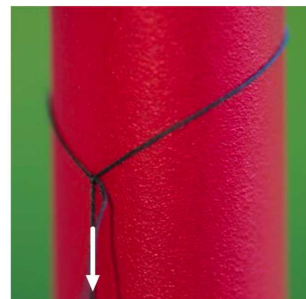
Utegne ti koristiti, če veš, da velja

$$2 \int \sqrt{1+x^2} dx = x\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arcsinh} x,$$

kjer je  $\operatorname{arcsinh} x \equiv \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ .

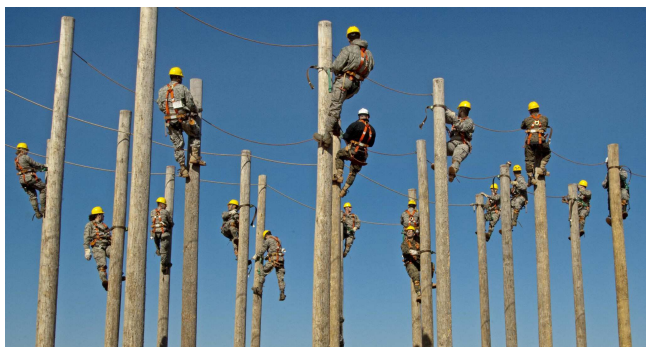
### SLIKA 1.

Druga teoretična naloga (od treh) na 5. Evropski fizikalni olimpijadi, ki je potekala na daljavo junija 2021.



Naloga je tipična naloga iz matematične fizike: iz fizikalnih zakonov mehanike (o ravnovesju), zapisanih za majhen del sistema (del vrvice v zanki, naviti okoli debla), izpeljemo diferencialno enačbo. Razmislimo še o robnih pogojih ter poiščemo rešitev – funkcijo, ki zadosti diferencialni enačbi in robnim pogojem ter opiše obliko vrvne zanke okoli debla.

Preden se lotimo računov, preverimo nalogo s poskusom: na lesen valj (uporabili smo valj iz otroške lesene sestavljanke s premerom 3,9 cm) nata-



SLIKA 2.

Ameriški vojaki vadijo plezanje po drogovi. Pri tem uporabljajo vrvi in trakove, ki jih ovijejo okoli drogov ([www.piqsels.com/en/public-domain-photo-fjpti](http://www.piqsels.com/en/public-domain-photo-fjpti)).

knemo zanko, ki jo naredimo tako, da lahko uravnavamo njen obseg. Zanko vlečemo ob valju vzporedno z njegovo osjo (vseeno je, kako je valj orientiran v prostoru in ali vlečemo navzgor ali navzdol). Če je obseg zanke prevelik, zanka ob valju drsi (slika 5a) Opazimo lahko, da se oblika zanke med drsenjem vzdolž enakomerno gladkega (oziroma hrpačvega) plašča valja ne spreminja. Obseg zanke postopoma zmanjšujemo, dokler obseg ni dovolj majhen, da zanka valj objame tako, da po njem ne zdrsne več (slika 5b).

Poskus ponovimo še z valjem, ovitim v list papirja. Ko najdemo največji obseg zanke, pri katerem zanka ne zdrsne po valju, na papirju, v katerega je ovit valj, s flomastrom označimo obris zanke (slika 5c). Zanko snamemo, papir razvijemo in si ogledamo črto, ki označuje lego zanke: videti je kot del krožnega loka ali parabola – izkaže se, da tudi je parabola (slika 5d).

Zdaj se naloge lotimo še teoretično. Kaj lahko povemo o tem fizikalnem pojavu? Zanka na valju miruje, torej so sile na zanko v ravnovesju. V smeri navzgor deluje na zanko sila  $\vec{F}$ , s katero zanko vlečemo ob plašču valja v smeri simetrijske osi valja. To silo uravnovesi sila lepenja, ki prijemlje po celotni dolžini zanke in je v mejnem primeru (ko je vrvice v zanki tako dolga, kot je največ lahko in na meji zdrsa) na vsakem delčku vrvice v zanki usmerjena v smeri, nasprotni smeri sile  $\vec{F}$  in smeri zdrsa, ko sila  $\vec{F}$  preseže mejno silo. Poleg tega je v mejnem primeru velikost sile lepenja, ki deluje na vsak delček vrvice (z dolžino  $\Delta l$ ), največja mogoča,  $\Delta F_l = k \cdot \Delta F_\perp$ , kjer



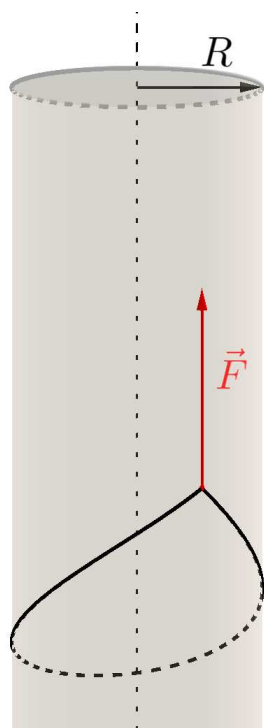
SLIKA 3.

Nabiralec kokosovih oreh, poklic starodavne in tradicionalne kulture Tamilcev (Thamizhparithi Maari, CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons).

je  $k$  koeficient lepenja in  $\Delta F_\perp$  sila, s katero valj pritiska na delček zanke v smeri pravokotno na plašč valja in stran od osi valja. Tik pred zdrsom neenačba  $\Delta F_l \leq k \cdot \Delta F_\perp$ , ki sicer opredeljuje silo lepenja, preide v enačbo.

Kot smo namignili v uvodu, se naloge lotimo z obravnavo majhnega dela sistema. Opišimo torej ravnovesje delčka zanke z dolžino  $\Delta l$ : na obeh krajiščih delujeta nanj preostala vrv s silama  $\vec{F}_1$  in  $\vec{F}_2$ , in valj, na katerega je zanka navita, s silo valja  $\Delta \vec{F}_v$ . Silo valja lahko kar takoj izrazimo kot vsoto sile  $\Delta \vec{F}_\perp$ , s katero valj pritiska na delček zanke v radialni smeri (navzven), in sile lepenja  $\Delta \vec{F}_l$ , ki deluje na delček zanke v smeri, ki je vzporedna simetrijski osi valja in nasprotna sili  $\vec{F}$  (in tangencialna na plašč valja) (slika 6).



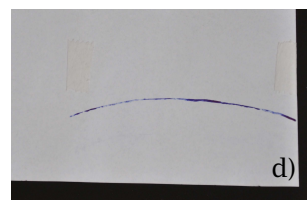
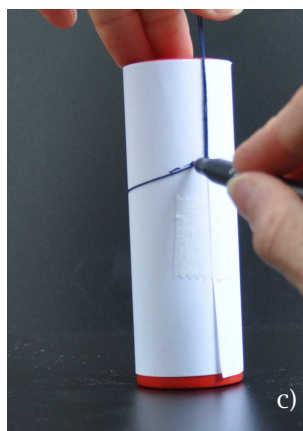
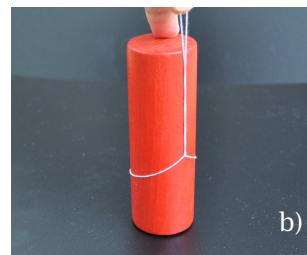
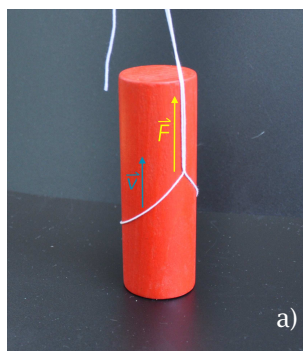


SLIKA 4.

Skica valja in vrvne zanke, ki objema valj in ki jo v smeri, vzporedni s simetrijsko osjo valja, v eni točki vleče sila  $\vec{F}$ .

Sili  $\vec{F}_1$  in  $\vec{F}_2$  sta makroskopski sili, ki napenjata delček vrvne zanke, ovite okoli valja. Po velikosti sta skoraj enaki in primerljivi s silo  $\vec{F}$ . Sili  $\vec{F}_1$  in  $\vec{F}_2$  ležita vsaka v svoji ravnini, tangencialni na plašč valja. Ti dve ravnini sta skoraj vzporedni, pa ne popolnoma: ena glede na drugo je zasukana za majhen kot  $\Delta\varphi$ , kot prikazuje slika 7, kjer valj, okoli katerega je zanka navita, opazujemo z vrha (opazujemo osnovno ploskev).

Sile, ki smo jih našteali, so usmerjene v različne smeri prostora. Izkaže se, da je vsako od njih prikladno razstaviti na dve komponenti: na komponentno vzdolž simetrijske osi valja – osi  $z$ , in komponento, ki leži v ravnini  $xy$ . Če vpeljemo še koordinato  $w$ , ki meri lego delov vrvne zanke po obsegu valja (izhodišče  $w = 0$  je nasproti prijemališča sile  $\vec{F}$ , prijemališče te sile pa je pri  $w = \pm\pi R$ ), lahko vsako od sil, ki delujejo na delček zanke, zapišemo z največ dvema komponentama.



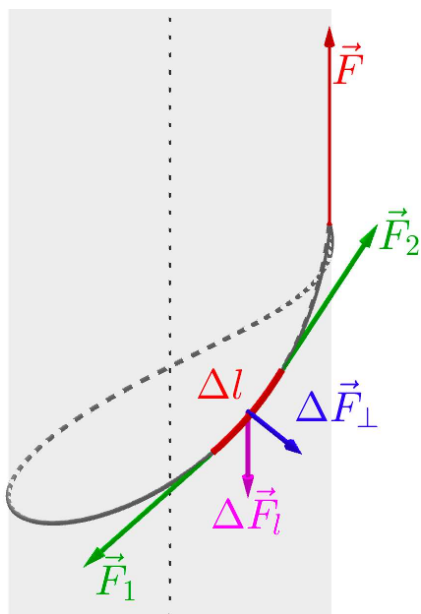
SLIKA 5.

a) Zanka s prevelikim obsegom drsi vzdolž valja. b) Ko obseg zanke dovolj zmanjšamo, se zanka zadrzne okoli valja in na njem miruje. c) Valj po plašču tesno ovijemo z listom papirja in ponovimo poskus z zanko. S flomastrom na papir narišemo obris zanke. d) Papir (plašč valja) razgrnemo in si ogledamo obliko zanke še v dveh dimenzijah.

Sila  $\Delta\vec{F}_\perp$  leži v ravnini  $xy$  (je pravokotna na plašč valja in glede na postavitev valja po definiciji nima komponente v smeri osi  $z$ ), sila  $\Delta\vec{F}_\parallel$  pa je usmerjena vzdolž osi  $z$  (nima komponente v ravnini  $xy$ , kar smo zahtevali na začetku).

Vodoravni komponenti sil  $\vec{F}_1$  in  $\vec{F}_2$ , ležita v ravnini  $xy$  in hkrati vsaka v svoji (na plašč valja) tangencialni ravnini. Ti dve komponenti označimo z  $\vec{F}_{1,w}$  in  $\vec{F}_{2,w}$ . Na sliki 8 so prikazane vse komponente sil v ravnini  $xy$ : ker delček vrvice (na sliki označen z rdečo) miruje, je njihova vsota enaka 0. Ker je sila  $\Delta\vec{F}_\perp$  radialna, komponenti  $\vec{F}_{1,w}$  in  $\vec{F}_{2,w}$  pa tangencialni, v ravnovesju neizbežno velja

$$|\vec{F}_{1,w}| = |\vec{F}_{2,w}| = F_w.$$



SLIKA 6.

Sile, ki delujejo na del zanke z dolžino  $\Delta l$ , ko zanko na enem mestu vleče vzdolž osi sila  $\vec{F}$  in zanka miruje.

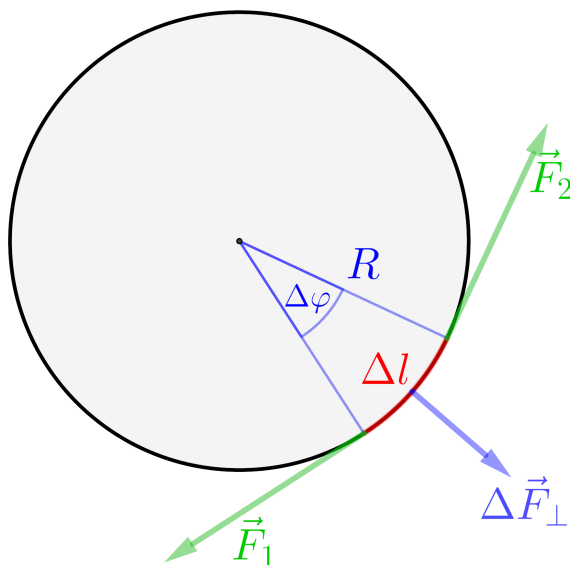
To pomeni, da je ta komponenta sile, ki napenja delček vrvene zanke, po celi zanki (za vse delčke zanke) povsod enaka. Na sliki 8 (pa tudi že na sliki 7) ima projekcija delčka vrvene zanke z dolžino  $\Delta l$  na ravnino  $xy$  dolžino  $\Delta w = R \cdot \Delta\varphi$ , kjer je  $\Delta\varphi = \frac{\Delta w}{R}$  kot, ki ga delček zanke opiše v ravnini  $xy$ .

Zapišimo pogoj za ravnovesje sil, ki delujejo na delček zanke, posebej za komponente sil v ravnini  $xy$  in potem še za komponente sil v smeri osi  $z$ .

Za velikosti komponent sil v ravnini  $xy$  v ravnovesju velja  $\Delta F_{\perp} = 2 \cdot F_w \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2}$ . Ko upoštevamo, da je  $\Delta\varphi$  (in seveda tudi  $\frac{\Delta\varphi}{2}$ ) zelo majhen in zato  $\sin \frac{\Delta\varphi}{2} \approx \frac{\Delta\varphi}{2}$ , dobimo za velikost radialne sile, s katero delček vrvene zanke pritiska na valj, ta pa nazaj nanj, izraz

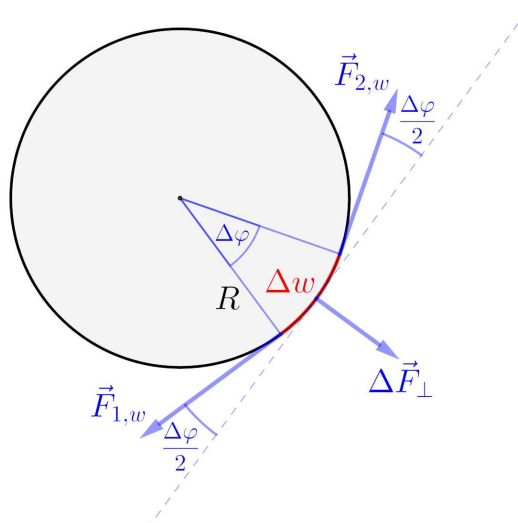
$$\Delta F_{\perp} = 2 \cdot F_w \cdot \frac{\Delta\varphi}{2} = F_w \cdot \Delta\varphi = F_w \cdot \frac{\Delta w}{R}.$$

(Vemo, kam nas vodijo vsi ti  $\Delta$ ; ne slepomišimo in kar na sredi poti preidimo z  $\Delta$  na infinitezimalno dolžino zanke in razlik:  $\Delta l \rightarrow dl$ ,  $\Delta\varphi \rightarrow d\varphi$ ,  $\Delta w \rightarrow dw$  in tudi za sili, ki sta majhni, zapišimo  $\Delta F_{\perp} \rightarrow dF_{\perp}$  in  $\Delta F_l \rightarrow dF_l$ .)



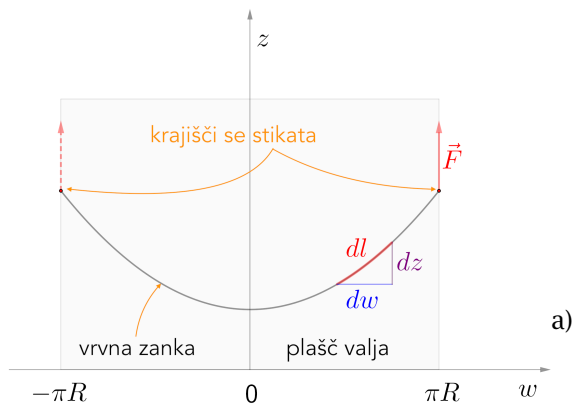
SLIKA 7.

Pogled na del zanke z vrha valja. Sili  $\vec{F}_1$  in  $\vec{F}_2$  ležita vsaka v svoji ravnini, tangencialni na plašč valja, in sta ena glede na drugo zasukani za kot  $\Delta\varphi$  (okoli osi valja).

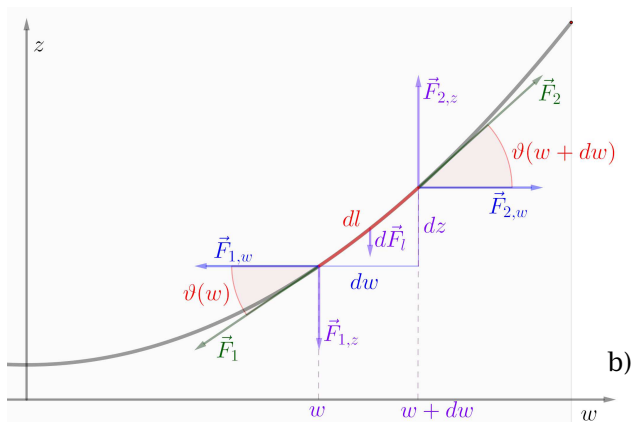


SLIKA 8.

Komponente sil na del zanke, ki ležijo v ravnini  $xy$ .



a)



b)

**SLIKA 9.**

a) Oblika zanke, ki miruje na valju, v ravnini, v katero razgrnemo plašč valja. Sila  $\vec{F}$  prijemlje v točki  $w = \pm\pi R$ . b) Komponente sil, ki delujejo na del zanke z dolžino  $dl$  in ki ležijo v ravninah, tangencialnih na plašč valja; prikažemo pa jih v ravnini, v katero razgrnemo plašč valja.

Ostale so nam še komponente sil v smeri simetrijske osi valja, osi  $z$ . Skico zanke, delčka zanke in sil, ki delujejo nanj, narišemo še v ravnini, v katero razgrnemo plašč valja (slika 9a, kot na sliki 5d). Za velikosti komponent sil vzdolž osi  $z$  v ravnovesju (glej sliko 9b) velja  $F_{2,z} = F_{1,z} + dF_l$ . Komponenti  $F_{1,z}$  in  $F_{2,z}$  izrazimo z  $F_{1,w} = F_{2,w} = F_w$  in tangensom kota  $\vartheta$  pri krajiščih delčka zanke; velja  $\tan \vartheta = \frac{dz}{dw}$  in  $F_{1,z} = F_w \cdot \tan \vartheta|_w$  in  $F_{2,z} = F_w \cdot \tan \vartheta|_{w+dw}$ . Ko izenačimo oba izraza za silo lepenja, ki deluje na

delček zanke,

$$\blacksquare dF_l = k \cdot dF_{\perp} = k \cdot F_w \cdot \frac{dw}{R}$$

in

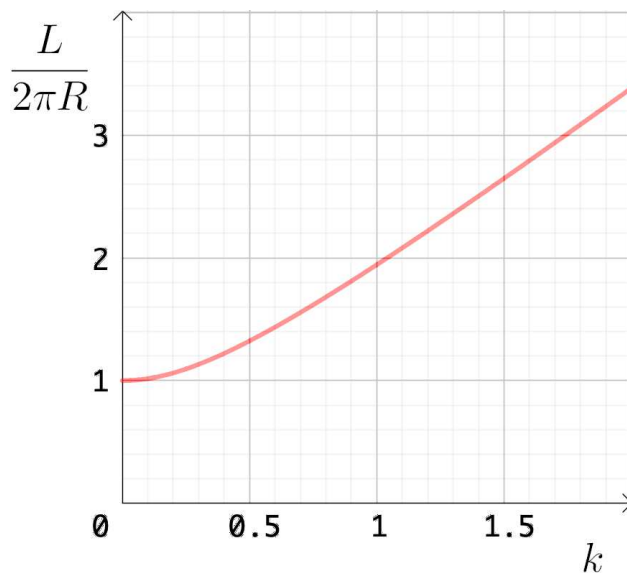
$$\blacksquare dF_l = F_{2,z} - F_{1,z} = F_w \cdot \left( \frac{dz}{dw} \Big|_{w+dw} - \frac{dz}{dw} \Big|_w \right)$$

dobimo diferencialno enačbo za funkcijo  $z(w)$ , ki opiše lego vrhne zanke na valju

$$\blacksquare \frac{\frac{dz}{dw} \Big|_{w+dw} - \frac{dz}{dw} \Big|_w}{dw} = \frac{d^2z}{dw^2} = \frac{k}{R}.$$

Funkcija, katere drugi odvod je konstanta, je parabola,  $z(w) = \frac{k}{2R} w^2$ , pri čemer smo izbrali vrednost (robni pogoj)  $z(w = 0) = 0$ .

Ostal nam je še izračun obsega vrhne zanke, kar je zdaj s pomočjo matematičnega priročnika ali namiga s konca naloge (slika 1) razmeroma enostavna vaja iz

**SLIKA 10.**

Graf razmerja  $\frac{L}{2\pi R} = \frac{L}{L_0}$  med dolžino zanke in obsegom droga v odvisnosti od koeficienta lepenja  $k$ .

integriranja:

$$\begin{aligned} L &= \int dl = 2 \int_0^{\pi R} \sqrt{dz^2 + dw^2} \\ &= 2 \int_0^{\pi R} \sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dz}\right)^2} dz \\ &= 2 \int_0^{\pi R} \sqrt{1 + \left(\frac{kw}{R}\right)^2} dz \end{aligned}$$

in končno dobimo kritični obseg zanke, pri katerem zanka ravno še ne zdrsne po valju

$$L = R\pi\sqrt{1 + (k\pi)^2} + \frac{R}{k} \operatorname{arcsinh}(k\pi).$$

V skrajnem primeru, ko je lepenja zelo malo ali nič, torej  $k \rightarrow 0$ , funkcijo  $\operatorname{arcsinh}(x)$  nadomestimo s 1. členom v njenem razvoju v Taylorjevo vrsto,  $\operatorname{arcsinh}(x) = x - \frac{x^3}{6} + \dots$  in izraz za  $L$  preide v obseg valja:  $L = R\pi + \frac{R}{k} k\pi = 2\pi R$ . Če po drogu bolj drsi kot ne, mora delavec vrv okoli njega napeljati zelo tesno in kar po obsegu droga. Če je lepenja več, si lahko privoščimo nekoliko daljšo zanko. Graf, ki prikazuje, kako je razmerje  $\frac{L}{2\pi R}$  odvisno od koeficienta lepenja, je na sliki 10.

Kako na »strmino« oziroma naklon zanke  $\frac{dz}{dw}$  vpliva koeficient lepenja  $k$  in polmer valja  $R$ ? Naklon zanke se vzdolž obsega zanke spreminja sorazmerno z oddaljenostjo od najnižje točke;  $\frac{dz}{dw} = \frac{k}{R} w$ ; naklon je sorazmeren  $k$  in obratnosorazmeren  $R$ . Povprečni naklon zanke po celem obsegu pa je odvisen le od  $k$ :  $\left(\frac{dz}{dw}\right) = \frac{z(w=\pi R) - z(w=0)}{\pi R} = \frac{k\pi}{2}$ , kar prikazujejo tudi zaporedne sličice na sliki 11, kjer je zanka

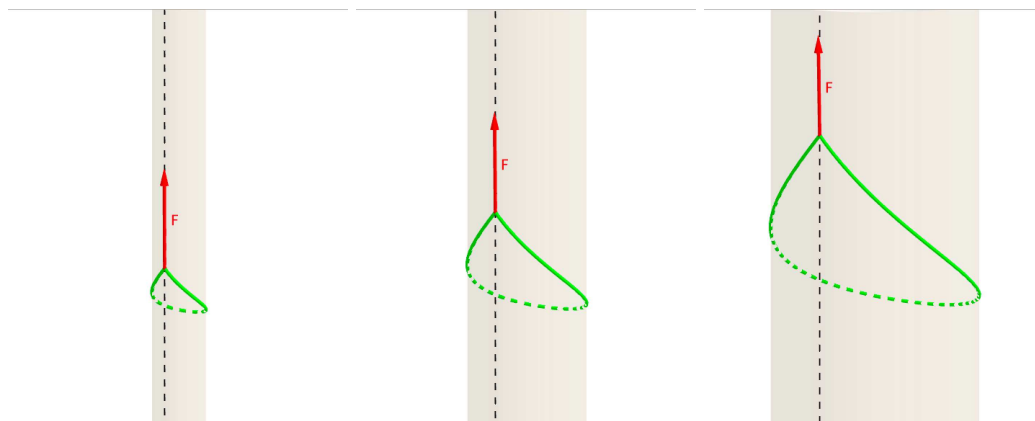
ovita okoli različno debelih valjev pri istem koeficientu lepenja  $k$ .

Še eno (no, eno in pol) vprašanje nam pride na misel: kolikšna je lahko največ sila  $\vec{F}$ , da se vrv ne strga? Kje se strga? Pustimo bralcu zadoščenje, da sam poišče odgovora!

Začeli smo s fotografijami uporabnikov tega pojava, ki s pomočjo vrvene tehnike plezajo na drogeve in drevesa. Pozornemu očesu ni ušla podrobnost, v kateri se realni prizori nekoliko razlikujejo od tu obravnavanega problema: obiralec kokosovih orehov na sliki 3 je v zanki vpet na tak način, da jo vleče v smeri, ki ni vzporedna z osjo debla. Na tak način povzroči večjo pravotno komponento sile debla na zanko in tudi ustrezno večjo silo lepenja ter doseže, da je njegovo plezanje še bolj varno.

S tako zapletenimi nalogami, ki znatno presegajo obseg srednješolske fizike, se morajo ukvarjati dijaki na Evropski fizikalni olimpijadi. In ukvarjajo se uspešno; med priznanji, ki so jih na EFO dobili, sta tudi dve *Best solution of Theoretical problem* (Marko Čmrlec in Tevž Lotrič) in ena *Best in Theory* (skupen uspeh pri reševanju teoretičnih nalog, Marko Čmrlec). Arhiv nalog, rešitev in rezultatov z vseh petih dosedanjih EFO je na spletni strani [eupho.ee](http://eupho.ee). Na spletni strani [www.geogebra.org/m/g2wdhstw](http://www.geogebra.org/m/g2wdhstw) pa si lahko zanko, ki je napeta okoli valja, ogledaš iz različnih smeri, pa še vpliv koeficienta lepenja na njeno obliko lahko opazuješ.

Priporočamo tudi ogled kratkega posnetka plezanja po deblu s tradicionalno tehniko japonskih obiralcev cipres (buri-nawa) na YouTubeu: [youtu.be/\\_Octm4nK2Fc](https://youtu.be/_Octm4nK2Fc).



**SLIKA 11.**

Vrvica s kritično dolžino  $L$ , napeta okoli različno debelih drog pri istem koeficientu lepenja  $k$ .

× × ×



A Cartesian coordinate system showing a circle centered at  $C(-1,0)$ . The circle is shaded light blue and passes through the origin  $(0,0)$ . The x-axis and y-axis are shown as solid black lines.

|                                |                                |                               |             |                                                                          |                                             |                                     |   |  |
|--------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|-------------|--------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|-------------------------------------|---|--|
|                                |                                | USLUŽBENCI                    | JAVNI POZIV | GLASEN FIZIKALNI REKVIZIT, ZVONEC                                        | ORGANSKA SPOJINA V CELICAH LESNATIH RASTLIN | DANSKI OTOK                         |   |  |
|                                |                                | DIFERENCIALNI OPERATOR        |             |                                                                          |                                             |                                     |   |  |
|                                |                                | ROMAN MIRE MIHELČ             |             |                                                                          | 4                                           |                                     |   |  |
|                                |                                | NEMŠKI SLIKAR (ANTON RAPHAEL) |             |                                                                          |                                             |                                     |   |  |
|                                |                                | VNEMA                         |             |                                                                          |                                             | KOZJANSKO NASELJE Z MOGOČNIM GRADOM |   |  |
|                                |                                | DUŠENA MESNA JED              |             |                                                                          |                                             |                                     |   |  |
| KAZIMIR TARMAN                 | OSTRO, ROBATO KAMENJE          |                               |             | MIKROVEZJE                                                               |                                             |                                     |   |  |
|                                | PRITOK KAMNISKE BISTRICE       |                               |             | VITEŠKA IGRA V SINJU                                                     |                                             |                                     |   |  |
|                                | VOGAL                          |                               |             | PRIBOR ZA REZANJE                                                        |                                             |                                     |   |  |
|                                | SRBSKI JEZIKO-SLOVEC OBRADOVIČ |                               |             | VELETOK V VZHODNI AZIJI                                                  | ZBIRKA DATOTEK NA DANEM POGONU              |                                     |   |  |
| KITAJSKA JADRNIC               |                                |                               |             |                                                                          | SKUPINA PRESEČNIH KRIVULJ                   |                                     |   |  |
| JUŽNO-AFRIŠKA REPUBLIKA        |                                |                               |             |                                                                          | OTEKLINA                                    |                                     |   |  |
|                                |                                |                               |             | AM. REŽISER (JAMES) NAŠ UPRAVNIK AVTOCEST                                |                                             | 10                                  |   |  |
|                                |                                |                               |             | NAŠ ROBOTIK (ALEŠ)                                                       |                                             |                                     |   |  |
|                                |                                |                               |             | NASELJE V LOŠKI DOLINI                                                   |                                             |                                     |   |  |
|                                |                                |                               |             | GORENJSKO LETOVIŠČE                                                      |                                             |                                     |   |  |
|                                |                                |                               |             | ANGLEŠKI MATEMATIK (BROOK)                                               |                                             |                                     |   |  |
| DRUGO NAJVEČJE MESTO V ESTONIJ |                                |                               |             | PRVI POMLADNI MESEČ                                                      |                                             |                                     |   |  |
| KOCINJE                        |                                |                               |             | UREJENO ZAPOREDJE TONSKIH TRAJANJ V GLASBI                               | KAKOVOSTNI RAZRED                           | OČKA, OČI                           |   |  |
|                                | PLOD                           |                               |             |                                                                          |                                             |                                     |   |  |
|                                | LUTKAR MAJARON                 |                               |             |                                                                          |                                             |                                     |   |  |
|                                |                                |                               |             | POLOTOK NA SEVERU AVSTRALJE                                              |                                             | ČASOVNA ENOTA                       |   |  |
|                                |                                |                               |             | VRSTA ŽITA                                                               |                                             | VAS NA KOČEVSKEM                    |   |  |
|                                | DLETO                          |                               |             |                                                                          |                                             | PIVO ST. SLOVANOV                   |   |  |
|                                | KATRAN                         |                               |             |                                                                          |                                             | JAPONSKA ISKALKA BISEROV            |   |  |
|                                |                                | 8                             |             |                                                                          |                                             |                                     | 5 |  |
|                                |                                |                               |             | PUSČAVSKA POKRAJINA V SEVERNI AVSTRALJI                                  |                                             |                                     |   |  |
|                                | ERBLJ                          |                               |             | SPOROČILO, POSLANO Z MOBILNIM TELEFONOM                                  |                                             |                                     |   |  |
|                                | KELVIN                         |                               |             |                                                                          |                                             |                                     |   |  |
|                                |                                |                               |             | AVSTRIJSKI NEOBAROČNI SLIKAR, USTVARJALEC OGROMNIH RAZKOŠNIH SLIK (HANS) | 15                                          |                                     |   |  |

### NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebniimi podatki v obrazec na spletni strani

[www.presek.si/krizanka](http://www.presek.si/krizanka)

ter ga oddajte do **15. maja 2022**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

# Linearne preslikave ravninskih likov



BOŠTJAN KUZMAN

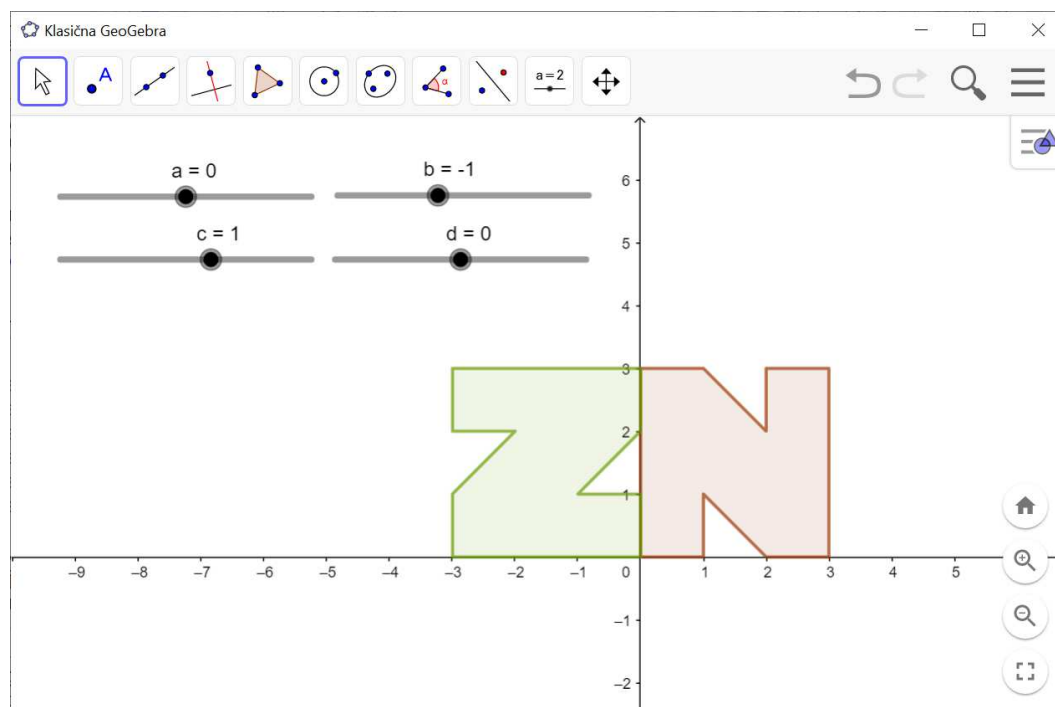
→ Ob gledanju izjemno dodelanih digitalnih grafik in animacij na današnjih računalniških in TV zaslonih hitro pozabimo, koliko matematičnega znanja je potrebnega že za prikaz preprostih grafičnih objektov v ravnini. V tokratnem prispevku si bomo ogledali, kako v GeoGebri izdelati aplet za ponazoritev linearnih preslikav na ravninskih likih.

V GeoGebri lahko z uporabo ukaza Mnogokotnik narišemo različne poligonske like tako, da naštejemo njihova zaporedna oglišča, ki jih program potem po-

veže z daljicami. Če si nato zamislimo zrcaljenje, vrtenje, razteg ali podobno preslikavo ravnine, lahko z njo preslikamo oglišča začetnega lika, jih povežemo z daljicami in tako dobimo preslikani lik. V ta namen si bomo natančneje ogledali preslikave, ki točko  $(x, y)$  preslikajo v točko  $(ax + by, cx + dy)$ , kjer so  $a, b, c, d$  poljubno izbrani parametri. Take preslikave imenujemo *linearne preslikave* in jih pogosto predstavimo s pomočjo množenja matrik:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

Učinek linearne preslikave je natanko določen z izbiri koeficientov  $a, b, c, d$ . Vsaka linearna preslikava



**SLIKA 1.**

Začetni lik je rdeče, preslikani pa zelene barve. Učinek preslikave je odvisen od vrednosti koeficientov  $a, b, c, d$ ; pri trenutni izbiri smo dobili vrtenje za  $90^\circ$  okoli izhodišča.

ohranja točko  $(0, 0)$ , poljubno daljico pa preslika bodisi v neko točko bodisi v neko daljico; v zadnjem primeru preslikava ohranja tudi medsebojno vzporednost daljic.

V našem apletu bomo opazovali učinek različnih preslikav na lik v obliki črke N, ki jo bomo narisali na risalno površino. To storimo z naslednjimi koraki:

- Vnesemo seznam oglišč mnogokotnika, ki predstavlja črko N v ravnini:  
 $N = (0, 0), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (3, 0), (3, 3), (2, 3), (2, 2), (1, 3), (0, 3)$
- Ustrezni mnogokotnik narišemo z ukazom `mnogN=Mnogokotnik(N)`.
- Na risalno površino vstavimo štiri drsnike  $a, b, c, d$ . Vsak naj zavzame vrednosti med  $-5$  in  $5$  s koraki  $0.1$ .
- Vrednosti drsnikov zberemo v matriko  $A = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$ . Začetne vrednosti lahko postavimo na  $a = 1, b = 0, c = 0, d = 1$ , kar ustreza identični preslikavi.
- Zdaj sestavimo seznam preslikanih oglišč tako, da  $k$ -to oglišče iz prvotnega zaporedja pomnožimo z matriko  $A$ : `AN=Zaporedje(A*Element(N,k),k,1,Dolžina(N))`.
- Z ukazom `mnogAN=Mnogokotnik(AN)` narišemo preslikano črko N. Izklopimo prikaz odvečnih točk in obarvamo novi lik z drugo barvo.

Zdaj lahko raziskujemo, kako s spreminjanjem koeficientov  $a, b, c, d$  dobimo različne preslikave. Radovednemu bralcu in bralki priporočamo, da se poigra z naslednjimi nastavitvami koeficientov:

- $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  (razteg v smeri osi  $x$ )
- $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  (zrcaljenje čez točko  $(0, 0)$ )
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  (zrcaljenje čez premico  $y = x$ )
- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  (strig v smeri osi  $x$ )

- $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$  (pravokotna projekcija na premico  $y = x$ )
- $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  (vrtenje za kot  $\pi/2$  okrog točke  $(0, 0)$  v pozitivni smeri)

Bralec in bralka sta morda opazila, da se pri tovrstnih preslikavah točka  $(1, 0)$  vselej preslika v točko  $(a, c)$ , točka  $(0, 1)$  pa v točko  $(b, d)$ , ali še natančneje, učinek preslikave je natanko določen s slikama točk  $(1, 0)$  in  $(0, 1)$  oziroma baznih vektorjev. Ta ugotovitev nam pomaga izbrati vrednost koeficientov glede na želeno preslikavo. Če želimo, denimo, določiti matriko vrtenja za poljuben kot  $\varphi$  v pozitivni smeri okoli točke  $(0, 0)$ , je dovolj iz skice razbrati, da se pri vrtenju točka  $(1, 0)$  preslika v točko  $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ , točka  $(0, 1)$  pa v točko  $(-\sin \varphi, \cos \varphi)$ . Vrtenju zato ustreza matrika

$$V_{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Podobno bi tudi ugotovili, da zrcaljenju čez premico skozi točko  $(0, 0)$ , ki z osjo  $x$  oklepa kot  $\varphi$ , ustreza matrika

$$Z_{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix}.$$

To lahko preizkusimo s približnimi vrednostmi, npr. za  $\varphi = \pi/6$ . V tem primeru je matrika vrtenja približno  $\begin{pmatrix} 0.7 & -0.5 \\ 0.5 & 0.7 \end{pmatrix}$ , matrika zrcaljenja pa približno  $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.7 \\ 0.7 & -0.5 \end{pmatrix}$ . Bralci in bralke lahko vse to preizkusijo tudi sami s svojim apletom.

### Popravek k članku Kotaljenje kolesa in število $\pi$

V prejšnji številki je v GeoGebrinem kotičku prišlo do napake pri navodilu za risanje špic v zadnjem delu članka. Ustrezni ukaz za risanje točk na kolesu je `tocke=Zaporedje(S+(sin(t+2*k*pi/n), cos(t+2*k*pi/n)),k,0,n-1)`.

× × ×

# Uporaba virialnega teorema v astrofiziki



KRIŠTOF SKOK

→ V eni od prejšnjih številčk Preseka ste bralci spoznali virialni teorem in njegovo izpeljavo. Predstavili smo primer izračuna astronoma Fritza Zwickyja, da mora biti gostota mase v jati galaksij v Berenikinih kodrih veliko večja, kot so kazale meritve. Tokrat si pogledjmo še več primerov uporabe virialnega teorema, ki bodo koristila srednješolcem za pripravah na mednarodna tekmovanja iz znanja astronomije in tudi fizike.

Virialni teorem uporabimo za sisteme več delcev ali teles, ki so vezani. To pomeni, da jih skupaj veže sila, najpogosteje gravitacijska; deli sistema nimajo zadosti energije, da bi sistem zapustili in postali prosti. Sistem mora biti v statističnem ravnovesju. Ravnovesje si po navadi zamislimo kot izenačenje sil med telesi, tako da deli sistema mirujejo. Denimo, da na vzmetno tehtnico postavimo vrečo krompirja. Teža krompirja potiska ploščo tehtnice navzdol, sila skrčene vzmeti potiska krompir navzgor; ker sta sili nasprotno enaki, tehtnica in vreča krompirja mirujeta. Lahko pa vrečo vržemo na tehtnico in ta zaniha. Recimo, da ni nobenega trenja ali dušenja; tehtnica tako niha, perioda in amplituda nihanja se ne spreminjata. Ta sistem ne miruje, a ko ga opazujemo dlje časa, opazimo, da se statistično ne spreminja. Gibanje krompirja se ponavlja na enak način ves čas, njegova povprečna lega in deviacija se ne spreminjata. Podobno si lahko predstavljamo vesoljski sistem v statističnem ravnovesju. Galaksije v jati ali zvezde kopici neprenehoma frčijo po prostoru, a težišče, deviacija hitrosti, skupna energija in vztrajnostni moment celotnega sistema so konstantni.

## Kroglasta kopica

Kroglaste kopice so skupine zvezd, ki jih medsebojni gravitacijski privlak povezuje v zaključeno krogelno obliko. Gre za zelo stare strukture, po več milijard let, ki vsebujejo na sto tisoče ali milijone zvezd. Tipični polmeri kopic so nekaj parsekov ali nekaj deset parsekov. Zvezde so tako nagnetene, da središčnih predelov kopic ne moremo razločiti, le proti robu kopice vidimo posamezne zvezde. Pri opazovanjih dinamike zvezd lahko izmerimo le njihovo radialno komponento hitrosti iz Dopplerjevega premika, tj. komponento vektorja hitrosti v smeri pogleda oziroma projekcijo na zveznico med nami in zvezdo. Sveže astrometrične meritve misije Gaia so nam odprle novo okno v vesolje, saj so opazovanja tega vesoljskega observatorija dovolj natančna, da imamo na voljo veliko podatkov o gibanjih zvezd v naši Galaksiji v prečni smeri. Gibanje posameznih zvezd je kompleksno, zato ne moremo točno izračunati kinetične in potencialne energije kopice, lahko pa naredimo dobro oceno. Najprej se lotimo kinetične energije. V kopici imamo  $N$  zvezd z masami  $m_i$ , legami  $\mathbf{r}_i$  in hitrostmi  $\mathbf{v}_i$ . Paziti moramo na razliko med  $\mathbf{v}_i$  in  $v_i$ , prvo je vektor hitrosti  $i$ -tega delca, drugo pa velikost vektorja. Masa celotne kopice je  $M = \sum_i m_i$ . Ta zapis vsote pomeni, da seštevamo po vseh možnih vrednostih indeksa  $i$ , torej od 1 do  $N$ . Potemtakem velja

$$\langle K \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \sum_i m_i \langle v_i^2 \rangle. \quad (1)$$

Ker je število zvezd kopice res veliko ( $N \approx 10^6$ ), lahko rečemo, da so hitrosti porazdeljene po neki zvezni porazdelitvi. Prav tako velja za posamezne komponente hitrosti,  $v_x, v_y, v_z$ . Kako so koordinatne osi postavljene, je povsem poljubno, saj nimamo preferenčne smeri gibanj zvezd, ampak se te gibljejo

v vse smeri. Recimo, da je os  $x$  usmerjena proti opazovalcu, tako da je radialna hitrost  $v_r = v_x$ . Koordinatno izhodišče pa je samoumevno v težišču kopice. Kopica se giblje tudi po prostoru, po navadi na zelo velikih oddaljenosti od središča Galaksije, nekaj deset kiloparsekov. Hitrost kopice naj bo sistemska hitrost z vektorjem  $\mathbf{v}_{sis}$ , njena radialna komponenta pa  $v_{sis,r}$ . Če pomerimo radialne hitrosti vseh zvezd, bo povprečje ravno  $v_{sis,r}$ . To povprečno vrednost moramo odšteti od vseh radialnih hitrostih zvezd, kajti virialni teorem smo izpeljali v (lastnem) koordinatnem sistemu obravnavanega sistema. Ker se zvezde gibljejo v vse mogoče smeri, bodo ene izmerjene radialne hitrosti večje od  $v_{sis,r}$ , druge pa manjše, torej bodo po odštevanju  $v_{sis,r}$  razpršene okoli ničle. To razpršenost opišemo s standardno deviacijo  $\sigma_x$ . Poimenujmo jo z indeksom  $x$ , ker smo rekli, da je radialna smer vzdolž  $x$  osi. Kvadrat standardne deviacije radialnih hitrosti v lastnem sistemu je varianca, ki je

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_i (v_{r,i} - \bar{v}_r)^2 = \frac{1}{N} \sum_i v_{r,i}^2 = \overline{v_r^2} = \overline{v_x^2}. \quad (2)$$

Prvi izraz je definicija variance, v drugem smo upoštevali, da je  $\bar{v}_r = 0$ , saj smo od radialnih hitrosti že odšteli sistemsko radialno hitrost. Ker razmišljamo ves čas v duhu, da potujejo zvezde v vse smeri, velja  $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2$ . Vrnimo se k naši oceni kinetične energije, k enačbi 1.  $\langle v_i^2 \rangle$  je časovno povprečje kvadrata hitrosti ene zvezde. Gibanja ene zvezde ne moremo spremljati toliko časa, da bi izračunali povprečje po času; opazovanja nam dajo le stanje kopice v določenem trenutku. Kar pa lahko storimo, je da izračunamo povprečje vseh zvezd  $\overline{v^2}$  in pri vzamemo, da je enako kot časovno povprečje ene zvezde,  $\langle v_i^2 \rangle = \overline{v^2}$ . Velja  $\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = 3\overline{v_x^2} = 3\sigma_x^2$ . Končno lahko izračunamo povprečno kinetično energijo kot

$$\begin{aligned} \langle K \rangle &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \langle v_i^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_i m_i \overline{v^2} = \frac{1}{2} \sum_i m_i 3\sigma_x^2 \\ &= \frac{3}{2} M \sigma_x^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Potencialna energija para delcev (točkastih teles)  $i$  in  $j$  je  $U_{ij} = -\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}}$ , kjer je  $G$  gravitacijska konstanta,  $m_i$  ter  $m_j$  sta masi delcev in  $r_{ij}$  je razdalja med njima. Zvezde res niso točkasta telesa, a

kaj pravzaprav to pomeni? Točkasto telo je telo, katerega velikost ni pomembna za obravnavani problem. Enako velja v kroglasti kopici, razdalje med zvezdami so mnogo večje od njihovih velikosti, zato lahko računamo z enačbo za potencialno energijo dveh točkastih teles. Potencialna energija kopice je  $U = \sum_i \sum_j U_{ij}$ , kar lahko ocenimo na podlagi razmisleka. Kroglasta kopica je krogla s polmerom  $R$ . Zvezde so posejane po prostornini te krogle in njihove medsebojne razdalje so od skoraj nič do večjemu  $2R$ . Recimo, da je povprečna razdalja med dvema poljubnima zvezdama kar  $R$ . Lahko da je povprečje  $0,7 R, 0,92 R$  ali pa tudi  $1,2 R$ , a vsakem primeru reda velikosti  $R$ . Hočemo priti le do približne ocene za energijo. Velja

$$\begin{aligned} \langle U \rangle &= -\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \left\langle \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}} \right\rangle \approx -\frac{G}{2R} \sum_i \sum_j m_i m_j \\ &= -\frac{GM^2}{2R}. \end{aligned} \quad (4)$$

Dobili smo dva preprosta izraza za kinetično in potencialno energijo, ki ju lahko uporabimo v virialnem teoremu in izračunamo maso kopice  $M$ . Seveda, ostali dve količini poznamo.  $\sigma_x$  je disperzija radialnih hitrosti, ki jo pridobimo s spektroskopskimi opazovanji, polmer kopice  $R$  pa tudi poznamo, ker lahko izmerimo kotno velikost in oddaljenost kopice. Računajmo:

$$\begin{aligned} 2\langle K \rangle + \langle U \rangle &= 0 \\ 2\frac{3}{2} M \sigma_x^2 - \frac{GM^2}{2R} &= 0 \\ M &= \frac{6\sigma_x^2 R}{G} \end{aligned}$$

Če vzamemo podatke za kroglasto kopico M 71 [2, 3], dobimo  $\sigma_x = 3,21$  km/s, polmer kopice je 4,19 pc, kar nam da  $M \approx 10^4 M_\odot$ . Rezultat se dobro ujema z natančnejšimi meritvami, ki dajo vrednost  $1,7 \cdot 10^4 M_\odot$ .

### Nižanje orbite satelita

Po virialnem teoremu velja  $2K + U = 0$ , ter  $E = K + U = -K = -\frac{1}{2}U$ . Enaka zveza pa velja za spremembe energije  $\Delta E = \Delta K + \Delta U = -\Delta K = -\frac{1}{2}\Delta U$  ter  $2\Delta K + \Delta U = 0$ . Poglejmo si, kaj se dogaja z



→ umetnim satelitom, ki kroži blizu Zemlje, in nanj deluje zračni upor, zato satelit počasi izgublja energijo. Potencialna energija satelita je  $U = -\frac{GMm}{r}$ , pri čemer je  $M$  masa Zemlje,  $m$  masa satelita in  $r$  polmer njegove krožne orbite. Manjši kot je polmer orbite, nižja je energija. To pomeni, da je satelit bolj vezan na Zemljo. Ko enačimo centripetalno silo kroženja  $F_c = \frac{mv^2}{r}$  z gravitacijsko silo Zemlje  $F_g = \frac{GMm}{r^2}$ , lahko izpeljemo krožilno hitrost  $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ . Kinetična energija satelita je  $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r}$ . Seveda, saj mora biti po virialnem teoremu  $K = -\frac{1}{2}U$ . Celotna mehanska energija satelita je  $E = K + U = -\frac{GMm}{2r}$ . Rekli smo, da satelit izgublja energijo zaradi zračnega upora, torej postane  $E$  manjša, kar pomeni, da se njena absolutna vrednost  $|E|$  poveča, ker ima sama energija  $E$  negativen predznak. Da pa je  $|E| = \frac{GMm}{2r}$  večje, se mora  $r$  zmanjšati. A potem se krožilna hitrost  $v$  poveča in s tem tudi kinetična energija. Torej satelit kroži po vse nižjih orbitah z vse višjo hitrostjo! Čeprav se celotna energija  $E$  zmanjša, se kinetična  $K$  poveča. Tako, kot pravi virialni teorem, je  $\Delta E$  negativna, torej mora biti  $\Delta K = -\Delta E$  pozitivna. Nižje kot je satelit, gostejša je atmosfera in večji zračni upor, zato se satelit še hitreje približuje Zemlji. Tako imamo pozitivno povratno zanko, zaradi katere satelit na koncu zgori v ozračju. Delujoče satelite spremljajo operaterji na Zemlji in seveda ne dopustijo, da bi se kaj takega prehitro zgodilo. Od časa do časa prižgejo motorje na plovilu in dvignejo njegovo orbito.

### Eliptična orbita

V prejšnjem poglavju smo obravnavali umetni satelit na krožni orbiti, za katerega so izrazi za energije enostavni, in kar je pomembneje, neodvisni od časa. Ni nam bilo treba razmišljati, kaj je časovno povprečje potencialne energije satelita, ker kroži na fiksni orbiti in je potencialna energija konstanta. Za konec pa si oglejmo drugačen primer. Planeti, kometi in asteroidi v Osončju potujejo po elipsah. Oddaljenost od Sonca in hitrost telesa se spreminjata v času, zato ne moremo enostavno vstaviti trenutnih energij v virialni teorem, ampak časovna povprečja. Z malo ponovitve orbitalne mehanike in telovadbe z diferencialnim računom bomo v naslednjih vrsticah izračunali povprečno potencialno energijo telesa na eliptični orbiti.

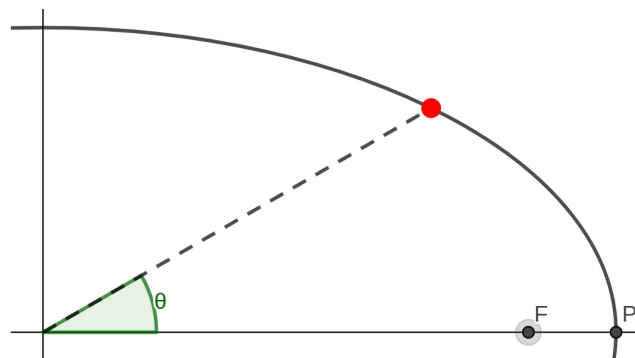
Telo, ki kroži okoli Sonca, obravnavamo kot točkasto telo in njegovo potencialno energijo zapišemo kot

$$U = -\frac{GMm}{r}, \quad (5)$$

pri čemer je  $G$  gravitacijska konstanta,  $M$  masa Sonca,  $m$  masa telesa in  $r$  njegova oddaljenost težišča Sonca. Obliko eliptične orbite opredeljujeta dva parametra, velika polos  $a$ , ki podaja velikost elipse, in ekscentričnost  $e$ . Razdalja med goriščem in središčem elipse je  $ea$ . Če je  $e = 0$ , imamo krožnico. Večja kot je ekscentričnost, bolj je elipsa »raztegnjena«. Lego telesa na orbiti podaja kot  $\vartheta$ , ki mu rečemo prava anomalija. To je kot med zveznicama telo-Sonce in perihelij-Sonce. Perihelij pa je točka orbite, kjer je telo najbližje Soncu in njena oddaljenost je  $d_p = a(1 - e)$ , glej sliko 1. Najbolj oddaljena točka je afelij,  $d_a = a(1 + e)$ . S parametri  $a, e$  in  $\vartheta$  lahko izračunamo razdaljo krožečega telesa od Sonca kot funkcijo prave anomalije:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \vartheta}. \quad (6)$$

Kako pa dobimo hitrost za poljubno točko na orbiti? Najlažje iz energijskega zakona, ker vemo, da



SLIKA 1.

Shema orbite kometa 2P/Encke, ki ima veliko polos 2,22 astronomske enote in ekscentričnost 0,8471. Točka  $F$  označuje gorišče elipse,  $P$  perihelij, rdeča točka je komet, z zeleno pa je označena prava anomalija.

je celotna mehanska energija  $E = -\frac{GMm}{2a}$ :

$$\begin{aligned} E &= K + U \\ -\frac{GMm}{2a} &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \\ \frac{1}{2}v^2 &= GM\left(\frac{1}{r} - \frac{2}{a}\right) \\ v &= \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} \end{aligned} \quad (7)$$

Enačbo v zadnji vrstici imenujemo vis-viva enačba.

Ker želimo dobiti  $\langle U \rangle$ , moramo najprej izračunati  $\langle \frac{1}{r} \rangle$ . Pozor, ni nujno, da je povprečje obratne vrednosti kar obratna vrednost povprečja spremenljivke,  $\langle \frac{1}{r} \rangle \neq \frac{1}{\langle r \rangle}$ . Ker je gibanje periodično s periodo  $t_0$ , lahko izračunamo časovno povprečje kot

$$\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \frac{1}{r} dt. \quad (8)$$

Ker ne poznamo  $r$  kot funkcijo časa, moramo to spremenljivko v integralu zamenjati s pravo anomalijo. Pomagajmo si z vrtilno količino, ki je definirana kot

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = J\boldsymbol{\omega}. \quad (9)$$

$L$  je konstanta gibanja, kar pomeni, da se s časom ne spreminja. To je jasno, ker ni nobenih zunanjih navorov, ki bi vplivali na krožeče telo.  $J$  je vztrajnostni moment, ki je za točkasto telo  $J = mr^2$ . Velikost kotne hitrosti je  $\omega = \dot{\vartheta}$ , tj. časovni odvod prave anomalije. Diferencial prave anomalije je povezan z diferencialom časa kot

$$d\vartheta = \dot{\vartheta} dt = \omega dt = \frac{L}{mr^2} dt, \quad (10)$$

kar izkoristimo v integralu v enačbi 8

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle &= \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \frac{1}{r} dt = \frac{1}{t_0} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \frac{mr^2}{L} d\vartheta \\ &= \frac{m}{Lt_0} \int_0^{2\pi} r d\vartheta. \end{aligned} \quad (11)$$

Iz enačbe 10 smo izrazili  $dt$  in ga vnesli v enačbo 8. Ker ne integriramo več po času ampak po pravi anomaliji, smo zamenjali integracijske meje. Ko je čas 0, je tudi anomalija 0, in ko preteče perioda kroženja

$t_0$ , telo naredi eno orbito in se anomalija poveča za  $2\pi$ . V zadnji integral vstavimo izraz za  $r$  iz enačbe 6 in računamo

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle &= \frac{ma(1-e^2)}{Lt_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{1+e\cos\vartheta} \\ &= \frac{ma(1-e^2)}{Lt_0} \frac{2\pi}{\sqrt{1-e^2}} \\ &= ma\sqrt{1-e^2} \frac{2\pi}{t_0} \frac{1}{L}. \end{aligned} \quad (12)$$

Vrednost integrala prepišemo iz matematičnega priročnika. V zadnjem izrazu imamo  $\frac{2\pi}{t_0}$ , kar je po tretjem Keplerjevem zakonu  $\sqrt{\frac{G(M+m)}{a^3}} \approx \sqrt{\frac{GM}{a^3}}$ . Kar še potrebujemo, je vrednost za vrtilno količino. Ker je konstanta gibanja, jo lahko izračunamo v katerikoli točki orbite. Najprikladnejše je v periheliju:

$$\begin{aligned} L &= md_p v_p = md_p \sqrt{GM\left(\frac{2}{d_p} - \frac{1}{a}\right)} \\ &= ma(1-e) \sqrt{GM\left(\frac{2}{a(1-e)} - \frac{1}{a}\right)} \\ &= ma(1-e) \sqrt{GM \frac{1+e}{a(1-e)}} \\ &= m\sqrt{GMa(1-e^2)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Sedaj lahko končno izračunamo časovno povprečje obratne vrednosti  $r$ :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle &= ma\sqrt{1-e^2} \frac{2\pi}{t_0} \frac{1}{L} \\ &= ma\sqrt{1-e^2} \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \frac{1}{m\sqrt{GMa(1-e^2)}} = \frac{1}{a}. \end{aligned} \quad (14)$$

Toliko računanja za tako enostaven rezultat! Časovno povprečje potencialne energije je tako enake oblike kot potencialna energija telesa na krožni orbiti s polmerom  $a$ :

$$\langle U \rangle = \left\langle -\frac{GMm}{r} \right\rangle = -GMm \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = -\frac{GMm}{a}. \quad (15)$$



**SLIKA 2.**  
Kroglasta kopica NGC 1466, kot jo je posnel vesoljski teleskop Hubble. Foto: ESA, NASA

Izračunajmo še časovno povprečje kinetične energije. Ker poznamo vis-viva enačbo (zadnja vrstica iz 7), je to enostavno:

▪  $\langle K \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} GMm \left( \left\langle \frac{2}{r} \right\rangle - \frac{1}{a} \right) = \frac{GMm}{2a}.$   
(16)

In kot vidimo, ponovno velja  $2\langle K \rangle + \langle U \rangle = 0$ .

Literatura

[1] B. W. Carroll, D. A. Ostlie, *Introduction to modern stellar astrophysics*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1996.  
[2] *Messier 71*, dostopno na [en.wikipedia.org/w/index.php?title=Messier\\_71&oldid=961065192](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Messier_71&oldid=961065192), ogled 22. marca 2022.  
[3] *Using the virial theorem: mass of a globular cluster*, dostopno na [spiff.rit.edu/classes/phys440/lectures/glob\\_clus/glob\\_clus.html](http://spiff.rit.edu/classes/phys440/lectures/glob_clus/glob_clus.html), ogled 22. marca 2022.

Križne vsote



→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratu na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse številke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

|    |   |    |   |    |    |   |    |
|----|---|----|---|----|----|---|----|
|    | 5 | 22 |   |    |    |   |    |
| 12 |   |    |   |    |    | 8 | 14 |
| 9  |   |    | 7 |    | 17 | 9 |    |
|    | 7 |    |   | 19 |    |   |    |
|    |   | 21 |   | 12 |    |   |    |
|    |   |    | 8 |    |    |   |    |



REŠITEV KRIŽNE VSOTE

|   |    |   |    |   |    |   |    |
|---|----|---|----|---|----|---|----|
|   |    | 8 | 5  | 8 |    |   |    |
|   |    | 8 | 7  | 9 | 12 |   |    |
| 8 | 5  | 9 | 12 | 1 | 9  | 7 |    |
| 9 | 8  |   | 17 |   | 7  | 7 | 6  |
|   | 14 | 8 |    |   | 6  | 8 | 12 |
|   |    |   |    |   | 22 | 5 |    |

# Razdalje urejanja 1. del

## HAMMINGOVA IN LEVENSHTEINOVA RAZDALJA



MLADEN BOROVIČ, JANI DUGONIK

→ V sistemih procesiranja naravnega jezika, ki se ukvarjajo z obdelavo jezika v obliki besedila, se večinoma ukvarjamo z analizo besedil. Besedila praviloma najprej pošljemo skozi cevovod predobdelave besedil, kjer kot rezultat dobimo značilke, ki jih lahko uporabimo v nadaljnjih korakih obdelave.

Določena opravila na področju procesiranja naravnega jezika zahtevajo primerjave med različnimi besedili. Dober primer tega sta preverjanje črkovanja in implementacija iskalnikov. Pri preverjanju črkovanja s primerjavo dveh besed iščemo napake v vhodnem besedilu, pri implementaciji iskalnikov pa iščemo tista besedila, ki so najbolj podobna vhodnemu iskalnemu vnosu. Pri izvajanju primerjave med besedili se lahko poslužujemo razdalj urejanja (*angl. edit distances*), znane tudi kot urejevalne razdalje, ki na vhodu ponavadi prejmejo dva niza, na izhodu pa vrnejo število, ki pomeni razliko med njima.

V tem prispevku bomo na primerih podrobneje predstavili delovanje Hammingove razdalje [1], ki spada med preprostejše razdalje urejanja, in Levenshteinove razdalje [3], ki je predstavnik bolj dovršenih razdalj urejanja. Pogledali si bomo tudi nekatere omejitve, ki nastopajo ob uporabi omenjenih razdalj urejanja. Ker obstaja kar nekaj različnih razdalj urejanja, bomo nekatere druge podrobneje predstavili v naslednjem delu prispevka.

Razdalje urejanja so za določene naloge v procesiranju naravnega jezika ključnega pomena, zato se uporabljajo kot prvi korak obdelave besedila po predobdelavi. Da bi bolje razumeli uporabo razdalj urejanja določenih nalog procesiranja naravnega jezika, si najprej preglejmo področje razdalj urejanja in določene definicije operacij, ki se pojavljajo v izračunih takšnih razdalj.

### Razdalje urejanja

Vsaka razdalja urejanja je lahko formalno definirana na vhodnih nizih  $a$  in  $b$  ter na abecedi  $\Sigma$ , ki predstavlja nabor znakov, ki se lahko pojavijo v nizih  $a$  in  $b$ . Razdalja urejanja  $d(a, b)$  je po definiciji najmanjše število operacij, ki jih potrebujemo, da iz enega niza dobimo drugega [4]. Operacije, ki jih pri tem lahko uporabimo so vstavljanje znaka (*ang. insertion*), brisanje znaka (*ang. deletion*) in zamenjava znaka (*ang. substitution*). Dodatno poznamo še posebno obliko zamenjave znaka, transpozicijo (*ang. transposition*), kjer se zamenjata dva poljubna znaka v nizu, vsi ostali pa ostanejo nespremenjeni. Razlika med tema dvema tipoma zamenjave je, da smo s transpozicijo omejeni na zamenjavo znakov, ki so v nizu, pri navadni zamenjavi pa lahko znak zamenjamo s poljubnim znakom, tudi takšnim, ki se ne pojavi v nizu.

Obstaja več tipov razdalj urejanja, ki dovoljujejo različne nabore operacij. Hammingova razdalja dovoljuje samo zamenjavo znakov, medtem ko Levenshteinova razdalja dovoljuje vstavljanje, brisanje in zamenjavo znakov. Njena različica, imenovana Damerau-Levenshteinova razdalja, ob vseh že omenje-



→ njih operacijah dovoljuje še transpozicijo znakov. Na koncu lahko omenimo še Jarovo in Jaro-Winklerjevo razdaljo, ki dovoljujeta samo transpozicijo znakov.

Predmet tega prispevka sta Hammingova in Levenshteinova razdalja, zato si podrobneje pogledjmo njuno delovanje na primerih.

Hammingova razdalja

Hammingova razdalja, poimenovana po ameriškem matematiku Richardu Hammingu, je najpreprostejša razdalja urejanja. Ta razdalja urejanja dovoljuje samo zamenjavo znakov, kar pomeni, da lahko deluje samo nad dvema nizoma iste velikosti. To je tudi njena glavna slabost, saj vemo, da so besede v kateremkoli naravnem jeziku lahko različnih velikosti. Kljub tej slabosti pa je ta razdalja zelo pomembna v teoriji kodiranja, predvsem na področjih stiskanja podatkov, kriptografije, zaznavanja in popravljanja napak ter pri uporabi na kvantnih računalnikih [2]. Na področju procesiranja naravnega jezika se ta razdalja sicer v praksi redko uporablja, vendar predstavlja odlično osnovo za razlago vseh ostalih v praksi bolj uporabljenih razdalj urejanja.

Delovanje Hammingove razdalje za primerjavo dveh enako dolgih nizov znakov oziroma besed je izjemno preprosto. Niza poravnamo po znakih, nato pa primerjamo istoležna znaka med seboj. Če sta znaka enaka, je utež enaka 0, sicer pa 1. Hammingovo razdaljo lahko tako definiramo tudi z uporabo logične funkcije ekskluzivni ali oziroma XOR. Zapis  $ham(a, b)$  in  $a \oplus b$  sta torej ekvivalentna, vendar se prvi pogosteje uporablja na področju procesiranja naravnega jezika, drugi pa na področju teorije kodiranja. Na koncu seštejemo vse uteži in rezultat je vrednost, ki predstavlja razdaljo med nizoma  $a$  in  $b$ . V spodnjem zgledu si pogledjmo delovanje Hammingove razdalje nad različnimi vhodnimi nizi.

Zgled

Imejmo vhodna niza  $a$  = rezultat in  $b$  = konzulat. Kot vidimo, sta niza  $a$  in  $b$  enake dolžine ( $|a| = |b| = 8$ ), saj sicer ne moremo izračunati Hammingove razdalje. Niza smo po znakih istoležno zapisali v tabelo. Ujemajoči znaki so označeni z modro barvo, uteži neujemanja (1) so označene z rdečo barvo, uteži ujemanja (0) pa z zeleno barvo (slika 1).

|             |   |   |   |   |   |   |   |   |     |
|-------------|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|
| $a$         | r | e | z | u | l | t | a | t |     |
| $b$         | k | o | n | z | u | l | a | t |     |
| $ham(a, b)$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | = 6 |

SLIKA 1.  
Primer izračuna Hammingove razdalje za vhodna niza  $a$  = rezultat in  $b$  = konzulat

Izračun razdalje začnemo s primerjavo prvega znaka v obeh nizih. V našem primeru sta to znaka »r« in »k«, ki nista enaka, zato je utež enaka 1. Nato nadaljujemo z drugim znakom v obeh nizih. To sta znaka »e« in »o«, ki znova nista enaka in zato je utež znova enaka 1. Podobno nadaljujemo vse do sedmega znaka v obeh nizih, kjer ugotovimo ujemanje v znaku »a«. Utež je tukaj enaka 0. Enako se zgodi pri osmem znaku v obeh nizih, kjer se niza ujemata v znaku »t«. Po prehodu smo ugotovili, da imamo med nizoma  $a$  in  $b$  šest neujemanj in dve ujemanji. Sledi še samo zadnji korak izračuna razdalje, ki je seštevek vseh uteži. Razdalja med nizoma  $ham(a, b)$  je torej enaka 6, kar pomeni, da sta niza različna.

|             |   |   |   |   |   |   |   |   |     |
|-------------|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|
| $a$         | r | e | z | u | l | t | a | t |     |
| $b$         | r | e | z | u | l | t | a | t |     |
| $ham(a, b)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | = 0 |

SLIKA 2.  
Primer izračuna Hammingove razdalje za vhodna niza  $a$  = rezultat in  $b$  = rezultat

Če primerjamo dva enaka niza, lahko hitro ugotovimo, da je Hammingova razdalja enaka 0. Takšno situacijo lahko vidimo na sliki 2, kjer smo uporabili vhodna niza  $a$  = rezultat in  $b$  = rezultat. Na sliki 3, kjer smo uporabili vhodna niza  $a$  = rezultat in  $b$  = galerija, lahko vidimo, da je Hammingova razdalja enaka dolžini niza  $a$  ali  $b$ . To pomeni, da sta niza  $a$  in  $b$  povsem različna.

S Hammingovo razdaljo lahko ugotavljamo podobnosti med nizi iste velikosti, kar pa zelo omeji smiselnost njene uporabe pri naravnem jeziku, kjer so besede različnih velikosti. Hammingova razdalja v tem primeru ni primerna, saj ne dovoljuje vstavljanja ali brisanja znakov. Zaradi tega potrebu-

|                            |   |   |   |   |   |   |   |   |     |
|----------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|
| <i>a</i>                   | r | e | z | u | l | t | a | t |     |
| <i>b</i>                   | g | a | l | e | r | i | j | a |     |
| ham( <i>a</i> , <i>b</i> ) | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | = 8 |

SLIKA 3.

Primer izračuna Hammingove razdalje za vhodna niza *a* = rezultat in *b* = galerija

jemo razdaljo urejanja, ki bo pri izračunu razdalje dovoljevala tudi ti dve operaciji in nam s tem omogočila primerjavo nizov različnih velikosti. Ena najbolj uporabljenih razdalj urejanja s takšno lastnostjo je Levenshteinova razdalja, ki jo bomo opisali v nadaljevanju.

## Levenshteinova razdalja

Začetki ideje o razdalji med nizi različnih velikosti, ki upošteva operacije vstavljanja, brisanja in zamenjave znakov, segajo v leto 1965, ko je sovjetski matematik Vladimir Levenshtein predstavil novo razdaljo, imenovano Levenshteinova razdalja. Ta je zaradi upoštevanja večjega nabora operacij hitro postala ista razdalja, ki se je začela uporabljati tudi v praksi. Na področju procesiranja naravnega jezika se ta razdalja pogosto uporablja v implementacijah popravljanja pravopisa, saj lahko s njo določimo napake v črkovanju in jih glede na vsebino besedila tudi ustrezno zamenjamo s pravilno črkovanimi besedami.

Levenshteinova razdalja ima nekaj zanimivih matematičnih lastnosti:

- Spodnjo mejo vrednosti razdalje predstavlja absolutna razlika velikosti dveh primerjanih nizov.
- Zgornjo mejo vrednosti razdalje predstavlja velikost daljšega izmed obeh primerjalnih nizov.
- Vrednost razdalje bo enaka 0 takrat, ko sta oba niza enaka.
- Če sta niza enakih velikosti, bo vrednost Hammingove razdalje tudi zgornja meja vrednosti Levenshteinove razdalje.
- Za Levenshteinovo razdaljo velja tudi trikotniška neenakost, in sicer Levenshteinova razdalja med dvema nizoma ne bo nikoli večja od vsote njunih vrednosti Levenshteinovih razdalj v primerjavi s tretjim nizom.

Primeri za te matematične lastnosti so podani v kodi na javno dostopnem repozitoriju GitHub [5].

Izračun Levenshteinove razdalje lahko implementiramo rekurzivno ali iterativno. Rekurzivni način je zelo naiven in neučinkovit, saj v tem primeru večkrat računamo vrednost Levenshteinove razdalje pri istih podnizih. Zaradi tega se bomo v tem prispevku osredotočili na iterativni način izračuna Levenshteinove razdalje, ki je bistveno bolj učinkovit in se prav tako uporablja v praktičnih implementacijah. V iterativnem načinu izračuna uporabimo pristop dinamičnega programiranja, kjer uteži za vsako operacijo nad nizi shranimo v pomožno matriko. V tem prispevku bomo privzeli, da je uporaba vseh operacij enakovredna, torej bo uporaba vseh operacij ovrednotena z utežjo 1. Vrednost te uteži lahko po želji tudi spremenimo, če želimo dodatno obtežiti uporabo katere od operacij. Iterativni način implementacije, ki si ga bomo pogledali na zgledu, je sicer zelo podoben postopku, ki se uporablja v algoritmi Needleman-Wunsch, Wagner-Fischer ali Smith-Waterman.

## Zgled

Imejmo dva vhodna niza *a* = telefon in *b* = lepota. Vidimo, da sta niza različnih dolžin ( $|a| = 7$ ,  $|b| = 6$ ). V primeru bomo uporabili iterativni način izračuna Levenshteinove razdalje. Z algoritmom za izračun Levenshteinove razdalje bomo želeli ugotoviti skupno število operacij, ki jih potrebujemo, da niz *a* spremenimo v niz *b*. Najprej pripravimo pomožno matriko, kamor bomo shranjevali vmesne vrednosti Levenshteinove razdalje. Niz *a* po črkah razporedimo v prvi stolpec, niz *b* pa po črkah razporedimo v prvo vrstico. Pri tem vsako črko opremimo s številom, ki predstavlja indeks in se začne z 1. Po tem koraku dobimo matriko prikazano na sliki 4 levo.

Izračun Levenshteinove razdalje nadaljujemo s prehodom skozi vsak element pomožne matrike in izračunom vrednosti vseh praznih elementov. To storimo z operatorjem, ki obsega 4 elemente in ga predstavimo kot matriko velikosti  $2 \times 2$ . Spodnji desni element operatorja poravnamo s praznim elementom pomožne matrike, ki ga želimo izračunati. Vidimo, da operator prekriva vrednosti pomožne matrike, ki jih bomo uporabili za izračun praznega





|   | l e p o t a |   |   |   |   |   |   |
|---|-------------|---|---|---|---|---|---|
|   | 0           | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| t | 1           |   |   |   |   |   |   |
| e | 2           |   |   |   |   |   |   |
| l | 3           |   |   |   |   |   |   |
| e | 4           |   |   |   |   |   |   |
| f | 5           |   |   |   |   |   |   |
| o | 6           |   |   |   |   |   |   |
| n | 7           |   |   |   |   |   |   |

|   | l e p o t a |   |   |   |   |   |   |
|---|-------------|---|---|---|---|---|---|
|   | 0           | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| t | 1           | 1 |   |   |   |   |   |
| e | 2           |   |   |   |   |   |   |
| l | 3           |   |   |   |   |   |   |
| e | 4           |   |   |   |   |   |   |
| f | 5           |   |   |   |   |   |   |
| o | 6           |   |   |   |   |   |   |
| n | 7           |   |   |   |   |   |   |

SLIKA 4.

Levo: Inicializacija pomožne matrike za niza  $a$  = telefon in  $b$  = lepota. Desno: Prekrivanje operatorja in prvi izračun praznega elementa v pomožni matriki.

elementa pomožne matrike. To prikazuje slika 4 desno, kjer smo operator poravnali tako, da primerjamo prvi črki obeh nizov. To sta črki »t« in »l«, ki sta označeni s svetlo sivo barvo. Z modro barvo so označene vrednosti v pomožni matriki, ki jih prekriva operator. Z zeleno barvo je označen prazen element, katerega vrednost želimo izračunati. Sledi izračun vrednosti praznega elementa pomožne matrike. Če se črki, ki ju primerjamo, razlikujeta, potem poiščemo minimalno vrednost elementov, ki jih prekriva operator, in prištejemo utež. Utež pove za kolikošno vrednost kaznujemo razlikovanje zaradi dodajanja, brisanja ali zamenjave znaka v primeru neujemanja. Ker smo se odločili, da bomo vse operacije tretirali kot enakovredne, bo utež v našem primeru vedno enaka 1. Na sliki 4 desno vidimo, da smo za prazen element pomožne matrike (označen z zeleno barvo) na prej opisan način dobili vrednost 1. Izbirali smo minimalno vrednost med tremi prekritimi vrednostmi pomožne matrike (označenimi z modro barvo) in sedaj vidimo, da je minimalna vrednost enaka 0. Tej vrednosti prištejemo utež, ki je enaka 1, in s tem dobimo končno vrednost elementa, ki je enaka 1. Slika 5 levo prikazuje nadaljevanje izračuna, kjer primerjamo črki »t« in »e«, na sliki 5 desno pa vidimo izračunano celotno prvo vrstico pomožne matrike, kjer smo med izračuni naleteli na ujemanje v črki »t«.

Če se črki, ki ju primerjamo, ujemata, potem je vrednost praznega elementa pomožne matrike enaka vrednosti elementa pomožne matrike, ki se nahaja levo diagonalno od praznega elementa pomožne matrike. To pomeni, da prevzamemo dosedanja vrednost razdalje, saj smo naleteli na ujemanje. Na sliki 5 desno vidimo, da smo za prazen element pomožne matrike (označen z zeleno barvo) prevzeli vrednost 4 iz elementa, ki je levo diagonalno od njega (označen z oranžno barvo).

|   | l e p o t a |   |   |   |   |   |   |
|---|-------------|---|---|---|---|---|---|
|   | 0           | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| t | 1           | 1 | 2 |   |   |   |   |
| e | 2           |   |   |   |   |   |   |
| l | 3           |   |   |   |   |   |   |
| e | 4           |   |   |   |   |   |   |
| f | 5           |   |   |   |   |   |   |
| o | 6           |   |   |   |   |   |   |
| n | 7           |   |   |   |   |   |   |

|   | l e p o t a |   |   |   |   |   |   |
|---|-------------|---|---|---|---|---|---|
|   | 0           | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| t | 1           | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| e | 2           |   |   |   |   |   |   |
| l | 3           |   |   |   |   |   |   |
| e | 4           |   |   |   |   |   |   |
| f | 5           |   |   |   |   |   |   |
| o | 6           |   |   |   |   |   |   |
| n | 7           |   |   |   |   |   |   |

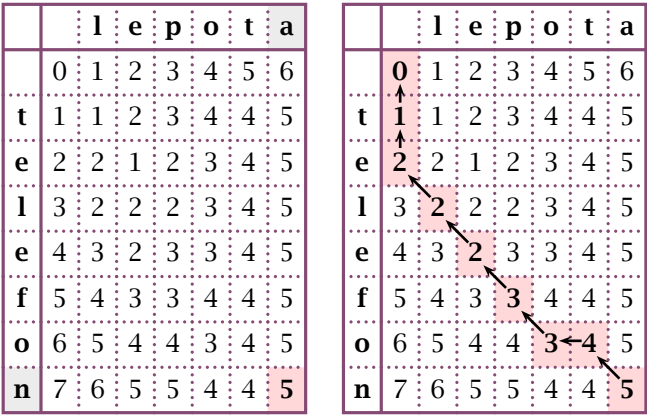
SLIKA 5.

Nadaljevanje izračunov vrednosti praznih elementov v prvi vrstici pomožne matrike. Levo: Izračun vrednosti pri primerjavi črk »t« in »e«. Desno: Izračun vrednosti pri ujemanju v črki »t«.

Postopek nadaljujemo tako dolgo, dokler ne izračunamo vseh vrednosti praznih elementov v pomožni matriki. Končno stanje vrednosti pomožne matrike prikazuje slika 6 levo. Ko izračunamo vse vrednosti pomožne matrike, odčitamo spodnji desni element pomožne matrike (označen z rdečo barvo). Ta vrednost predstavlja Levenshteinovo razdaljo med nizoma  $a$  in  $b$ , ki pove, da je za pretvorbo niza  $a$  v  $b$  potrebnih pet operacij. Za nekatere naloge v procesiranju naravnega jezika je ta vrednost že dovolj, saj lahko definiramo metriko podobnosti. Naj bo  $\text{lev}(a, b)$  Levenshteinova razdalja med nizoma  $a$  in  $b$ . Levenshteinovo podobnost med nizoma  $a$  in  $b$  označimo kot  $\text{sim}_{\text{lev}}(a, b)$  in definiramo z enačbo

■ 
$$\text{sim}_{\text{lev}}(a, b) = \frac{|a| + |b| - \text{lev}(a, b)}{|a| + |b|}, \tag{1}$$

kjer sta  $|a|$  in  $|b|$  dolžini nizov  $a$  in  $b$ . Vrednost  $\text{sim}_{\text{lev}}(a, b)$  je na intervalu  $[0, 1]$  in predstavlja po-



**SLIKA 6.** Izračun vrednosti Levenshteinove razdalje s polno pomožno matriko in ponazoritev poti z minimalnim številom operacij nad nizi. Levo: Končno stanje vrednosti v pomožni matriki. Desno: Ena izmed možnih poti, ki ponazarja minimalno število operacij.

dobnost med nizoma *a* in *b*. Za naš primer izračunamo vrednost 0,615, kar interpretiramo kot 61,5 % podobnost med nizoma *a* in *b*.

|             |          |
|-------------|----------|
| zamenjava   | brisanje |
| vstavljanje | *        |

**SLIKA 7.** Operator za ugotavljanje zaporedja uporabljenih operacij. Znak \* označuje pozicijo trenutnega elementa.

V primeru, da bi želeli vedeti, katere operacije so bile potrebne za pretvorbo niza *a* = telefon v niz *b* = lepota, moramo rekonstruirati zaporedje izve-

| # | Operacija                          | Rezultat            |
|---|------------------------------------|---------------------|
| 1 | zamenjava črke »n« z »a«           | telefon → telefoa   |
| 2 | vstavljanje črke »t«               | telefoa → telefota  |
| 3 | ni operacije (ujemanje v črki »o«) | telefota            |
| 4 | zamenjava črke »f« s »p«           | telefota → telepota |
| 5 | ni operacije (ujemanje v črki »e«) | telepota            |
| 6 | ni operacije (ujemanje v črki »l«) | telepota            |
| 7 | brisanje črke »e«                  | telepota → tlepota  |
| 8 | brisanje črke »t«                  | tlepota → lepota    |

denih operacij. To lahko storimo tako, da začnemo v skrajnem spodnjem desnem elementu pomožne matrike in znova upoštevamo matrični operator velikosti 2 × 2 (slika 7). Cilj je priti v zgornji levi element matrike z vrednostjo 0. Tvorili bomo torej pot po pomožni matriki, odvisno od premika pa bomo izvedeli, katera operacija je bila izvedena v tistem koraku. Pri tem bomo niz *a* spreminjali v smeri iz desne proti levi.

Ob ujemanju znakov se premaknemo levo diagonalno in ne izvedemo nobene operacije, saj gre za ujemanje. Ob neujemanju znakov bo premik v levo pomenil operacijo vstavljanja, premik navzgor bo pomenil operacijo brisanja, premik po levi diagonalni pa bo pomenil operacijo zamenjave. Premiki si vedno sledijo v smeri elementa z nižjo vrednostjo od vrednosti elementa, v katerem se nahajamo. Pri tem upoštevamo znake iz nizov *a* in *b*, ki predstavljajo glavo stolpcev in vrstic. Grafični potek ene takšne poti prikazuje slika 6 desno, izvedbo zaporedja operacij pa prikazuje slika 8.

**Zaključek**

V tem prispevku smo predstavili osnovne lastnosti razdalj urejanja, ki jih lahko uporabimo na področju procesiranja naravnega jezika. Podrobneje smo si pogledali delovanje Hammingove in Levenshteinove razdalje urejanja. S Hammingovo razdaljo smo spoznali delovanje operacije zamenjave, z Levenshteinovo razdaljo pa tudi operaciji vstavljanja in brisanja. Primera implementacije Hammingove in Levenshteinove razdalje v programskem jeziku Python sta na voljo na javno dostopnem repozitoriju GitHub [5].

**SLIKA 8.** Izvedba zaporedja operacij ob spremembi niza *a* = telefon v niz *b* = lepota





Čeprav operacije transpozicije v tem prispevku nismo podrobneje obravnavali, je vredno omeniti, da obstaja razširitev Levenshteinove razdalje, ki dovoljuje tudi to operacijo. To je Damerau-Levenshteinova razdalja, ki se na področju procesiranja naravnega jezika pogosto uporablja za popravljanje črkovanja. Ker pa to ni edina zanimiva uporaba operacije transpozicije, si bomo v drugem delu podrobneje pogledali dve razdalji urejanja, ki dovoljujeta izključno to operacijo – to sta Jarova in Jaro-Winklerjeva razdalja.

## Literatura

- [1] R. W. Hamming, *Error detecting and error correcting codes*, The Bell System Technical Journal **29.2** (1950), 147-160. doi: 10.1002/j.1538-7305.1950.tb00463.x.
- [2] M. Khan in A. Miransky, *String Comparison on a Quantum Computer Using Hamming Distance*, arXiv: 2106.16173 [cs.ET], 2021.

- [3] V. Iosifovich Levenshtein, *Binary codes capable of correcting deletions, insertions and reversals*, Soviet Physics Doklady **10.8** (1966), Doklady Akademii Nauk SSSR, V163 No.4 845-848 1965, 707-710.

- [4] G. Navarro, *A Guided Tour to Approximate String Matching*, ACM Comput. Surv. **33.1** (2001), 31-88. ISSN: 0360-0300, doi: 10.1145/375360.375365, dostopno na doi.org/10.1145/375360.375365, ogled 10. marca 2022.

- [5] *Procesiranje naravnega jezika - GitHub*, dostopno na github.com/procesiranje-naravnega-jezika/example-code/blob/main/1b%5C%20-%5C%20Razdalje%5C%20urejanja%5C%201.%5C%20de1%5C%20-%5C%20Hammingova%5C%20in%5C%20Levenshteinova%5C%20razdalja, ogled 10. marca 2022.

XXX






|    |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |   |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|
| 1  | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |   |
| 1  | I | D | R | I | J | A | R | U | T  | H  | E  | R  | F  | O  | R  | D  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |   |
| 2  | G | R | A | V | E | R | E | V | R  | O  | P  | E  | I  | Z  | E  | M  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |   |
| 3  | R | A | U | L | E | M | N | I | S  | K  | A  | T  | A  | S  | I  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |   |
| 4  | K | A | P | L | J | I | C | A | D  | E  | A  | K  | I  | N  | O  | T  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |   |
| 5  | O | C | E | U | N | I | J | A | K  | I  | T  | K  | E  | R  | R  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |   |
| 6  | O | P | P | E | N | H | E | I | M  | E  | R  | N  | E  | B  | I  | N  | A  | D  | A  | L  | E  | N  | I  | M  |    |    |    |    |    |   |
| 7  | D | L | A | K | A | V | O | S | T  | S  | O  | K  | O  | L  | S  | T  | V  | O  | T  | O  | J  | A  | B  | O  | T  | I  | N  | S  | K  | I |
| 8  | B | E | L | U | G | A | T | U | R  | B  | A  | N  | N  | A  | R  | A  | O  | V  | O  | J  | V  | E  | Č  | L  | E  | N  | I  | K  |    |   |
| 9  | O | M | A | O | R | K | R | E | A  | A  | U  | D  | I  | A  | L  | B  | I  | K  | V  | A  | R  | K  | I  | K  | R  | E  | M  | S  |    |   |
| 10 | J | E | M | E | N | R | S | K | R  | F  | J  | S  | R  | K  | A  | N  | J  | E  | B  | R  | A  | Z  | Z  | I  | P  | L  | A  | V  | Ž  |   |
| 11 | K | L | E | T | R | A | K | E | L  | U  | S  | T  | A  | P  | S  | C  | A  | L  | I  | P  | E  | C  | I  | V  | O  | N  | I  | Č  |    |   |
| 12 | A | J | D | A | E | M | O | N | A  | J  | A  | V  | K  | E  | K  | R  | I  | P  | T  | O  | G  | A  | M  | E  | I  | Z  | I  | D  | A  |   |
| 13 | P | R | E | M | O | G | N | I | E  | T  | O  | H  | U  | S  | E  | R  | L  | P  | E  | J  | B  | A  | K  | E  | R  |    |    |    |    |   |
| 14 | P | R | A | V | O | K | O | T | N  | I  | K  | A  | N  | K  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |   |
| 15 | I | G | S | N | O | V | T | R | A  | M  | A  | D  | I  | O  | S  | T  | I  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |   |
| 16 | J | I | M | I | G | A | S | A | T  | O  | R  | E  | N  | I  | S  | A  | T  | I  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |   |
| 17 | O | J | A | Š | I | O | P | R | E  | V  | Z  | G  | O  | J  | A  | K  | R  | O  | G  | I  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |   |
| 18 | N | A | G | E | L | J | A | S | O  | E  | A  | N  | E  | S  | T  | O  | P  | O  | L  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |   |

## REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 49/4

→ Pravilna rešitev nagraadne križanke iz četrte številke Preseka letnika 49 je **Predobdelava besedila**. Med pravilnimi rešitvami smo izžrebali naslednje reševalce: Ana Pestotnik Stres iz Ljubljane, Marko Belingar iz Solkana in Neda Tompa iz Odrancev, ki bodo nagrađe prejeli po pošti.

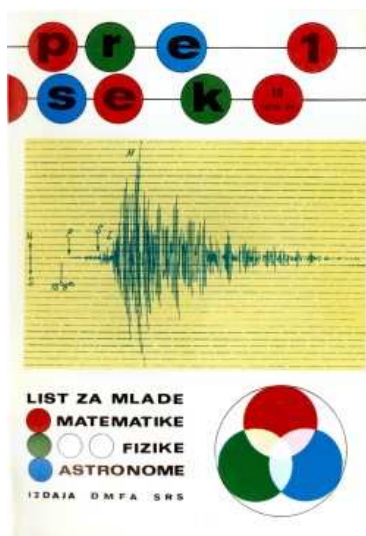
XXX

# Kako rešujemo naloge iz matematike in fizike

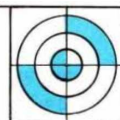
ŠTEVILKA 1, LETNIK 3, 1975/76

↓↓↓

→ V starejših letnikih revije Presek so bili pogosto objavljeni tudi šaljivi prispevki, od matematično-fizikalne poezije in matematičnih trikov s kartami do hudomušnih karikatur univerzitetnih profesorjev in različnih matematičnih šal. Enega takih je pripeljal tudi nedavno preminuli Dušan Modic (1927–2022), profesor matematike in fizike iz Novega mesta, ki je v tistem obdobju veliko pripomogel k uspešnemu delovanju DMFA Slovenije in izboljšanju pouka v slovenskih šolah. Njegovo vztrajnost, marljivost in navdušenje za matematiko in fiziko bomo člani uredništva revije Presek ohranili v lepem spominu.



## NALOGE



### KAKO REŠUJEMO NALOGE IZ MATEMATIKE IN FIZIKE?

*Matematik in fizik skušata novo nalogo prevesti na reševanje že znane naloge. Poglejmo primer!*

**Naloga 1.** Na pokvarjeni tehtnici je zavitek, ki ga moramo stehtati. Poleg pokvarjene tehtnice stoji dobra tehtnica. Kaj moramo napraviti?



*Ne dvomim, da boste pravilno odgovorili. Zavitek je treba preložiti na dobro tehtnico in ga stehtati. Prav! Zdaj pa k drugi nalogi!*

**Naloga 2.** Zavitek, ki ga moramo stehtati, stoji poleg pokvarjene tehtnice, poleg te pa stoji dobra tehtnica. Kaj moramo napraviti?



*Zdaj pa gotovo mislite, da je treba zavitek položiti na dobro tehtnico in ga stehtati. Ne! Treba ga je položiti na pokvarjeno tehtnico, potem pa ... Kaj potem? I, saj to je naša naloga št.1, ki jo že znamo rešiti. Kar poglejte zgoraj, kako se reši!*

Dušan Modic

55

× × ×

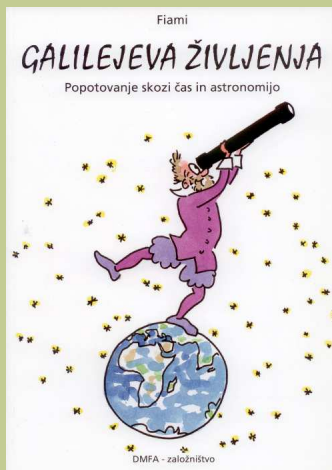
# Zgodovina znanosti v stripu

Sredi decembra 2012 je Center za mladinsko književnost in knjižničarstvo pri Mestni knjižnici Ljubljana že tretjič podelil priznanja Zlata hruška. Z njimi so tokrat odlikovali kakovostno najboljših deset odstotkov otroške in mladinske književnosti, ki je izšla v letu 2011. DMFA-založništvo je priznanje prejelo za strip *Življenje Marie Curie*.

Švicarski avtor Raphaël Fiammingo, s kratkim umetniškim imenom Fiami, v tem stripu večjega formata duhovito predstavlja nekaj izsekov iz zgodovine kemije, od Aristotela do današnjega časa. V vsakem razdelku nastopa dekle ali ženska, katere ime je različica imena Marija, v čast veliki znanstvenici Marie Curie. Zgodbe ilustrirajo tudi vlogo žensk v raznih zgodovinskih obdobjih. Predvsem pa so zabavne in obenem poučne, saj zvemo marsikakšno zanimivo podrobnost o nastanku znanstvenih odkritij. Med najbolj posrečenimi je zgodba o Mendeljevu in njegovem sestavljanju periodnega sistema elementov. Tudi druge pripovedi ne zaostajajo. Knjigo je odlično prevedel prof. dr. Alojz Kodre.



7,68 EUR



7,68 EUR



8,31 EUR

Pri DMFA-založništvo sta v Presekovi knjižnici izšli še dve knjigi istega avtorja

- *Galilejeva življenja*, z zgodbami iz zgodovine astronomije, od Babiloncev do danes, ter
- *Einsteinova življenja*, z zgodbami iz zgodovine fizike, vse od Sokrata do danes.

Ta dva stripa je prav tako izvrstno prevedel Alojz Kodre. Sta enako zanimiva, zabavna in poučna in bosta bralcu brez dvoma polepšala dan.

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitev so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA-založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 633.