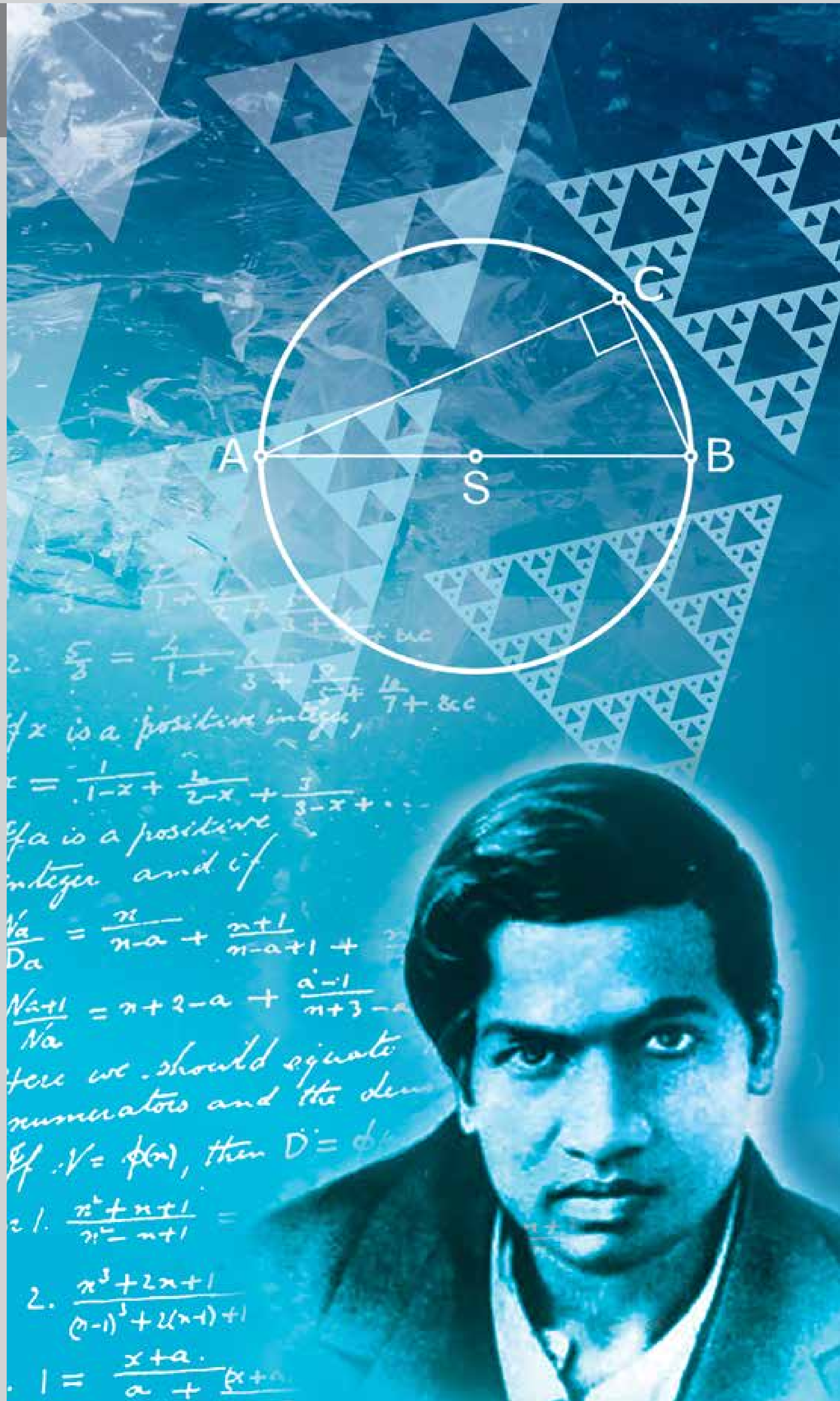
Matematika v šoli

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

2019, letnik 25 1



IZ TEORIJE ZA PRAKSO:

Alternativni algoritmi pisnega množenja

Nekaj dokazov Talesovega izreka

IZ RAZREDA:

Od sladkorja do odvajanja

MATEMATIKA SKOZI ZGODOVINO:

Srinivasa Aiyanger Ramanujan (1887–1920) – 1. del

NOVICE:

Tatjana Kerin, dobitnica priznanja Blaža Kumerdeja za leto 2018

Zavod Republike Slovenije za šolstvo

Matematika v šoli

2019, letnik 25 1

VSEBINA

ISSN 1318-010X
MATEMATIKA V ŠOLI
letnik XXV, številka 1, 2019

Izdajatelj in založnik: Zavod RS za šolstvo
Predstavnik: dr. Vinko Logaj

Odgovorna urednica: mag. Mateja Sirnik, Zavod RS za šolstvo

Jezikovni pregled: Katja Križnik Jeraj
Prevod povzetkov v angleščino: Ensitra prevajanje, Brigita Vogrinec, s. p.
Urednica založbe: Andreja Nagode
Oblikovanje: Simon Kajtna
Fotografije: avtorji člankov
Računalniški prelom in tisk: Design Demšar, d. o. o., Present, d. o. o.
Naklada: 520 izvodov

Prispevke pošljite na naslov:
Zavod RS za šolstvo, OE Kranj (za revijo Matematika v šoli), Kidričeva 53, 4000 Kranj, e-naslov: mateja.sirnik@zrss.si
Naročila: Zavod RS za šolstvo – založba, Poljanska cesta 28, 1000 Ljubljana, faks: 01/30 05 199, e-naslov: zalozba@zrss.si
Letna naročnina (2 številki): 22,00 EUR za šole in ustanove, 16,50 € za fizične osebe, 8,50 € za študente, dijake in upokojence. Cena posamezne številke v prosti prodaji je 13,00 EUR.

Revija Matematika v šoli je vpisana v razvid medijev, ki ga vodi Ministrstvo za kulturo, pod zaporedno številko 568. Revija je indeksirana in vključena v mednarodne baze podatkov: MathEduc – Mathematics Education Database, Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik (ZDM), Co-operative Online Bibliographic System and Services (COBISS)

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

Kako se učiti matematiko, kako poučevati matematiko? Kaj se je o tem pisalo nekoč in kaj danes?

S Terezijanskim osnovnošolskim zakonom leta 1774 je bila prvič na našem ozemlju uvedena splošna šolska obveznost za vse otroke od 6. do 12. leta. Z uvedbo obveznega šolanja so v naš slovenski prostor postopoma prišli učbeniki za pouk matematike. Prve v slovenskem jeziku je napisal dr. Franc Močnik, dopolnil pa jih je tudi z izdajo didaktičnih napotkov. V eni od njih, *Navod k pervi računici za slovenske ljudske šole*, je leta 1871 zapisal:

Učitelj bi grešil proti naravi tega predmeta in proti naravni poti dušnega razvijevanja, ko bi računska pravila učencem prekladati hotel le kakor nekaj danega, kakor puhle poslédke tujega razmišljevanja. On mora učence le s primernimi vprašanji napeljevati nató, da po lastnosti dotičnih nalog in iz številnih razmer učenci sami prevdarjajo in sklepajo, kako se imajo zastavljene naloge reševati; učenci morajo način, po kterem se računske naloge rešujejo, tako rekoč sami poiskati, a učitelj naj jih k temu le primerno napeljuje. Po tej hevristični metodi se učenci naučé, kako imajo ravnati, da zastavljene naloge rešijo, pa jim tudi ne bo težko najti dotične vzroke, po kterih se je naloga morala izpeljati. Obče nam je znano, da otroci navadno pozabijo to, kar so se zgolj mehanično učili, po zgorej omenjeni metodi pa dobi spomin svojo močno podporo v razumnosti; in če bi tudi otroci sčasoma pozabili nekaj od tega, kar so si z lastno razumnostjo pridobili, ostane jim vendar še duševna moč, s ktero si slabo zapomnjene reči lehko vnovič prilasté. Lastna delavnost pa tudi učence spodbuja, da toliko več ljubezni in veselja do poduka zadobé. Čimbolj učenec sam dela in razsoja, timbolj je zadovoljen, ko se zaveda svoje lastne moči; vsaka nova po lastni poti in z lastnim trudom pridobljena reč ga toliko bolj veseli in ga spodbuja k tolikanj veči prizadevnosti. Po te načinu vravnani nauk je najterdnejša podloga, na kteri se doseže gotovost in urnost v številjenji, vsestransko jásen spregled, pa tudi gibčnost in živost duhá, ki pelje učenca do samostojnosti.

In kako je danes?

Zelo podobno poudarjamo aktivno vlogo učencev pri izgradnji kakovostnega in trajnega znanja. Pri tem učitelj učenca spremlja, kako napreduje, z učenci si izmenjuje povratne informacije s ciljem premagovati vrzeli v učenju in izboljšati dosežke. Pri takem pouku ima učenec možnosti za iskanje osebnega smisla, načrtovanje in udejanjanje svojih poti učenja in strategij reševanja, uveljavljane svojih zmožnosti in interesov ter ohranjanje radovednosti.

Del tega lahko preberete v številki revije, ki je pred vami. Govorimo o različnih algoritmih množenja naravnih števil, različnih dokazih Talesovega izreka in njegove uporabe. V objavljeni raziskovalni nalogi učenec Vid predstavi, kako je skozi več šolskih let nadgrajeval svoje matematično znanje in pri tem reševal ekstremalni problem. Preberete lahko tudi, kakšne probleme je imel znotraj takratnega izobraževalnega sistema v Indiji in kako je poskušal uveljaviti svoje znanje matematični genij Ramanujan.

Lep pozdrav vsem in uspešen zaključek šolskega leta.

mag. Mateja SIRNIK, *odgovorna urednica*

Mateja Sirnik

Alternativni algoritmi pisnega množenja

Iza Javornik, dipl. prof. raz. pouka,
študentka 1. letnika 2. stopnje na Pedagoški fakulteti Univerze v Mariboru, smer Razredni pouk,

asist. Manja Podgoršek Mesarec, mag. prof. raz. pouka
Rektorat Univerze v Mariboru in Osnovna šola Hruševec Šentjur in

izr. prof. dr. Alenka Lipovec
Pedagoška fakulteta Univerze v Mariboru

Izvleček

Aritmetika in algebra sta eno pomembnejših področij, s katerimi se učenci srečujejo že v prvem vzgojno-izobraževalnem obdobju. Del tega področja so tudi računske operacije, med katere spada množenje. Množenje je opredeljeno kot ključna spretnost za reševanje matematičnih problemov, gradnjo trdnih temeljev proporcionalne vzorčnosti, algebraičnega mišljenja in zahtevnejše matematike. S pisnim množenjem dvomestnih števil se učenci srečajo v 5. razredu osnovne šole. V slovenskih osnovnih šolah je prisoten klasični algoritem pisnega množenja, ki že vrsto let učencem predstavlja trn v peti. Največja težava klasičnega pisnega algoritma je zanemarjanje mestnovrednostnega koncepta števil in »zastarelost algoritma« (Van de Wall, 2011). Algoritmi množenja, kot jih opredelita Jazby in Pearn (2015), problem množenja razdelijo v serijo kognitivno manj zahtevnih delov. Poznanih je kar nekaj algoritmov, ki so primerni za uporabo v osnovni šoli in učencu olajšajo razumevanje in predstavo o številih. V članku so predstavljeni različni alternativni algoritmi (prstni algoritem, pravokotni algoritem, mrežni algoritem, linijski algoritem), ki so v pomoč učencem pri razumevanju in jih lahko s primerno razlago uporabljamo tudi kot alternativo klasičnemu algoritmu pisnega množenja.

Ključne besede: pisno množenje, algoritem, alternativni algoritem, mestnovrednostni koncept

Alternative Written Multiplication Algorithms

Abstract

In arithmetic and algebra, two of the more important subjects of the first education period, students learn to perform, among other things, arithmetic operations, including multiplication. Multiplication is defined as a key skill for solving mathematical problems, building solid foundations for proportional sampling, algebraic thinking and more complex mathematics. Students' first encounter with the concept of traditional multiplication algorithm of two digit numbers in the fifth grade. Slovenian primary schools teach the traditional algorithm, which has, over the years, proven to be a thorn in students' side. The main problem in teaching the traditional multiplication is that it neglects the concept of place value and that it is »outdated« (Van de Wall, 2011). Multiplication algorithms defined by Jazby and Pearn (2015) break the multiplication problem down into a series of less demanding parts. There are a number of algorithms that can be used in primary school to facilitate students' understanding of numbers and make this concept easier to learn. The article introduces different alternative algorithms (hand multiplication, area model, lattice multiplication, line multiplication) that help students understand multiplication and that can be used, along with a proper explanation, as alternatives to the traditional multiplication algorithm.

Keywords: traditional multiplication, algorithm, alternative algorithm, concept of place value

1 Uvod

Matematika je eden temeljnih predmetov v osnovni šoli, kjer je pomembno poznavanje določenih postopkov, razumevanje, medpredmetno povezovanje, uporaba matematičnega znanja in zmožnost reševanja problemov. Pri pouku matematike se ozavešča praktično uporabnost in smiselnost učenja matematike, zato je pomembno, da so postopki, ki jih učencem predstavljamo, smiselni in razumljivi za uporabo. Kot opisuje West (2011), je množenje ena osnovnih operacij elementarne aritmetike, ki jo lahko definiramo kot ponavljajoče seštevanje, kar se tiče množenja celih števil. Prav tako pa je množenje ključna spretnost za reševanje matematičnih problemov.

2 Pisni algoritmi množenja

2.1 Klasični algoritem pisnega množenja

S pisnim množenjem se učenci prvič srečajo v 4. razredu, v 5. razredu pa pisno množijo tudi z dvomestnimi števili (v množici naravnih števil do milijona). V slovenskih osnovnih šolah je največkrat uporabljen klasični način pisnega množenja. Ta se v šolah uporablja že vrsto let. Predstavljen je bil že v prvem učbeniku za matematiko, ki je izšel v slovenskem jeziku. V učbeniku Računica za obče ljudske šole avtor Franc Močnik (1995) predstavi spodnji algoritem kot primer krajšega računa. Zastavi nalogo *Koliko je 3 krat 213?* in jo najprej izračuna s pisnim seštevanjem, zraven pa prikaže model krajšega izračuna v smislu klasičnega algoritma pisnega množenja.

1. Koliko je 3 krat 213?

213 krajše 213 × 3
213 639
213
639

3 krat 3 ednice = 9 ed.
3 krat 1 desetica = 3 des.
3 krat 2 stotici = 6 stot.

Slika 1: Primer pisnega množenja v učbeniku F. Močnika.

F. Močnik (1995) opiše postopek algoritma tako, da število tolikokrat vzameš, kolikorkrat kaže drugo število, torej zmnožiš. Število, ki ga vzamemo večkrat, je množenec, število, ki pokaže, kolikokrat je množenec treba vzeti, pa je množitelj. Število, ki ga dobimo, je zmnožek.

Za učenje in utrjevanje omenjenega algoritma je najprimernejši karo zvezek, kjer lahko učenci primerno pregledno vpisujejo števila in tako organizirano in strukturirano avtomatizirajo algoritem in njegov postopek. V današnjih učbenikih se prav tako pojavlja zgornji algoritem. Uporabi ga M. Kopasić (2016), prav tako pa je prikazan v i-učbeniku za matematiko (Bajramović, N., Repnik, A., Kociper, M., Cigula, S., Slana Mesarič, M., Antolin, D., Ferk, E., Visočnik, D., 2014). Primer korakov algoritma je prikazan z uporabo dinamične slike, ki se nahaja v i-učbeniku (Bajramović idr., 2004).

2.1.1 Koraki algoritma

1. **Zapis števil** (za boljšo preglednost je vsak prostor namenjen svoji števki)

Slika 2: 1. korak algoritma: Zapis števil.

2. **Množenje z največjo desetiško enoto množitelja**

Množiti začnemo z desetiško enoto na skrajni levi množitelja. To je v zgornjem primeru število 2, ki predstavlja desetice. S tem številom torej pomnožimo najmanjšo desetiško enoto množenca (skrajno desno v množencu), ki je v zgornjem primeru število 1 in predstavlja enice.

V naslednjem koraku z isto desetiško enoto množitelja množimo naslednjo enoto, z desne proti levi, v množencu. To je v našem primeru število 3, ki predstavlja desetice.

Ko smo z največjo desetiško enoto množitelja zmnožili vse desetiške enote množenca, številu, ki smo ga dobili z množenjem, pripišemo toliko ničel, kot jih je v osnovi desetiške enote. V tem primeru smo množili z 20, ki je desetica, zato je pripisana ena ničla. V primeru, ko bi množili s stotico, bi pripisali dve ničli.

Slika 3: 2. korak algoritma: Množenje z največjo desetiško enoto množitelja.

3. **Množenje z naslednjo (od leve poti desni) desetiško enoto množenca**

Nadaljujemo z množenjem in tokrat množimo z naslednjo desetiško enoto množitelja, v spodnjem primeru s številom 4. Zopet množimo števke množenca od desne proti levi.

Slika 4: 3. korak algoritma: Množenje z naslednjo desetiško enoto množitelja.

Posebej pozorni smo, če pri zmnožku dobimo dvomestno število. Kot je spodaj prikazano, zapišemo enice zmnožka, desetice pa prenesemo naprej.

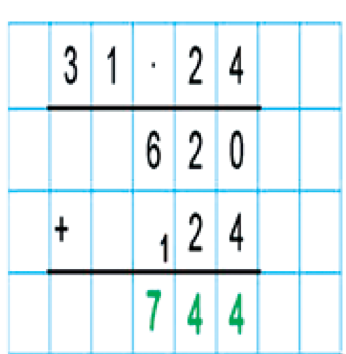
Slika 5: Posebna pozornost pri dvomestnih delnih zmnožkih.

Slika 6: Posebna pozornost pri dvomestnih delnih zmnožkih.

4. **Seštetje delnih zmnožkov**

Ko torej zmnožimo vse števke množenca z vsemi števkami množitelja, seštejemo delne zmnožke.

Slika 7: 4. korak: Seštetje delnih zmnožkov.



Slika 8: Končni izgled klasičnega algoritma pisnega množenja.

Mnogi avtorji za ta algoritem navajajo, da predstavlja učencem težave, saj oteži računanje. Van de Walle (2005) navaja, da števila pri klasičnem algoritmu niso gledana kot celote. Opazimo jih kot posamezne števke, šele ob izračunu pa jim namenimo nekaj pozornosti. Prav tako opozarja, da se števila ne gledajo kot posamezne desetiške enote, temveč kot posamezne števke. Tako učenec na nek način dejansko število ignorira. Tako Van de Walle ugotavlja, da je največja težava v zanemarjanju mestnovrednostnega koncepta števil, ki je za učence sicer pomemben zaradi vzpostavljanja predstave o velikosti števil in o odnosih med števili.

Po drugi strani pa je klasični algoritem pisnega množenja konceptualno naravnan algoritem, za katerega učenci vedo, kako se ga reši, pri tem pa se bolj ali manj konča. Zato tako Van de Walle kot Fuson (2003) razmišljata o smiselnosti klasičnega algoritma pisnega množenja. Van de Walle med drugim ugotavlja zastarelost algoritma, ki ob spremembah v učnih načrtih, usmerjenih v ustvarjanje ugodnega okolja za učenje in okolja z razumljivimi algoritmi, ni optimalen. Zelo pomembno je, da učitelj ob razlagi klasičnega algoritma poudari pomen desetiških enot, da se ne zanemari mestnovrednostni koncept in da zmanjšamo tveganje za nastanek napak pri uporabi algoritma.

Tudi Jazby in Pearn (2015) opozarjata na to, saj opredelita algoritme množenja kot kognitivne pripomočke, ki množenje razdelijo v serijo kognitivno manj zahtevnih delov. V primeru klasičnega algoritma se pojavi težava, saj algoritem obravnava števila kot posamezne števke in kot strategija ni številsko naravnan. V primeru množenja števil 34 in 36 bi učenci $34 \cdot 36$ razdelili na lažje zmnožke, kot na primer: $6 \cdot 4$, $6 \cdot 3$, $2 \cdot 4$, $2 \cdot 3$, kar pa je seveda napačno, saj ne množimo $6 \cdot 3$, temveč $6 \cdot 30$. V kolikor bi učenci razdelili števili na delne zmnožke, bi tako pri seštevanju delnih zmnožkov dobili napačen rezultat, saj niso pozorni na desetiške enote števk v številu.

Van de Walle (2005) opozarja, da učenci v primeru, ko ne razumejo konceptov, ki temeljijo na določenih postopkih, ustvarijo pomanjkljive postopke, ki se odražajo v sistematičnih vzorcih napak. Cilj učitelja mora biti, da tveganje za te napake čim bolj zmanjša in učencu tako nudi primerno razlago oz. primerno alternativo, da bo njegovo razumevanje boljše in bolj sistematično.

Kot navaja Fuson (2003), lahko s poznavanjem postopkov, algoritmov in dobro pripravo učencev na spoznavanje le-teh učitelj prepreči večino napak, ki bi se pri učenčevi samostojni uporabi algoritma pojavile. Pomembno je, da ima učenec ustrezne pogoje, ustrezno učno okolje, v katerem bo ugodno razvil predispozicije, potrebne za razumevanje algoritmov, algoritmi pa mu morajo biti jasno predstavljeni za samostojno in uspešno uporabo.

2.2 Primerjava klasičnega algoritma in alternativnih algoritmov pisnega množenja

Fuson (2003) navaja, da obstajajo različni algoritmi, ki so primerni za uporabo pri pisnem množenju. Vsak ima prednosti in slabosti, naloga učitelja pa je, da te prednosti in slabosti dobro preuči, da lahko izbere primeren algoritem, ki ga bo učencem ponudil kot alternativo pisnega množenja. Tako mora učitelj zelo dobro poznati algoritem, ki ga učencem predstavlja. Pripraviti mora ustrezno tabelsko sliko, ki bo učencem v pomoč pri razumevanju algoritma. Biti mora nazorna, pregledna, dodelana, koraki algoritma morajo biti dobro vidni. Učenci nato potrebujejo ustaljeno vajo, s katero postanejo fluentnejši in bolj organizirani pri uporabi algoritma.

Van de Walle (2005) je v članku opisal, da moramo učence spodbujati tudi k temu, da sami poiščejo alternativne strategije, ki bi jim računanje olajšale. Spodbujati jih moramo, da si ustvarijo učno okolje bolj razumljivo, da si z novimi strategijami olajšajo računanje in da s pomočjo teh strategij postopke razumejo. To pomeni, da razumejo njihovo delovanje, da vedo, kako si sledijo koraki algoritma, in predvsem da vedo, zakaj so koraki tako razporejeni in v čem je smisel strategije oziroma algoritma. Učence tako prvotno spodbujamo k temu, da sami svoje delo olajšajo, kot alternativa pa je na voljo kar nekaj algoritmov, ki jih avtorji izpostavljajo kot primerne za pisno množenje v osnovni šoli.

2.3 Alternativni algoritmi pisnega množenja

West (2011) je v svojem prispevku predstavila 9 alternativnih algoritmov, ki učencem olajšajo računanje oz. so učencem lahko predstavljeni tudi kot splošni algoritmi pisnega množenja. Predstavili bomo štiri algoritme, ki so primerni za uporabo v naših osnovnih šolah.

2.3.1 Prsti algoritem

Prstni algoritem je enostaven algoritem, ki ga lahko uporabljamo za računanje zmnožkov enomestnih števil med 5 in 9. Pomembno pravilo, ki ga moraš poznati ob uporabi, je, da zaprta pest predstavlja število 5, vsak prst, ki ga odpreš, pa doda ena k prejšnji vrednosti. Da na vsaki roki nastaviš pravo število, od števila odštevaš pet. Ostanek predstavljajo dvignjeni prsti (West, 2011).

V primeru, ko želimo izračunati zmnožek števil $8 \cdot 7$, sledimo naslednjim korakom:

1. Dvigni tri prste na levi roki ($8 - 5 = 3$).
2. Dvigni dva prsta na desni roki ($7 - 5 = 2$).
3. Seštevek dvignjenih prstov pomnoži z 10 ($3 + 2 = 5$; $5 \cdot 10 = 50$).
4. Zaprte prste pomnoži med seboj ($2 \cdot 3 = 6$).
5. Seštej dobljeni števili ($50 + 6 = 56$).

West (2011) pravilnost uporabe prstnega algoritma dokaže z naslednjo enakostjo:

$$\begin{aligned} &10[(x-5)+(y-5)]+[(10-x)(10-y)]= \\ &\quad = 10x - 50 + 10y - 50 + 100 - 10x - 10y + xy \\ &\quad = 10x - 50 + 10y - 50 + 100 - 10x - 10y + xy \\ &\quad = xy \end{aligned}$$

Pomnoži seštevek dvignjenih prstov ($x - 5$ in $y - 5$) z 10, nato pa prištej zmnožek števil zaprtih prstov $(10 - x)(10 - y)$.

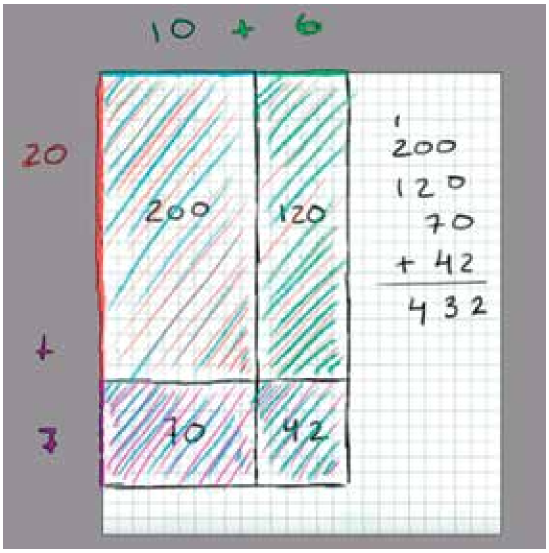
Metoda ne zahteva avtomatizirane poštevanke, zato je lahko pripomoček pri avtomatiziranju in služi kot možnost razvoja razumevanja procesa množenja.

2.3.2 Pravokotni algoritem

West (2011) navaja, da je pravokotni algoritem model množenja, ki uporabi različne reprezentacije, da razloži množenje in učencem pomaga ustvariti relacije z algebro in algebraičnim mišljenjem.

Model lahko razdelimo na različne načine:

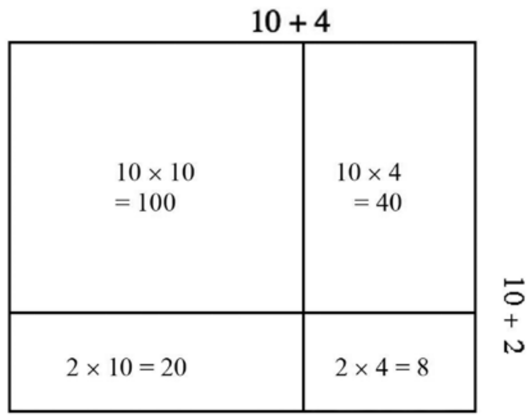
- tako da so vsi deli modela enaki kvadrati,
- tako da deli, kjer množimo z večjimi števili (deseticami), predstavljajo večji del,
- ali pa tako da uporabiš karirast list papirja. V vodoravni liniji najprej vzameš toliko kvadratkov, kolikor je moč desetic, nato pa še toliko kvadratkov, kot je moč enic. Prav tako vzameš v navpični smeri najprej toliko kvadratkov, kot predstavlja moč desetic in nato še toliko, kolikor je moč enic. Slednji način je prikazan na spodnji sliki za $16 \cdot 27$.



Slika 9: Primer oblike modela pri uporabi pravokotnega algoritma.

V primeru množenja $14 \cdot 12$ predstavimo algoritem tako, da najprej narišemo pravokotnik z višino 12 in širino 14, na navaden ali karirast papir, in pokažemo vmesne korake. Algoritem deluje tako, da najprej razmislimo, kako bi števila razdelili na zaokrožene desetice in enice. Tako števili 14 in 12 razdelimo na $10 + 4$ in $10 + 2$. Narisani model nato razdelimo na 4 dele.

1. Pravokotnik **zgoraj levo** predstavlja zmnožek **prvega seštevanca prvega števila** (10 od 14) in **prvega seštevanca drugega števila** (10 od 12).
2. V pravokotniku **zgoraj desno** množimo **drugi seštevanec prvega števila** (4 od 14) in **prvi seštevanec drugega števila** (10 od 12).
3. V pravokotniku **spodaj levo** množimo **prvi seštevanec prvega števila** (10 od 14) in **drugi seštevanec drugega števila** (2 od 12).
4. V pravokotniku **spodaj desno** množimo **drugi seštevanec prvega števila** (4 od 14) in **drugi seštevanec prvega števila** (2 od 12).
5. Seštejemo vse delne rezultate in dobimo končni rezultat množenja.

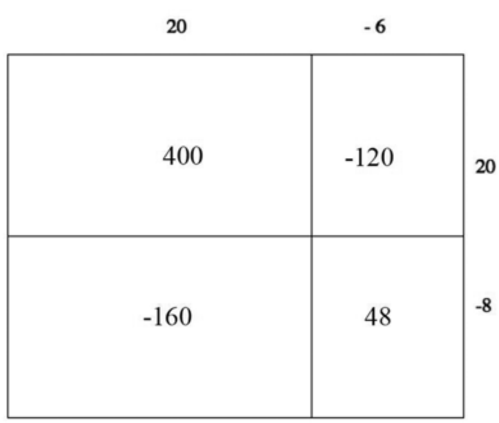


Slika 10: Primer kvadratnega algoritma za množenje 14 · 12. (West, 2011)

Glede na to, da množenje temelji na zakonu distributivnosti, avtorica razdela pravokotni model množenja tudi v skladu z zakonom distributivnosti (a · (b + c) = a · b + a · c).

$$
\begin{aligned}
14 \cdot 12 &= \\
&= [10 \cdot (10 + 2)] + [4 \cdot (10 + 2)] \\
&= (10 \cdot 10) + (10 \cdot 2) + (4 \cdot 10) + (4 \cdot 2) \\
&= 100 + 20 + 40 + 8 \\
&= 100 + 60 + 8 \\
&= 168
\end{aligned}
$$

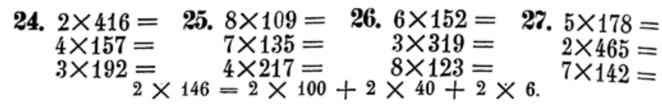
Tudi v primeru množenja z negativnimi števili je pravokotni model primeren kot alternativni model množenja. Števili 14 in 12 bi tako prikazali kot delni razliki 20 – 6 (= 14) in 20 – 8 (= 12). Postopek je enak kot v zgornjem primeru, pozorni moramo biti le na predznak delnih zmnožkov.



Slika 11: Primer kvadratnega algoritma za množenje 14 · 12 z odštevanjem. (West, 2011)

Predstavljeni model množenja jasno prikaže razmerje med števili. Prav tako pa je dober primer za dokaz komutativnosti, saj s pravokotnim algoritmom množenja učencem grafično prikažemo, da je 14 · 12 enako 12 · 14. Z njegovo pomočjo lahko učenci – predvsem vizualni tip učencev – razvijejo relacijsko razumevanje množenja večmestnih števil in faktoriziranja števil.

Že Močnik (1995) je v svojem učbeniku predstavil drugačen algoritem množenja, ki spominja na zgoraj predstavljeni pravokotni model. Zmnožek množenca in množitelja je zapisal kot seštevek delnih zmnožkov.



Slika 12: Pisno množenje kot seštevek delnih zmnožkov.

Na primeru 2 · 416 avtor izračuna s pomočjo delnih zmnožkov. Tako ustvari račun:

$$2 \cdot 416 = 2 \cdot 100 + 2 \cdot 40 + 2 \cdot 6$$

Vidimo lahko, da je število 416 razdelil na posamezne desetiške enote in tako zmnožil enice, desetice in stotice množenca z množiteljem posebej. Pri tem je opazno, da so desetiške enote izpostavljene in je vsekakor dober način računanja, pri katerem mestnovrednostni koncept ni zanemarjen.

Ta način množenja je predstavljen tudi v učbeniku Stičišče 5 (Strnad, M. in Štuklek, M., 2008), ki izstopa po različnih algoritmih pisnega množenja. Avtorici predstavita zgoraj opisani algoritem kot metodo škatle.

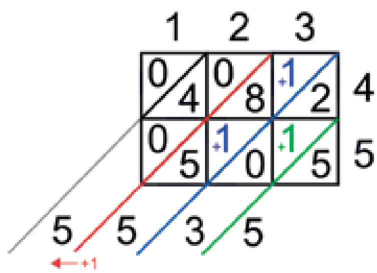
Slika 13: Metoda škatle.

Pri metodi škatle si pomagamo s prikazom stotiškega kvadrata, ki s pomočjo dveh barv ponazarja enice in desetice množitelja, s pomočjo prekinitve med krogci pa razdeli število, ki ponazarja množenca, na enice in desetice. Oba faktorja tako najprej razdelimo na vsoto desetiških enot, pomnožimo vse faktorje in delne zmnožke seštejemo (Strnad, M. in Štuklek, M., 2008, str. 121).

2.3.3 Mrežni algoritem

Mrežni algoritem je bil sprva razvit v Indiji že v 10. stoletju, nekje v 14. stoletju pa ga je Fibonacci predstavil v Evropi. Postopek je podoben klasičnemu algoritmu, vendar je razdeljen na manjše korake in veliko bolj pregleden (West, 2011).

Avtorica navaja, da je pri tem algoritmu zelo pomembno, da smo dosledni tako pri risanju grafičnega prikaza kot pri zapisu števil, da je slika jasna in pregledna. Sprva lahko algoritem izzove nekaj kritik, tj. da zanemarja mestnovrednostni koncept, vendar lahko na spodnji sliki vidimo, da prečne črte predstavljajo posamezne desetiške enote. Postopek sloni na treh korakih: *množenju*, *preoblikovanju* in *seštevanju*. Vsak korak je posebej izpostavljen, učenci pa ob uporabi razmišljajo o pomenu vsakega posameznega koraka in strukture (West, 2011).



Slika 14: Primer mrežnega algoritma za množenje 123 · 45.[1]

Postopek mrežnega algoritma je sledeč:

1. Narišemo pravokotnik, ki ima toliko vrst in toliko stolpcev, kot imata mest števili, ki ju množimo. Vsaka števka je v svoji vrsti/stolpcu.
2. V vsakem predalčku diagonalno od spodnjega levega k zgornjemu desnemu robu narišemo črto.
3. Nad vsak stolpec napišemo števke množenca, kot si sledjo. Na desno stran pravokotnika k vsaki vrstici pripišemo števke množitelja, od zgoraj navzdol, kot si sledijo v številu.
4. Vse števke nato zmnožimo med seboj in jih zapišemo na točno določena mesta, kjer v zgornji del kvadratka vnesemo **desetico**, v spodnjega pa **enico** množenja (v tem primeru 3 · 4 = 12, tako zapišemo 1 v zgornji del, 2 pa v spodnjega).
5. Ko vse števke zmnožimo, podaljšamo prečne črte med posameznimi desetiškimi enotami in seštejemo števila iz tabele, ki se nahajajo med posameznimi ločnimi črtami.
6. Seštevanje poteka od desne proti levi, pri čemer vrednosti desetice prenašamo naprej. V našem primeru pride do prenosa naprej pri seštevanju stotic (1 + 8 + 1 + 5 = 15). Tako dobimo 5 stotic in 1 tisočico, ki jo prištejemo k 4 tisočicam in tako v končnem rezultatu dobimo 5 tisočic.

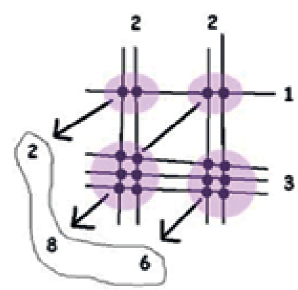
Končni rezultat preberemo od leve proti desni. 5 tisočic, 5 stotic, 3 desetice, 5 enic, kar pomeni število 5535.

Strnad in Štuklek (2008) ta algoritem predstavita kot pisno množenje *z Napierjevimi trakovi* (str. 124). Algoritem je povzet po matematiku Johnu Napierju, ki ga je predstavil že v 16. stoletju. Z Napierjevimi trakovi postopno množimo od desne proti levi, kot je prikazano na sliki 15. Enice zapišemo v spodnji trak, desetice pa v sosednega, poševno nad enicami. Postopek ponavljamo, na koncu pa števke iz posameznih trakov seštejemo.

2.3.4 Linijski algoritem

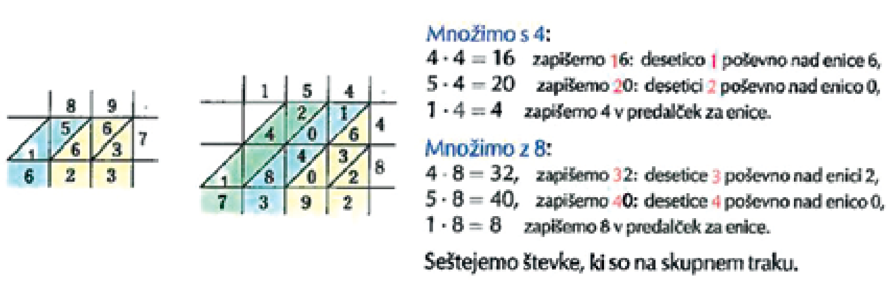
Algoritem poznamo po dveh imenih. Prvi je linijski algoritem, pri katerem so črte narisane vodoravno in navpično, drugo pa je japonski algoritem, pri katerem so črte narisane navpično. Linijski je bolj pregleden in zato učencem bolj uporaben. Kot algoritem s svojo grafično podobo omogoči vidno izboljšavo procesa množenja (West, 2011). Postopek je opisan na primeru množenja števil 22 · 13.

1. Navpično narišemo dvakrat po dve črti. Na levi črti predstavljata desetice, črti na desni pa enice množenca. Nato narišemo še po eno in tri črte vodoravno. Tako ena črta predstavlja desetice, tri črte pa enice množitelja.
2. Označimo, kje se črte sekajo. Zmnožek množenja dobimo tako, da vse preseke preštejemo in jih, kot je prikazano spodaj, seštejemo diagonalno.



Slika 16: Grafični prikaz linijskega algoritma. (West, 2011)

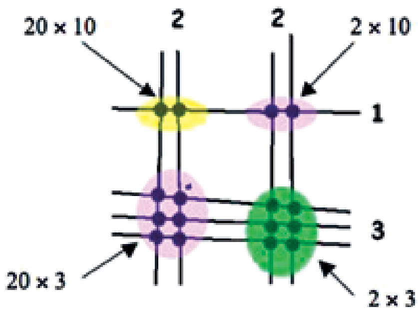
Pri linijskem algoritmu so desetiške enote podobno vidne kot pri mrežnem algoritmu, tj. diagonalno. V primeru, ko so posamezni seštevki večji od 10, pride do prenosa naprej. Presečišča torej tvorijo posamezno desetiško enoto in število točk v vsakem presečišču predstavlja zmnožek števila črt. Tako je lahko linijski algoritem podoben pravokotnemu, če pri posameznih presečiščih napišemo delne zmnožke, kot je prikazano na spodnji sliki. Kot pri pravokotnem modelu si lahko tudi tukaj pomagamo z zapi-



Slika 15: Pisno množenje z Napierjevimi trakovi.

1 Pridobljeno iz: https://osvojiznanje.weebly.com/matematika1/pregled-razlicnih-metod-mnozenja-dveh-vecmestnih-stevil?utm_content=buffer6a449&utm_medium=social&utm_source=facebook.com&utm_campaign=buffer, 17. 2. 2018.

som posameznih zmnožkov, ki nam logično pojasnijo presečišča črt, ki jih dobimo pri uporabi linijskega modela (West, 2011).



Slika 17: Linijski algoritem, s pomožnimi računi v stilu pravokotnega algoritma. (West, 2011)

Tako kot ostali algoritmi tudi linijski algoritem deluje po načelu distributivnosti, kar West (2011) dokaže z naslednjim izračunom:

$$
\begin{aligned}
22 \cdot 13 &= \\
&= (20 + 2) \cdot (10 + 3) \\
&= (20 \cdot 10) + (20 \cdot 3) + (2 \cdot 10) + (2 \cdot 3) \\
&= 200 + 60 + 20 + 6 \\
&= 200 + 80 + 6 \\
&= 286
\end{aligned}
$$

Zaključek

Mnogi avtorji se strinjajo, da alternativni algoritmi predvsem zmanjšujejo napake učencev in povečujejo uspešnost (Randolph in Sherman, 2001). Nekateri algoritmi so lahko učitelju tudi pripomoček, s katerim ugotovi, kateri koraki množenja učencem povzročajo težave (npr. mrežni algoritem). Pri tem algoritmu učenci sprva števila samo množijo, v drugem koraku pa seštevajo delne zmnožke in jih urejajo glede na desetiške enote; pri učencih ne prihaja do večje zmede. Prav tako pa omenjeni algoritmi izboljšajo predstavo o desetiških enotah (predvsem pravokotni algoritem).

Pri algoritmih je torej ključnega pomena, da učitelj premisli o primernosti uporabe. Učenci morajo imeti razvite določene predispozicije, da lahko algoritem uporabljajo. Še pomembneje pa je, da učitelj uporabi algoritem, ki ga sam zelo dobro pozna – tako njegov postopek kot način, po katerem deluje. Učencem lahko pomaga le tako, da mu algoritem primerno predstavi, da ta učencu omogoči kognitivno manj zahtevne procese, ki so razumljivejši in v pomoč pri pisnem množenju.

Literatura

Bajramović, N., Repnik, A., Kociper, M., Cigula, S., Slana Mesarič, M. in Visočnik, D. (2014). *Matematika 5*, i-učbenik za matematiko v 5. razredu osnovne šole, 261. Dostopno na: http://eucbeniki.sio.si/mat5/721/index2.html. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.

Fuson, K. (2003). Toward Computational Fluency in Multidigit Multiplication and Division. *Teaching Children Mathematics*, 300–305.

Japelj Pavešić, B. (2012). *Matematične naloge raziskave TIMSS: mednarodna raziskava trendov znanja matematike in naravoslovja*. Ljubljana: Pedagoški inštitut.

Jazby, D. in Pearn, C. (2015). *Using Alternative Multiplication Algorithms to 'Offload' Cognition.* The 38th annual conference of the Mathematics Education Research of Australasia, 309–316. Sunshine Coast.

Kopasić, M. (2014) *Radovednih pet, učbenik za matematiko v 4. razredu osnovne šole.* Ljubljana: Rokus Klett.

Kopasić, M. (2016) *Radovednih pet, učbenik za matematiko v 5. razredu osnovne šole*. Ljubljana: Rokus Klett.

Močnik, F. (1914). *Računica za obče ljudske šole*, izdaja v treh delih, Faksimile s spremno besedo. Ljubljana: Jutro.

Pregled različnih metod množenja dveh večmestnih števil (21. november 2017). Pridobljeno 2018 iz Osvoji znanje: https://osvojiznanje.weebly.com/matematika1/pregled-razlicnih-metod-mnozenja-dveh-vecmestnih-stevil?utm_content=buffer6a449&utm_medium=social&utm_source=facebook.com&utm_campaign=buffer.

Randolph, T. in Sherman, H. (2001). Alternative Algorithms: Increasing Options, Reducing Errors. *Teaching Children Mathematics*, 480–484.

Strnad, M. in Štuklek, M. (2008). *Stičišče 5,* učbenik za matematiko v 5. razredu osnovne šole. Ljubljana: Debora.

Van de Walle, J. (2005). *Do We Really Want to Keep the Traditional Algorithms for Whole Numbers*? Draft version – avtorske pravice John Van de Walle.

West, L. (2011). *An Introduction to Varios Multiplication Strategies.* Bellevue, Nebraska.

Žakelj, A. (2011). *Matematika, učni načrt*. Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.

Žakelj, A., Prinčič Röhler, A., Perat, Z., Lipovec, A., Vršič, V., Repovž, B. in Bregar Umek, Z. (2011). *Matematika, učni načrt*. Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo.

Uporaba in osmišljanje matematičnih vsebin v luči kompleksnosti: trije primeri prepogibanja papirja

mag. Mojca Suban
Zavod RS za šolstvo

Izvleček

Učenje in poučevanje matematike v velikem delu temelji na razumevanju in osmišljanju matematičnih vsebin, ki se jih učenci in dijaki učijo. Proces izgrajevanja razumevanja je dolgoročen in kompleksen, učinkovito pa ga lahko regulira učitelj s premišljeno pripravo nalog in dejavnosti v podporo izgradnji in uporabi matematičnih pojmov in konceptov. Rutar Ilc (Rutar Ilc v Suban Ambrož 2012) navaja, da učenje z razumevanjem »poteka s pomočjo miselnih aktivnosti, s katerimi gradimo odnos in povezave med dejstvom in idejami ter ustvarjamo mentalne modele«. Za matematiko je vzpostavljanje odnosov in povezav med matematičnimi pojmi in koncepti zelo pomembno, saj je narava matematičnega znanja kumulativna. Z uporabo različnih reprezentacij, aktivacijo notranjih povezav med pojmi, povezovanju z drugimi področji, aktivnostjo dijakov lahko vzpodbujamo razumevanje in omogočimo osmišljeno uporabo matematičnega znanja. Reševanje problemskih nalog, ki jih dijak rešuje na različne načine (npr. s konkretnimi pripomočki, s tehnologijo, analitično), je lahko učinkovit način za razvijanje razumevanja matematičnih vsebin in njihovo uporabo. Predstavljamo tri primere nalog s prepogibanjem papirja, ki omogočajo uporabo matematičnega znanja in preverjanje ter razvijanje razumevanja nekaterih pojmov iz geometrije.

Ključne besede: razumevanje matematičnih pojmov in konceptov, uporaba matematičnega znanja, različne reprezentacije

Using and Making Sense of Mathematical Content in the Light of Complexity: Three Paper Folding Examples

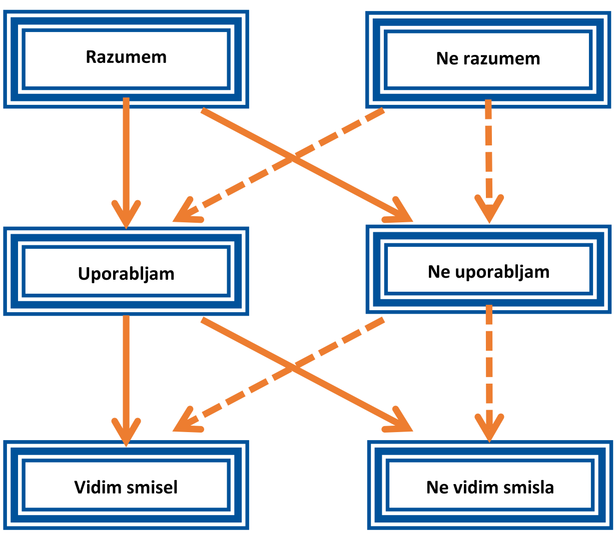
Abstract

Learning and teaching mathematics is based to a large extent on the understanding and making sense of mathematical content taught to primary and secondary school students. The process of developing this understanding is complex and takes time, while it can be effectively regulated by the teacher with a well-thought-out preparation of tasks and activities that supports the building and use of mathematical notions and concepts. Rutar Ilc (Rutar Ilc in Suban Ambrož 2012) states that learning by understanding is a process that »uses mental activities that help build the relationships and connections between facts and ideas, creating mental models.« Establishing relationships and connections between mathematical notions and concepts is very important in mathematics due to the cumulative nature of mathematical knowledge. Using various representations, activating inner connections between the concepts, linking other areas and engaging students can contribute to the understanding and logical use of mathematical knowledge. Various ways of problem solving (e.g. using practical tools, technology or analytics) can be an effective method to develop the understanding and use of mathematical content. The article introduces three paper folding examples as ways of using mathematical knowledge as well as testing and developing the understanding of certain geometric concepts.

Keywords: understanding mathematical notions and concepts, use of mathematical knowledge, various representations

Učenje in poučevanje matematike je tesno povezano s pojmi, kot so razumevanje, uporaba in osmišljanje matematičnih vsebin. Eden izmed ciljev pouka matematike, ki ga zasledujejo učitelji matematike (če ne kar osrednji), je, da bi dijaki razumeli, kaj se učijo in tudi zakaj se to učijo.

Šolska praksa kaže, da vzročno-posledične zveze med »*Razumem/Ne razumem*«, »*Uporabljam/Ne uporabljam*« in »*Vidim smisel/Ne vidim smisla*« optimalno delujejo v situaciji *Razumem → Uporabljam → Vidim smisel*. V fazi uporabe gre pričakovati, da dijak usvojene koncepte uporablja učinkovito in kritično. Shema 1 ponuja še druge situacije, od katerih šolska praksa zaznava tudi *Ne razumem → Uporabljam → ?*.

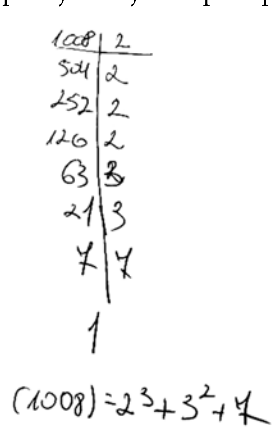


Shema 1: Vzročno-posledične zveze pri učenju matematike

Poenostavljeno rečeno gre v takih primerih lahko za uporabo rutinskih postopkov, ki jih dijak ne razume, pa vendarle izvaja, njegovo izvajanje pa je nekritično. Uporaba je tako dostikrat neučinkovita in je povezana tudi z vidikom motivacije za učenje. Oglejmo si naslednji primer.

> **Primer**
>
> Število 1008 zapiši kot produkt praštevil.

Razcep na prafaktorje števila 1008 je dijak izvedel po znanem in precej razširjenem postopku z navpično črto (Slika 1), vendar pa se je pri zapisu števila 1008 pokazalo, da postopka najverjetneje ne razume dobro, saj je potence praštevil seštel, kljub eksplicitnemu navodilu zapiši kot **produkt** praštevil. Lahko bi sklepali, da dijak ne razume, da je končni zapis števila kot produkta praštevil le uporaba dejstva, da sta množenje in deljenje nasprotni operaciji in da po izvedenih zaporednih deljenjih v shemi to uporabimo za zapis števila.



Slika 1: Reševanje dijaka.

Za poučevanje in učenje matematike je tako pomembno, da se fokus na razumevanju ohranja v vseh fazah učnega procesa in da se stopnja razumevanja pri dijakih tudi spremlja in preverja. Rutar Ilc (Rutar Ilc v Suban Ambrož, 2012) učenje z razumevanjem opredeli kot »izgrajevanje znanja s podeljevanjem pomena: poteka s pomočjo miselnih aktivnosti, s katerimi gradimo odnos in povezave med dejstvi in idejami ter ustvarjamo mentalne modele.«

Z vidika izvedbene perspektive razumevanja »pomeni neko temo razumeti, ko znaš to izkazati na različne, miselno zahtevne načine, kot denimo, da znaš razložiti, zbrati dokaze, se domisliti primerov, posplošiti, koncepte uporabiti v praksi, predočiti nove načine in podobno« (Perkins, 1993). K razvijanju in izkazovanju razumevanja pozitivno prispeva raba različnih reprezentacij, aktivacija notranjih povezav pri matematiki, povezovanje z drugimi področji in vzpodbujanje aktivnosti dijakov. Proces izgrajevanja razumevanja, ki je predpogoj za učinkovito uporabo matematičnega znanja in osmišljanja naučenega, je dolgoročen. S premišljeno pripravo nalog in dejavnosti ga regulira učitelj, skupaj z dijaki pa dopolnjuje, nadgrajuje in spremlja.

V nadaljevanju so predstavljeni trije primeri problemskih nalog prepogibanja papirja, kjer imajo dijaki možnost, da uporabijo svoje matematično znanje, prav tako pa lahko sami in njihov učitelj preverijo stopnjo razumevanja že obravnavanih vsebin.

1. Prepogibanje papirnatega modela kvadrata

> **Navodilo**
>
> Kvadraten list papirja prepogni po diagonali in ga razgrni v ravnino. Eno od stranic kvadrata prepogni do diagonale in papir spet razgrni v ravnino. Kolikšen del lista predstavlja pravokotni trikotnik, ki nastane na ta način?

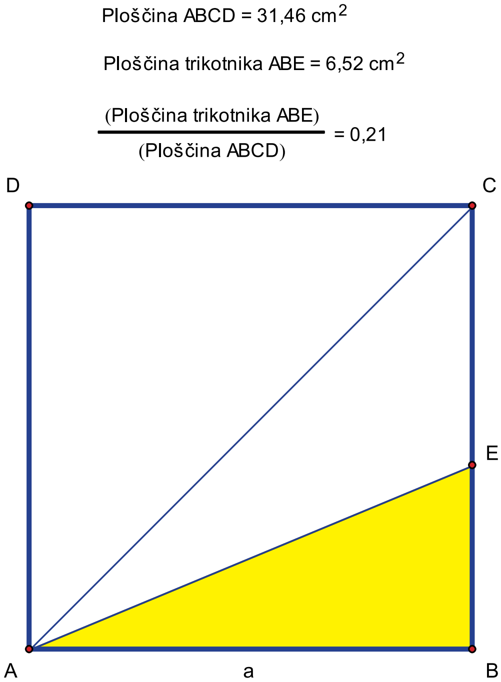
Faze pred reševanjem

- Dijak izvede konkretno dejavnost prepogibanja papirja. Papir razgrne v ravnino, opazuje nastale pregibe ter ugotavlja odnose med nastalimi liki in koti: katere dolžine so enake, kateri koti so skladni, koliko merijo posamezni koti.
- V zvezek nariše skico kvadratnega kosa papirja s pregibi (po razgrnitvi v ravnino).
- Dijak nariše sliko kvadratnega kosa papirja s podporo programov dinamične geometrije.

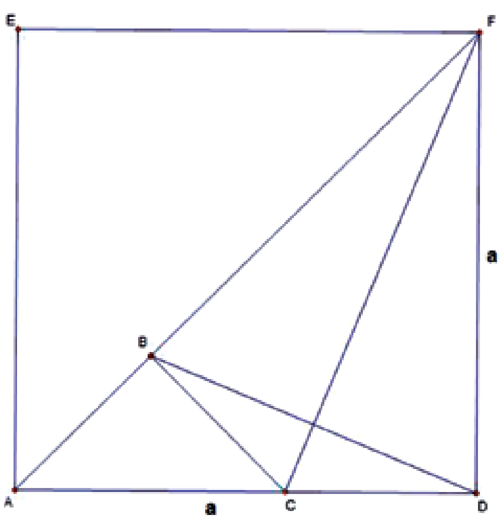
Dijaki naj najprej pridobijo konkretno izkušnjo s prepogibanjem papirja. Vnaprej naj ocenijo, kolikšen je delež papirja, ki ga zavzema trikotnik. Nalogo je glede na predznanje dijakov možno rešiti na več načinov.

Reševanje s tehnologijo

S programom GeoGebra izdelamo predlogo, kjer spreminjamo dolžino stranice kvadrata in opazujemo količnik med ploščinama trikotnika in kvadrata. Predloga **Kvadrat** v GeoGebri je na spletni strani revije: https://www.zrss.si/strokovne-resitve/revije/matematika-v-soli.



Reševanje brez uporabe kotnih funkcij



Zaradi načina konstruiranja je:

$|CD| = |CB|, \sphericalangle FBC = \sphericalangle CDF = 90°.$

Trikotnik je enakokrak, saj je:

$\sphericalangle FAD = 45°, \sphericalangle ACB = 90° - \sphericalangle FAD = 45°.$

Od tod:

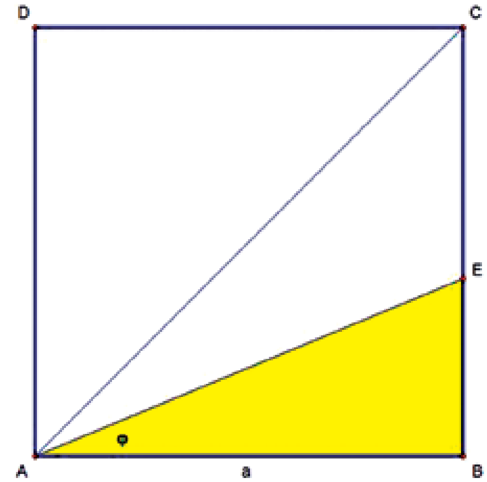
$|CD| = |BC| = |AB| = a\sqrt{2} - a.$

Naj bo S ploščina kvadrata $ABCD$, S_1 pa ploščina trikotnika CDF.

$$\frac{S_1}{S} = \frac{a \cdot |CD|}{2a^2} = \frac{a^2(\sqrt{2}-1)}{2a^2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

Dobljeni rezultat naj dijaki primerjajo s svojo napovedjo in ugotavljajo vzroke za morebitna odstopanja.

Reševanje z uporabo kotnih funkcij



$$\tan\alpha = \frac{|BE|}{a} \Longrightarrow |BE| = a \cdot \tan 22{,}5°$$

$$\tan 22{,}5° = \tan\frac{45°}{2} = \frac{\sin 45°}{1+\cos 45°} = \sqrt{2} - 1$$

$$|BE| = a\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

Naj bo S ploščina kvadrata $ABCD$, S_1 pa ploščina trikotnika ABE.

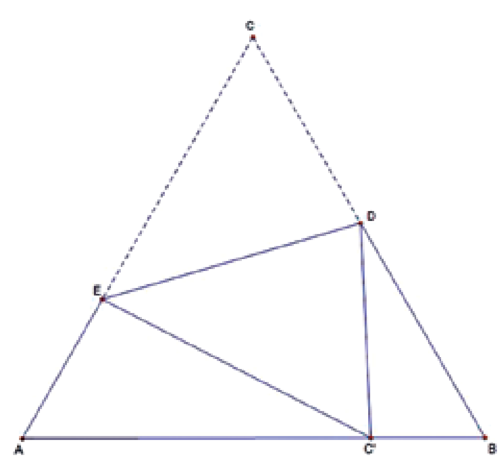
$$\frac{S_1}{S} = \frac{a \cdot |BE|}{2a^2} = \frac{a^2\left(\sqrt{2}-1\right)}{2a^2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

2. Prepogibanje papirnatega modela enakostraničnega trikotnika

Navodilo

Papirnati enakostranični trikotnik prepogni tako, da točka C 'pade' na daljico AB in dobljeno točko imenuj C'. Postopek ponovi. Razišči, kaj se spreminja pri različnih legah točke C'. Eno izmed količin, ki se spreminjajo, podrobneje razišči.

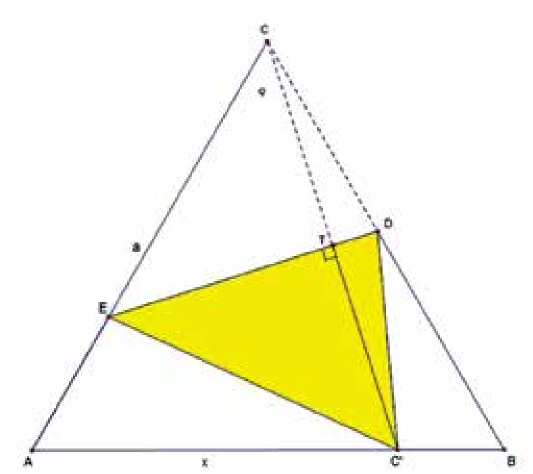
Predloga **Enakostranični trikotnik** v GeoGebri je na spletni strani revije: https://www.zrss.si/strokovne-resitve/revije/matematika-v-soli.



Pri različnih položajih točke C' na daljici AB se spreminjajo ploščine trikotnikov EDC', $AC'E$, $C'BD$, EDC, obsegi teh trikotnikov, dolžine daljic AC', $C'B$, BD, DC, AE, EC, ED, $C'D$, $C'E$.

Raziščimo, kako se spreminja dolžina daljice AE, ko točka C' potuje po daljici AB.

Dolžino daljice AC' označimo z x, pri čemer je $0 \leq x \leq a$.



V trikotniku $AC'C$ zapišemo kosinusni izrek za izračun dolžine CC':

$$|CC'| = a^2 + x^2 - 2ax \cdot \cos 60°$$

$$|CC'| = \sqrt{a^2 + x^2 - ax}\ .$$

Trikotnik ETC je pravokoten, uporabimo kotno funkcijo kosinus za kot $\varphi = \sphericalangle ECT$:

$$\cos \varphi = \frac{|CT|}{|EC|}$$

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{a^2 + x^2 - ax}}{2 \cdot |EC|}.$$

V trikotniku $AC'C$ zapišemo kosinusni izrek za kot φ in poenostavimo:

$$\cos \varphi = \frac{2a - x}{2\sqrt{a^2 + x^2 - ax}}.$$

Po izenačitvi izrazov na desni strani dobimo:

$$|EC| = \frac{a^2 + x^2 - bx}{2a - x}.$$

Oziroma

$$|AE| = a - |EC| = \frac{-x^2 - x + ax - a^2 + 2a}{2a - x}.$$

Za $a = 1$ dobimo:

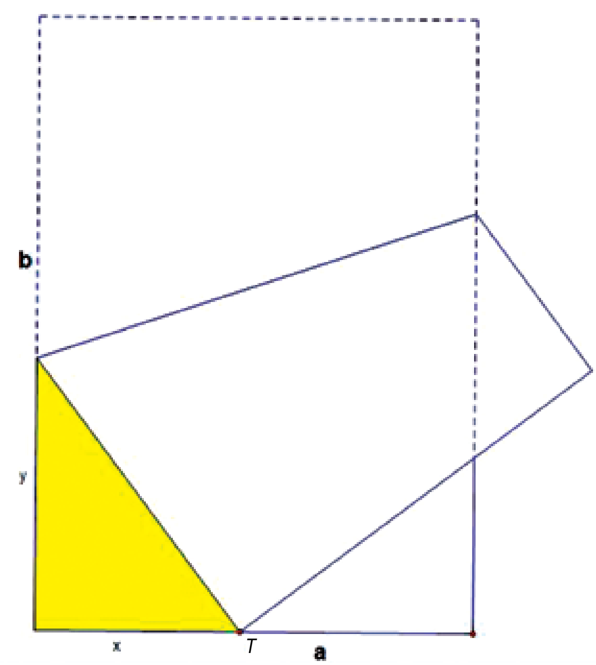
$$|AE| = \frac{x^2 - 1}{x - 2}.$$

3. Prepogibanje papirnatega modela pravokotnika

Navodilo

Pravokoten list papirja prepogni, kot kaže slika. Razišči, kako se spreminja ploščina osenčenega pravokotnega trikotnika, ko točka T potuje po stranici a.

Ideja primera je v *Zbirki situacij za ustni del poklicne mature iz matematike* (2011) razdelana kot situacija za ustni del poklicne mature. Predloga **Pravokotnik** v GeoGebri je na spletni strani revije: https://www.zrss.si/strokovne-resitve/revije/matematika-v-soli.



Velja, da je $0 \leq x \leq a$ in $0 \leq y \leq b$. V osenčenem trikotniku zapišemo Pitagorov izrek:

$$x^2 + y^2 = (b - y)^2 \rightarrow$$

$$y = \frac{b^2 - x^2}{2b}$$

$$S = \frac{xy}{2} = \frac{-x^3 + b^2 x}{4b}.$$

Pri kateri vrednosti spremenljivke je ploščina največja?

$$S' = \frac{-3x^2 + b^2}{4b}$$

$$S' = 0$$

$$x = \frac{b\sqrt{3}}{3}$$

Zaključek

Pri uspešnem učenju matematike je nujno razumevanje matematičnih pojmov, konceptov in postopkov. Učitelj lahko ustvarja primerno okolje za razvijanje in izkazovanje razumevanja s sistematično in premišljeno izbiro različnih dejavnosti, ki omogočajo, da dijak razmišlja v sebi ustreznem učnem okolju. Prikazani primeri s prepogibanjem papirja omogočajo dijakom izbiro med reprezentacijami, od konkretnih preko dinamičnih do formalno analitičnih, kar lahko pripomore k boljšemu razumevanju z vidika njihovega predznanja in motivacije. K temu prispeva tudi aktivacija notranjih povezav pri matematiki oz. povezovanje različnih matematičnih vsebin (npr. geometrije in algebre). Poudariti pa je treba še aktivno vlogo dijaka, ki z lastno konkretno in miselno dejavnostjo tke svojo mrežo znanja.

Viri

Perkins, D. (2012). Poučevanje za razumevanje. *Vzgoja in izobraževanje*, *18*(5), 15–23. Prevedla dr. Sonja Sentočnik. Prevod prispevka: Perkins, D. (1993). Teaching for understanding. V *American Educator: The professional Journal of the American Federation of Teachers*, *17*(3), 28–35.

Suban Ambrož, M. (2011). Spremembe in novosti na poklicni maturi iz matematike. V *Matematika v šoli*, *XVII*(1-2).

Suban Ambrož, M. (2012). *Razumevanje pri poučevanju in učenju matematičnih vsebin*. V A. Žakelj in M. Borstner (ur.) Zbornik posveta *Razvijanje in vrednotenje znanja*. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo. Pridobljeno s http://www.zrss.si/pdf/razvijanje-vrednotenje-znanja-2012.pdf

Nekaj dokazov Talesovega izreka

Anto Franjić, Dina Kamber Hanzić, Zenan Šabanac
Univerza v Sarajevu, Oddelek za matematiko, Sarajevo, Bosna in Hercegovina
Univerzitet u Sarajevu, Odsjek za matematiku, Zmaja od Bosne 33-35, 71000 Sarajevo, Bosna i Hercegovina

Izvleček

V članku predstavimo več različnih dokazov Talesovega izreka o obodnem kotu nad premerom krožnice. Predstavimo uporabo omenjenega izreka pri nalogah na matematičnih tekmovanjih v Sloveniji in na Hrvaškem.

Ključne besede: Talesov izrek, pravi kot, premer, tekmovalne naloge

Some of the Evidence of Thales' Theorem

Abstract

This article introduces some of the different evidence of Thales' Theorem defining an angle inscribed in a semicircle over a diameter. The use of the theorem is presented based on the solutions of tasks from mathematics competitions in Slovenia and Croatia.

Keywords: Thales' Theorem, right angle, diameter, competition tasks

O Talesu iz Mileta in nekaj izrekov iz geometrije

Tales iz Mileta (624 pr. n. št.–547 pr. n. št.) je kot prvi znani grški filozof, matematik in astronom napovedal Sončev mrk, ki se je zgodil na Bližnjem vzhodu 28. maja 585 pr. n. št. (v. [1, str. 29] in [3, str. 137]. Talesa uvrščamo med sedem legendarnih grških modrecev, bil je prvi filozof, ki si je prislužil ta naziv.

Talesovo ime povezujemo z nekaterimi izreki iz geometrije:
1. Krog je z vsakim svojim premerom razdeljen na dva ploščinsko enaka dela.
2. Kota ob osnovnici enakokrakega trikotnika sta skladna.
3. Dva para kotov med dvema premicama, ki se sekata, sta skladna.
4. Dva trikotnika sta skladna, če imata skladno stranico in skladna oba para priležnih kotov.
5. Obodni kot nad premerom krožnice je pravi kot.

Predvidevamo, da so bili vsi ti izreki Egipčanom in Babiloncem poznani že od prej, vendar je bil Tales prvi, ki jih je dokazal (več podrobnosti si lahko preberete v [3, str. 130–137]). Izreki (1)–(4) so navedeni in opisani v prvem delu Evklidovih *Elementov*, izrek (5), ki se imenuje Talesov izrek, pa je naveden v tretjem delu Evklidovih *Elementov* kot trditev 31. Evklidovi *Elementi* so matematična razprava o elementarni matematiki, sestavljena iz 13 knjig, ki jih pripisujemo starogrškemu matematiku Evklidu iz 3. stoletja pr. n. št. Gre za nabor definicij, postulatov, trditev in matematičnih dokazov trditev iz elementarne geometrije, teorije števil in algebre.

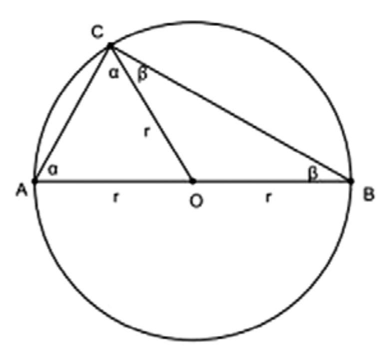
Talesov izrek

Talesov izrek o kotu nad premerom krožnice pravi:

Izrek 1. Naj bo daljica AB premer krožnice in C poljubna točka na krožnici različna od A in B, potem je $\sphericalangle ACB$ pravi kot.

Predstavili bomo različne dokaze Talesovega izreka.

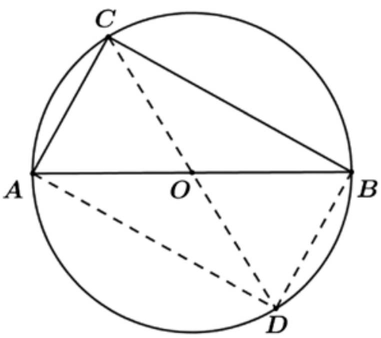
Dokaz 1. Naj bo O središče krožnice s premerom $|AB|$ (Slika 1). Naj bo $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$ ter $\sphericalangle ACB = \gamma$. Ker je trikotnik ΔAOC enakokrak ($|AO| = |CO| = r$) z osnovnico AC, je kot $\sphericalangle ACO = \alpha$. Ker je trikotnik ΔBOC enakokrak ($|OB| = |OC| = r$) z osnovnico BC, je kot $\sphericalangle BCO = \beta$. Iz tega sledi, da je $\gamma = \sphericalangle ACB = \sphericalangle ACO + \sphericalangle OCB = \alpha + \beta$. Iz enakosti $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ sledi $2 \cdot \gamma = 180°$. Dobimo $\gamma = 90°$.



Slika 1

V naslednjem dokazu uporabimo zrcaljenje čez točko.

Dokaz 2. Dan naj bo trikotnik ΔABC, ki mu je očrtana krožnica, tako da je daljica AB premer te krožnice (Slika 2). Točka O naj bo središče te krožnice.



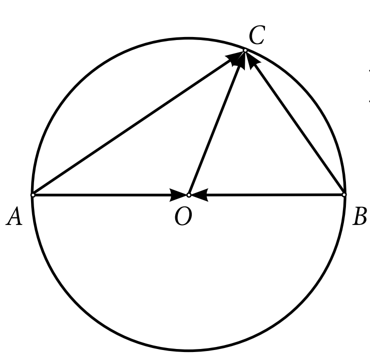
Slika 2

Prezrcalimo točko C čez središče krožnice O. Tako dobljeno točko označimo z D. Ker je zrcaljenje čez točko izometrija, pomeni, da ohranja razdaljo, pri čemer točka D pripada krožnici, daljica CD pa je njen premer. Vse točke na premici AC se pri zrcaljenju čez točko O preslikajo v točke premice BD, ki je vzporedna prvotni premici. Zato sta daljici AC in BD vzporedni ter enako CB in AD. Tako ima štirikotnik $ADBC$ dva para vzporednih stranic, kar pomeni, da je paralelogram. Daljici CD ter AB sta diagonali tega paralelograma. Ker sta diagonali premera iste krožnice, sta enako dolgi. Tako je štirikotnik $ADBC$ paralelogram z enako dolgima diagonalama, torej je štirikotnik $ADBC$ pravokotnik. Ker je v pravokotniku vsak notranji kot pravi, je tudi kot $\sphericalangle ACB$ pravi kot. ■

Oba dokaza sta klasična dokaza, ki ju lahko najdemo v učbenikih matematike za učence osnovnih in srednjih šol, kakor tudi v knjigah o evklidski geometriji, namenjenih študentom. V njih smo uporabljali razlago, ki temelji na aksiomih in trditvah, s pomočjo katerih se izvajajo in dokazujejo nove trditve ter na način kot je izpostavljen v Evklidovih *Elementih* pred več kot 2000 leti.

V 17. stoletju je francoski filozof in matematik Rene Descartes (1596–1650) uvedel pojem *koordinate točke* kot enega od načinov opisovanja lege točke v prostoru, kar je privedlo do ideje uporabe enačb za opisovanje črt in krivulj. Na ta način so se odprla vrata k uporabi algebre in algebrskih metod (analitična geometrija, vektorji, matrike, kompleksna števila, algebrske strukture in podobno) v dokazovanju trditev iz geometrije. V dokazih, ki sledijo, bomo uporabili nekatere algebrske pristope, ki so navedeni zgoraj.

Dokažimo Talesov izrek z uporabo lastnosti vektorjev.



Dokaz 3. Iz slike 3 sledi: daljica AB je premer krožnice, O je središče krožnice, C je poljubna točka na krožnici različna od A in B.

Slika 3

Zapišimo skalarni produkt vektorjev $\overrightarrow{AC}$ in $\overrightarrow{BC}$. Zaradi trikotniškega pravila dobimo:

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}\right) =$$
$$= \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OC}.$$

Ker sta vektorja $\overrightarrow{AO}$ in $\overrightarrow{BO}$ nasprotna, dobimo:

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AO}+\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}\right)\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OC}.$$

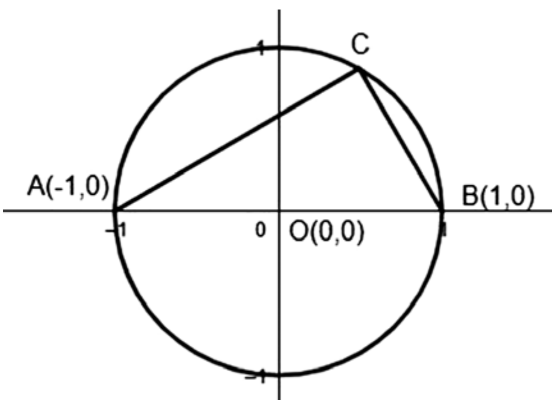
Ker sta $\overrightarrow{AO}$ in $\overrightarrow{BO}$ nasprotna vektorja, velja $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}=\vec{0}$. Od tod sledi

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} = -\left|\overrightarrow{AO}\right|^2+\left|\overrightarrow{OC}\right|^2.$$

Ker vektorja $\overrightarrow{AO}$ in $\overrightarrow{OC}$ določata polmera dane krožnice, sta njuni dolžini enaki $\left|\overrightarrow{AO}\right| = \left|\overrightarrow{OC}\right|$. Dobimo, da je $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$, iz česar sledi, da sta vektorja $\overrightarrow{AC}$ in $\overrightarrow{BC}$ pravokotna (dva ne-ničelna vektorja sta pravokotna, če je njun skalarni produkt enak 0). ■

Sedaj bomo dokazali Talesov izrek z uporabo analitične geometrije in trigonometrije.

Dokaz 4. Postavimo središče krožnice O v izhodišče koordinatnega sistema, tako da bo daljica AB premer krožnice.



Slika 4

Brez izgube splošnosti lahko predpostavimo, da sta koordinati točk A in B, A (-1, 0) in B (1, 0). Naj bo točka C poljubna točka krožnice, ki je različna od točk A in B. Točka C ima koordinate $C(\cos t, \sin t)$. Pokazali bomo, da je trikotnik ΔABC pravokotni. Dokazali bomo, da sta premici, na katerih ležita daljici AC in BC, pravokotni. To pomeni, da je produkt njunih smernih koeficientov enak -1.

Najprej bomo izračunali smerna koeficienta premic, na katerih ležita daljici AC in BC.

$$k_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{\sin t}{\cos t + 1}$$

in

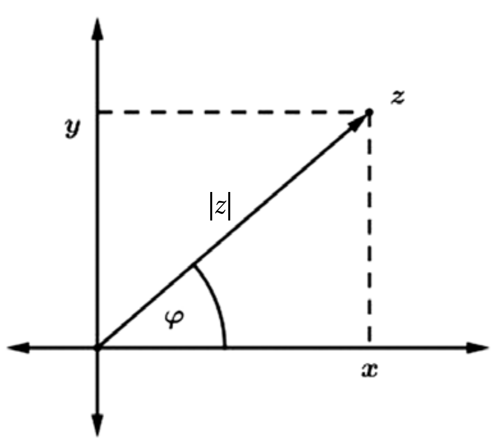
$$k_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{\sin t}{\cos t - 1}.$$

Dobimo

$$k_{AC} \cdot k_{BC} = \frac{\sin t}{\cos t + 1} \cdot \frac{\sin t}{\cos t - 1} = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t - 1} = \frac{\sin^2 t}{-\sin^2 t} = -1.$$

V predzadnjem koraku smo uporabili znano trigonometrijsko enakost $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$. ■

Preden podamo dokaz Talesovega izreka z uporabo kompleksnih števil, bomo na kratko navedli lastnosti kompleksnih števil, ki jih bomo uporabili v dokazu. Iz srednje šole nam je znano, da $z = x + iy$ predstavlja algebrski zapis kompleksnega števila, pri čemer je x realni del, y pa imaginarni del kompleksnega števila z. Z oznako $\overline{z}$ označujemo konjugirano kompleksno število števila z, to je število $\overline{z} = x - iy$. Absolutna vrednost kompleksnega števila z se definira z $\sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ ter jo označimo z $|z|$. Vsako kompleksno število določa ustrezni par realnih števil (x, y), kar nam omogoča, da ga prestavimo kot točko v ravnini, v kateri je vpeljan Descartov pravokotni koordinatni sistem. Os x imenujemo realna os, os y pa imaginarna os, ravnino pa imenujemo kompleksna ravnina. Nadalje vsaki točki (x, y) ravnine ustreza vektor, katerega predstavnik je usmerjena dolžina z začetkom v izhodišču koordinatnega sistema in koncem v točki (x, y). Poltrak z izhodiščem v točki $(0, 0)$, ki vsebuje izbrano točko (x, y), določa s pozitivnim delom realne osi kot, ki ga imenujemo argument kompleksnega števila in ga označujemo z $\arg(z) = \varphi$. Na tak način definiran argument za dano kompleksno število z ni enolično določen. Če je $\arg(z) = \varphi$, je tudi $\varphi + 2k\pi$ za vsak $k \in \mathbb{Z}$ prav tako argument števila z. Enoličnost dobimo s postavljanjem meje, da je $\arg(z) \in (-\pi, \pi]$. Pri tem lahko opazimo, da absolutna vrednost kompleksnega števila z enaka oddaljenosti njemu pripadajoče točke od koordinatnega izhodišča, oziroma dolžini njemu pripadajočega vektorja. Iz tega sledi, da je vsako kompleksno število $z \neq 0$ enolično določeno z absolutno vrednostjo in argumentom (Slika 5).



Slika 5

Sedaj pokažimo, kako z uporabo argumenta kompleksnega števila v kompleksni ravnini dobimo velikost kota, določenega s tremi točkami. Naj bodo $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$, $c = c_1 + ic_2$ tri točke v kompleksni ravnini, ki predstavljajo tri zaporedne točke A, B in C (Slika 6).

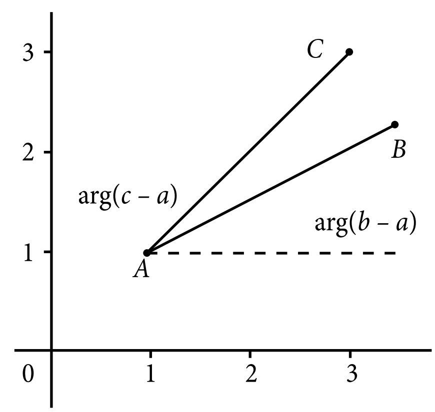
Glede na [10, str. 30] je velikost kota $\sphericalangle BAC$ enaka

$$\sphericalangle BAC = arg(c-a) - arg(b-a) = arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right).$$

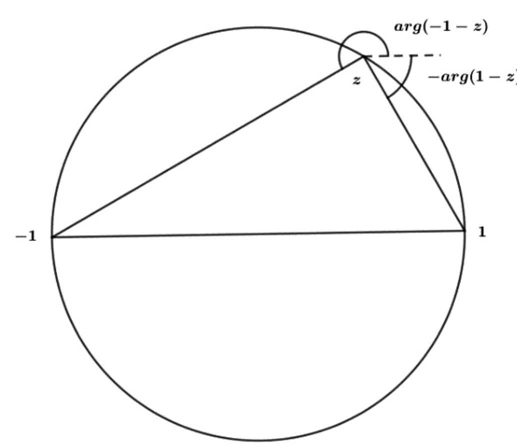
Zadnja enakost izhaja iz lastnosti kompleksnih števil, ki pravi, da če je $z, w \in \mathbb{C}$ in $z, w \neq 0$, potem je $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w)$, kjer moramo enakost v splošnem primeru obravnavati po modulu 2π (glej [8, str. 10–11]).

Dokažimo sedaj Talesov izrek o pravem kotu nad premerom krožnice z uporabo kompleksnih števil.

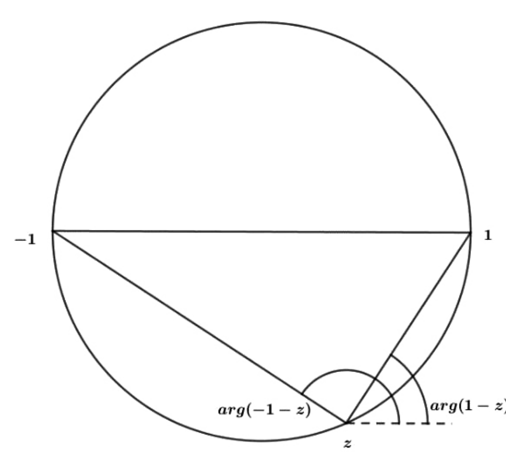
Dokaz 5. [2, str. 37] Brez izgube splošnosti lahko koordinate v ravnini izberemo tako, da ima krožnica premer 1 s središčem v izhodišču koordinatnega sistema, tako točki (1,0) in (–1,0) ležita na krožnici. Vzemimo poljubno točko z na dani krožnici v kompleksni ravnini.



Slika 6



Slika 7a



Slika 7b

V primeru, da točka z leži na krožnici nad premerom (slika 7a), moramo dokazati, da velja

$$arg(-1-z) - arg(1-z) = -\frac{\pi}{2},$$

V primeru, da točka z leži na krožnici pod premerom (slika 7b), moramo dokazati, da velja

$$arg(-1-z) - arg(1-z) = \frac{\pi}{2}.$$

Z uporabo lastnosti $\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w)$, vidimo, da moramo pravzaprav dokazati, da je

$$arg\left(\frac{-1-z}{1-z}\right) = \pm\frac{\pi}{2},$$

Dokazati moramo, da kompleksno število $\frac{-1-z}{1-z}$ leži na imaginarni osi. To pomeni, da je njegov realni del enak 0. Kompleksno število je torej čisto imaginarno, natanko tedaj ko je

$z = -\overline{z}$. [8, str. 8]. Zato je treba dokazati, da velja

$$\left(\frac{-1-z}{1-z}\right) = -\overline{\left(\frac{-1-z}{1-z}\right)} \Leftrightarrow \left(\frac{-1-z}{1-z}\right) = -\left(\frac{\overline{-1-z}}{\overline{1-z}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{-1-z}{1-z}\right) = -\left(\frac{-1-\overline{z}}{1-\overline{z}}\right) \Leftrightarrow \frac{-1-z}{1-z} = \frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}}.$$

Dobimo

$$(-1-z)\cdot(1-\overline{z}) = (1+\overline{z})\cdot(1-z)$$
$$\Leftrightarrow -1+\overline{z}-z+z\cdot\overline{z} = 1-z+\overline{z}-z\cdot\overline{z}$$

Po urejanju zadnje enakosti dobimo $z\cdot\overline{z} = 1$. Za absolutno vrednost kompleksnega števila velja $|z|^2 = z\cdot z$. Sledi, da moramo dokazati, da je $|z| = 1$. Ker smo točko z izbrali tako, da le-ta pripada enotski krožnici, velja $|z| = 1$. Zaradi zaporedja enakosti velja, da je $\frac{-1-z}{1-z}$ čisto imaginarno število, zaradi česar je kot pravi. ■

Opomba 1.: Iz dokaza 5 vidimo, da pravzaprav velja tudi obrat Talesovega izreka: Če je v trikotniku ABC kot $\sphericalangle ACB$ pravi, tedaj je daljica AB premer očrtane krožnice tega trikotnika.

Opomba 2.: Sedaj lahko Talesov izrek in obrat Talesovega izreka formuliramo na sledeči način: Trikotnik je pravokoten natanko tedaj, ko je njegova najdaljša stranica premer trikotniku očrtane krožnice.

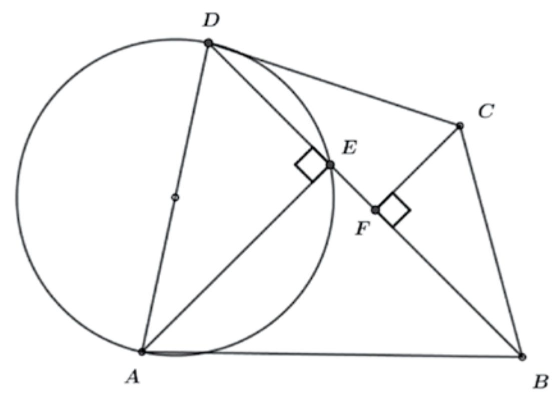
Uporaba Talesovega izreka v različnih nalogah

Navajamo nekaj primerov iz matematičnih tekmovanj v Republiki Hrvaški in Republiki Sloveniji, ki jih rešimo z uporabo Talesovega izreka ali njegovega obrata.

Naloga 1

[9, str. 141]. Dan je konveksni štirikotnik *ABCD*. Dokaži, da poljubna točka tega štirikotnika leži vsaj v enem od štirih krogov, katerih premeri so stranice štirikotnika *ABCD*.

Rešitev: Naj bo daljica BD diagonala danega štirikotnika, točki E in F pa presečišča pravokotnic iz oglišča A in C na diagonalo BD (Slika 8). Po Talesovem izreku točka E leži na krožnici, katere premer je AD. To pa pomeni, da vsaka točka trikotnika ΔAED leži v krogu, katerega premer je AD. Podobno velja tudi za ostale tri pravokotne trikotnike. Ker je štirikotnik $ABCD$ razdeljen na štiri pravokotne trikotnike, sledi, da vsaka točka tega štirikotnika leži v vsaj enem od štirih krogov, katerih premeri so stranice štirikotnika $ABCD$.

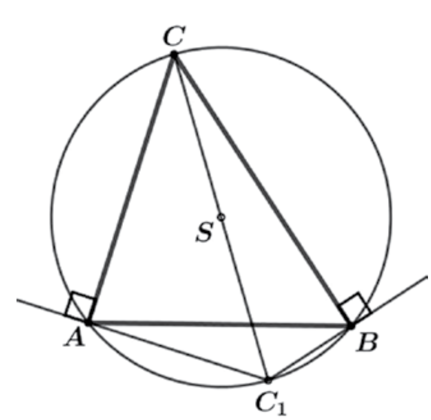


Slika 8

Naloga 2

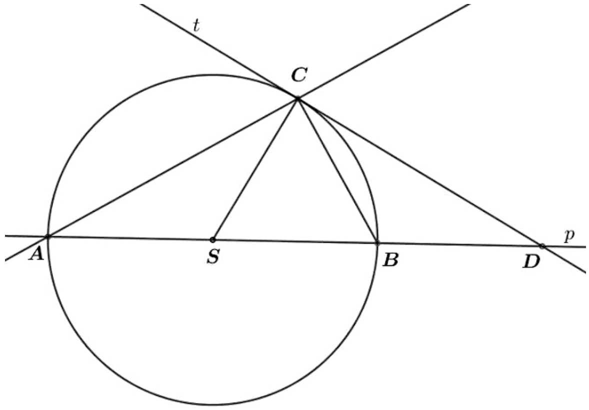
[9, str. 140]. Skozi oglišča trikotnika *ABC* so narisane pravokotnice na drugi dve stranici trikotnika na naslednji način. Pravokotnica skozi oglišče *B* na stranico *AB* in pravokotnica skozi oglišče *C* na stranico *AC* se sekata v točki A_1, pravokotnica skozi oglišče *C* na stranico *BC* in pravokotnica skozi oglišče *A* na stranico *AB* se sekata v točki B_1, ter pravokotnica skozi oglišče *A* na stranico *AC* in pravokotnica skozi oglišče *B* na stranico *BC* se sekata v točki C_1. Dokažimo, da točke A_1, B_1 in C_1 ležijo na očrtani krožnici trikotnika *ABC*.

Rešitev: Naj bo točka S razpolovišče daljice CC_1. Ker je kot $\sphericalangle CAC_1 = 90°$ in $\sphericalangle CBC_1 = 90°$, po obratu Talesovega izreka točki A in B ležita na krožnici s središčem v S in premerom $|CC_1|$. To pomeni, da točka C_1 leži na krožnici, očrtani trikotniku ABC. Podobno pokažemo, da tudi točki A_1 in B_1 ležita na isti krožnici (Slika 9).



Slika 9

Matematika v šoli, št. 1., letnik 25, 2019



Slika 10

Naloga 3

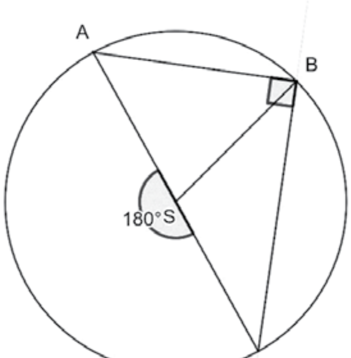
[9, str. 140]. Dana je krožnica k in premica p, skozi središče S dane krožnice k. Krožnico seka v točkah A in B. Tetiva AC oklepa s premico p kot 30°. Tangenta t z dotikališčem v točki C seka premico p v točki D. Dokaži, da je $|SC| = |SD|$ (Slika 10).

Rešitev: Po Talesovem izreku je trikotnik ΔABC pravokoten. Ker je $\sphericalangle BAC = 30°$, je $\sphericalangle ABC = 60°$. Trikotnik ΔSBC je enakokrak, ker je $|SB| = |SC|$, iz česar sledi, da je $\Delta SCB = 60°$, kar pomeni tudi enakostraničen, to je $|SB| = |SC| = |BC|$. Sedaj je očitno $\sphericalangle BCD = 30°$ zaradi $SC \perp t$. Ker je kot $\sphericalangle BDC$ zunanji kot trikotnika ΔBCD, sledi, da je ΔBDC enakokrak. Torej je $|BD| = |BC|$. Sedaj imamo zaporedno $|SB| + |BD| = |SD|$, $|SC| + |BC| = |SD|$, $|SC| + |SC| = |SD|$, $2|SC| = |SD|$. Dobimo $|SC| = \frac{1}{2}|SD|$ (Slika 10).

Naloga 4

[5, naloga A6. za 9. razred]. Dan je krog in tetiva AB na krog (Slika 11). V krajišču B tetive AB je narisana pravokotnica na tetivo. Večjega od lokov AB razdeli razmerju 2 : 5. Koliko meri središčni kot, ki pripada tetivi AB?

Rešitev: Presečišče pravokotnice in krožnice označimo s C. Ker je kot $\sphericalangle ABC$ pravi, iz obrata Talesovega izreka sledi, da je AC premer kroga. Naj bo S središče kroga. Ker je $\sphericalangle ASC = 180°$, je $\sphericalangle BSC : 180° = 2 : 5$ (glej sliko 11). Od tod dobimo $\sphericalangle BSC = 72°$, njegovo sokot pa meri 108°. Torej središčni kot, ki pripada tetivi AB, meri 108°.

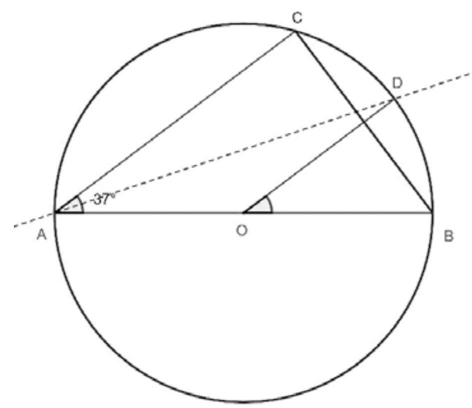


Slika 11

Naloga 5

[6, naloga 3. za 7. razred]. Dan je pravokotni trikotnik ABC s hipotenuzo AB (Slika 12). Točka O naj bo središče temu trikotniku očrtane krožnice. Simetrala kota $\sphericalangle BAC$ seka krožnico v točkah A in D. Kot $\sphericalangle BAC$ meri 37°. Izračunaj velikost kota $\sphericalangle BOD$.

Rešitev: Po Talesovem izreku je točka O je razpolovišče hipotenuze AB. Kot $\sphericalangle BOD$ je središčni kot nad krožnim lokom BD, zato je dvakrat večji od obodnega kota nad istim krožnim lokom (v. [4, str. 85]). Takrat je $\sphericalangle BOD = 2\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAC = 37°$

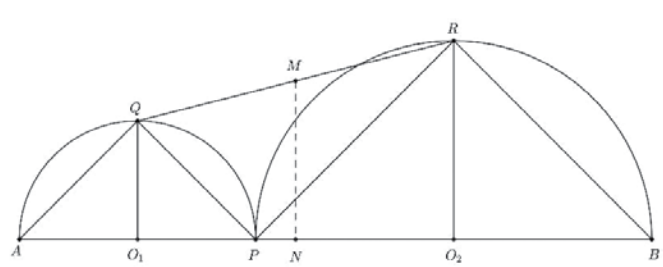


Slika 12

Naloga 6

[7, naloga 3. za 1. letnik srednje šole]. Za poljubno točko P sta na isti strani daljice AB dana dva enakokraka pravokotna trikotnika APQ in PBR s pravima kotoma v ogliščih Q in R. Dokaži, da oddaljenost razpolovišča M daljice QR od premice AB ni odvisna od izbire točke P (Slika 13).

Rešitev: Naj bosta točki O_1 in O_2 središči polkrožnic s premeroma $|AP|$ in $|PB|$ zaporedoma. Točka N pa naj bo presečišče pravokotnice iz točke M na daljico AB. Iz obrata Talesovega izreka sledi, da točka Q leži na polkrožnici s premerom $|AP|$, točka R pa na krožnici s premerom $|PB|$.



Slika 13

Ker sta trikotnika APQ in PBR enakokraka z osnovnicama AP in PB zaporedoma, je $QO_1 \perp AP$ in $RO2 \perp PB$ in velja $|QO_1| = |AO_1| = |O_1P| = \frac{1}{2}|AP|$ in $|RO2| = |PO_2| = |O2B| = \frac{1}{2}|PB|$. Štirikotnik O_1O_2RQ je pravokotni trapez z osnovnicama QO_1 in RO_2. Ker je M razpolovišče daljice QR, *je* MN srednjica trapeza in $MN \parallel QO_1 \parallel RO_2$. Znano je, da je dolžina srednjice trapeza enaka polovici vsote dolžin osnovnic trapeza, zato velja

$$|MN| = \frac{1}{2}(|QO_1| + |RO_2|) = \frac{1}{4}(|AP| + |PB|) = \frac{1}{4}|AB|.$$

Torej oddaljenost točke M od daljice AB ni odvisna od izbire točke P, kar je bilo treba dokazati.

V tem prispevku smo navedli več različnih dokazov Talesovega izreka z uporabo znanja iz različnih matematičnih področij ter na konkretnih primerih pokazali uporabo pri reševanju (tekmovalnih) nalog. Naš cilj je z omenjenim prispevkom pritegniti pozornost učencev osnovnih in srednjih šol ter njihovih učiteljev za podrobnejše preučevanje Talesovega izreka in reševanje geometrijskih nalog. Predlagamo, da bralec poskuša odkriti še katerega od dokazov Talesovega izreka. Kot prvi korak k temu cilju pa poskušajte rešiti naslednje naloge.

Naloga 7

Dokažite Talesov izrek z uporabo Apollonijevega izreka, ki pravi:

Naj bo D razpolovišče stranice AB trikotnika ABC. Potem je $|CA|^2 + |CB|^2 = 2\,(|CD|^2 + |AD|^2)$.

Naloga 8

Dokažite Talesov izrek z uporabo Stewartovega izreka, ki pravi:

Naj bo D poljubna točka na stranici AB trikotnika ABC. Potem je

$|CA|^2 \cdot |BD| + |CB|^2 \cdot |AD| = |AB| \cdot (|CD|^2 + |AD| \cdot |BD|$.

Naloga 9

Dokažite Talesov izrek z uporabo kompleksnih števil in kosinusnega izreka.

Uporabo Talesovega izreka pri reševanju konstrukcijskih nalog najdete v [4, str. 91–97].

Literatura

[1] Anglin, W. S. in Lambek, J. (1995). *The heritage of Thales*. Springer.

[2] Earl, R. (2017). *Towards higher mathematics: A companion*. Cambridge University Press.

[3] Heath, T. (1921). *A history of Greek mathematics*. Vol. I. Oxford at the Clarendon Press.

[4] Ivanec, D. idr., *Vega 2*, i-učbenik za matematiko v 2. letniku gimnazij, Zavod Republike Slovenije za šolstvo (http://eucbeniki.sio.si/vega2/).

[5] *Komisija za popularizacijo matematike v osnovni šoli* (2007). 43. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje, Področno tekmovanje. Ljubljana: DMFA Slovenije.

[6] *Komisija za popularizacijo matematike v osnovni šoli* (2012). 48. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje, Državno tekmovanje. Ljubljana: DMFA Slovenije.

[7] *Komisija za popularizacijo matematike v srednji šoli* (2007). 45. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije. Idrija: DMFA Slovenije.

[8] Odžak, A. in Smajlović, L. (2013). K*ompleksna analiza.* Sarajevo: Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Sarajevu.

[9] Stošić, V. (1994). Matematička natjecanja učenika osnovnih škola. Zagreb: Element: Hrvatsko matematičko društvo.

[10] Yaglom, I. M. (1968). Complex numbers in geometry. New York in London: Academic Press.

Od sladkorja do odvajanja

Vid Kavčič, Srednja šola Črnomelj
Mentorica: Katarina Pavlakovič

Izvleček

Naloga o škatlici in njeni prostornini je zaznamovala moja zadnja štiri leta šolanja na Osnovni šoli Loka Črnomelj. V šestem razredu mi je nalogo podala učiteljica matematike Darinka Rogina. S takratnim znanjem nisem mogel kaj prida računati. Zato sem se naloge lotil s praktičnim raziskovanjem. A skozi leta vse praktično preide v teoretično – na s črnilom popackan list papirja s srednješolsko matematiko.

V svoji raziskovalni nalogi sem obdelal reševanje ene na videz preproste naloge na več načinov na različnih stopnjah znanja. Ocenjeval sem, igral sem se s sladkorjem, računal prostornino kvadrov, s pomočjo GeoGebre risal grafe funkcij ter se seznanil z limitami in odvodi, nato pa odvod še posplošil. Tako najnižja kot tudi najvišja stopnja znanja imata prednosti in slabosti, ki sem jih preučil v raziskovalni nalogi.

Ključne besede: odvod, raziskovanje pri matematiki, prostornina

From Sugar to Derivation

Abstract

The task including a box and its volume made a lasting impression on me during my last four years of primary school. I was given this task in sixth grade by my mathematics teacher Darinka Rogina, but the knowledge I had at the time was not very useful so I decided to approach it with practical research. However, over time all practical knowledge becomes theoretical – presented on an ink stained piece of paper with secondary school mathematics.

In my research paper, I approached the solving of an apparently simple task in various ways at different knowledge levels. I was estimating, playing with sugar, calculating the volume of a rectangular solid, using GeoGebra to draw graphs of mathematical functions, became acquainted with limits and derivatives and generalised the derivatives. Both the highest and the lowest knowledge level have their strengths and their weaknesses that were the subject of my research paper.

Keywords: derivative, research in mathematics, volume

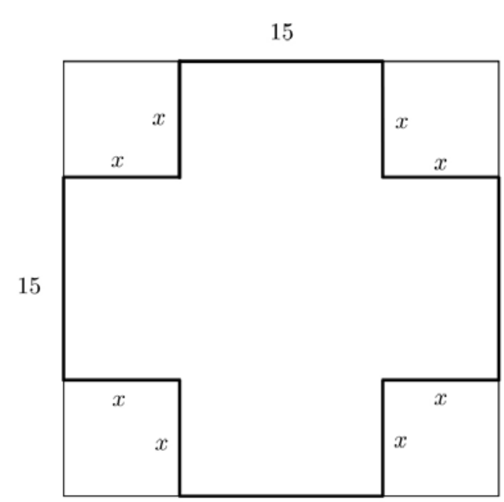
Uvod

Nekaj let nazaj, ko sem bil še v šestem razredu, mi je učiteljica matematike zastavila zelo zanimivo nalogo.

Dan je list papirja v obliki kvadrata s stranico 15 cm (slika 1). Iz vsakega vogala kvadrata izrežemo kvadrat s stranico x. Tako lahko preostalo zložimo v škatlico. Pri katerem x je prostornina škatlice največja?

Takrat še nisem imel veliko matematičnega znanja, zato sem škatlice kar naredil in ugotavljal, kdaj je prostornina škatlice največja.

Učiteljica me je vsako leto spomnila na to nalogo in vsako leto sem lahko izračunal nekaj več. Prav vsako znanja šteje; konec šestega razreda je prinesel prostornino kvadra, v osmem razredu smo matematiko posplošili z x in ostalimi spremeljivkami, v de-



Slika 1

vetem razredu smo se seznanili s funkcijami in grafi, v drugem letniku gimnazije je na sporedu kvadratna enačba, zadnjo stopnjo pa predstavlja odvod – zanj mi je učiteljica povedala letos. Ker me je zanimala matematično korektna rešitev, sem začel prebirati o odvodu in posegel po njem.

Nalogo sem rešil na več možnih načinov in vsakega podrobno preučil.

Raziskovanje – 1. del: Ocenjevanje pri matematiki

Najbolj osnovno je, da samo ocenimo, kdaj ima škatlica največjo prostornino, če imamo škatlice pred seboj in jih vidimo. Tu znanje matematike ni zelo pomembno; pomembna je iznajdljivost in občutek.

O problemu sem najprej razmislil. Prostornina gotovo ni največja, ko je $x = 1$ cm, saj je spodnja ploskev škatlice v tem primeru sicer velika, toda škatlica je visoka zgolj 1 centimeter. Prav tako škatlica ne bo imela največje prostornine, ko je $x = 7$ cm, saj je spodnja ploskev v tem primeru izredno majhna (zgolj 1 cm^2), pa čeprav je škatla visoka.

Zato sem iz papirja izdelal škatlice za $x = 1$ cm, $x = 2$ cm, $x = 3$ cm, $x = 4$ cm, $x = 5$ cm, $x = 6$ cm in $x = 7$ cm. Škatlice z $x = 8$ cm ni mogoče narediti, saj bi morala biti v tem primeru dolžina kvadrata večja od 16 cm. Ko sem videl, kako posamezna škatlica izgleda v prostoru, sem videl, da so med večjimi prav gotovo tiste škatlice pri $x = 2$ cm, $x = 3$ cm in $x = 4$ cm, nisem pa si upal trditi, v katero bi lahko spravili največ ... česar vendar?

Raziskovanje – 2. del: Sladka matematika

Porodila se mi je ideja, da bi vsako škatlico napolnil s sladkorjem in jo stehtal ter ugotovil, pri katerem x je masa sladkorja največja, v kateri škatlici je največ sladkorja.

Ugotavljanje največje prostornine s sladkorjem

Potrebujemo:

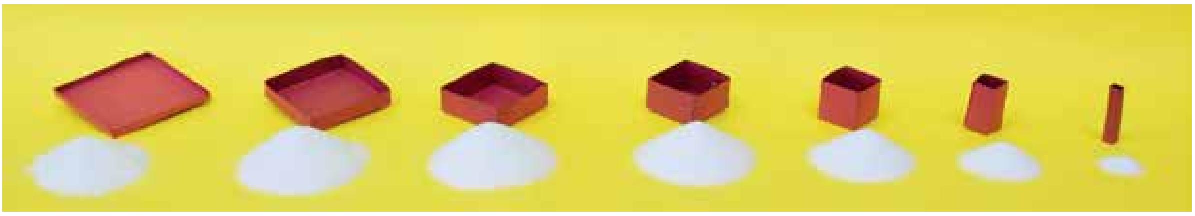
- **sedem škatlic**, za katere smo porabili kvadratni list papirja velikosti 15 cm × 15 cm; višin od 1 do 7 cm;
- **kilogram navadnega belega sladkorja** zadostuje. Lahko bi bila uporabljena tudi sol ali kava, ampak da bo matematika bolj sladka, sem se odločil za sladkor;
- **digitalno tehtnico**, ki mora biti čim bolj natančna za boljše meritve;
- **papir in svinčnik** za zapisovanje meritev.

Meritve gotovo niso zelo verodostojne, saj je izmerjena masa odvisna od tega, kako dobro smo škatlico zapolnili, poleg tega pa tudi zaradi prepogibov pri izdelavi škatlic njihova prostorina ni nujno točno tak, kot bi želeli – lahko je malce večji ali manjši. Poleg tega pa so škatlice narejene iz lepenke, ki vpliva na maso. Podatke sem zbral v spodnji preglednici.

Preglednica 1: Mase škatlic s sladkorjem *x*.

Škatlica	Slika	Masa
$x = 1$ cm		$m_1 = 165$ g
$x = 2$ cm		$m_2 = 244$ g
$x = 3$ cm		$m_3 = 245$ g
$x = 4$ cm		$m_4 = 202$ g
$x = 5$ cm		$m_5 = 130$ g
$x = 6$ cm		$m_6 = 58$ g
$x = 7$ cm		$m_7 = 9$ g

Moja predvidevanja so bila dobra, največjo maso ima škatlica za $x = 3$ cm, torej lahko sklepamo, da ima tudi največjo prostornino. Nato pa sem primerjal tudi velikosti kupčkov sladkorja, ki sem jih usul na mizo. Videl sem, da je tretji kupček (z leve) največji, kar je potrdilo tehtanje. A to nas ne sme prepričati, lahko gre za optično prevaro.



Slika 2: Kupčki sladkorja s škatlicami.

Raziskovanje – 3. del: Pri matematiki prostornino računamo

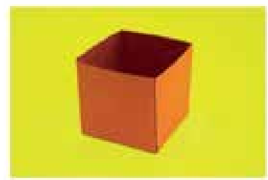
Izračunamo lahko tudi, katera škatlica ima največjo prostornino, a je za to potrebno znanje za izračun prostornine kvadra. Potrebna je tudi mahjhna matematična spretnost za izračun robov posameznega kvadra, torej znanje šestega razreda osnovne šole.

Prostornina kvadra
$V = a \cdot b \cdot c$

V našem primeru je $c = x$, saj gre za višino kvadra (oziroma pravilne štiristrane prizme), dno škatlice je kvadrat, zato velja $a = b = 15 - 2x$. Za vsako škatlico sem izračunal najprej dolžino robov, nato pa še prostornino.

Preglednica 2: Prostornine škatlic za posamezen *x*.

Mreža	Slika	Prostornina
		$x = 1$ cm $a = 15 - 2 \cdot 1 = 13$ cm $b = a = 13$ cm $c = x = 1$ cm $V = 1 \cdot 13 \cdot 13\ \text{cm}^3 = 169\ \text{cm}^3$
		$x = 2$ cm $a = 15 - 2 \cdot 2 = 11$ cm $b = a = 11$ cm $c = x = 2$ cm $V = 2 \cdot 11 \cdot 11\ \text{cm}^3 = 242\ \text{cm}^3$
		$x = 3$ cm $a = 15 - 2 \cdot 3 = 9$ cm $b = a = 9$ cm $c = x = 3$ cm $V = 3 \cdot 9 \cdot 9\ \text{cm}^3 = 243\ \text{cm}^3$
		$x = 4$ cm $a = 15 - 2 \cdot 4 = 13$ cm $b = a = 7$ cm $c = x = 4$ cm $V = 4 \cdot 7 \cdot 7\ \text{cm}^3 = 196\ \text{cm}^3$

Mreža	Slika	Prostornina
		$x = 5$ cm $a = 15 - 2 \cdot 5 = 5$ cm $b = a = 5$ cm $c = x = 5$ cm $V = 5 \cdot 5 \cdot 5\ \text{cm}^3 = 125\ \text{cm}^3$
		$x = 6$ cm $a = 15 - 2 \cdot 6 = 3$ cm $b = a = 3$ cm $c = x = 6$ cm $V = 6 \cdot 3 \cdot 3\ \text{cm}^3 = 54\ \text{cm}^3$
		$x = 7$ cm $a = 15 - 2 \cdot 7 = 1$ cm $b = a = 1$ cm $c = x = 7$ cm $V = 7 \cdot 1 \cdot 1\ \text{cm}^3 = 7\ \text{cm}^3$

Tudi tu ugotovimo, da ima škatlica največjo prostornino, ko je $x = 3$ cm.

Raziskovanje – 4. del: Pri matematiki rišemo grafe

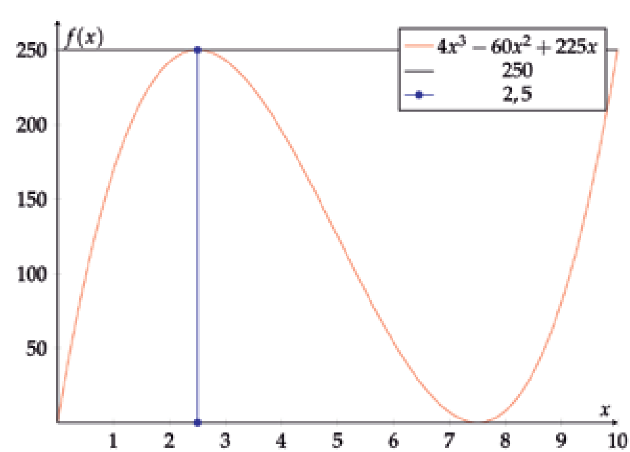
Prostornino škatlice opisuje funkcija, ki jo lahko izračunamo. Prostornino škatlice moramo najprej zapisati splošno. Slednje lahko zapišejo že učenci 8. in 9. razreda osnovne šole, a potem se za ta nivo znanja reševanje naloge ustavi. Učenci se na koncu 9. razreda seznanijo s funkcijami in grafi funkcij, zato je ta primeren za 9. razred, le da je malo zahtevnejši. Upoštevamo, da je $a = 15 - 2x$ in $v = x$.

$$V = a^2 \cdot v = (15 - 2x)^2 \cdot x = (225 - 60x + 4x^2) \cdot x = 4x^3 - 60x^2 + 225x$$

Da narišemo graf te funkcije, s katerega odčitamo prostornino in iskani x, lahko uporabimo tehnologijo – GeoGebro ali spletno stran Desmos.

Z grafa razberemo, da je največja prostornina $V = 250\ \text{cm}^3$ pri $x = 2{,}5$ cm. Ta rešitev je sicer izvirna in primerna za 9. razred osnovne šole, a matematično nekorektna. Ni nujno, da smo z grafa odčitali prav – naše oči imajo namreč omejeno natančnost.

Zanimivo, da rešitev našega problema gotovo ni naravno število 2 ali 3, s prejšnjimi reševanji smo ugotovili, da je prostornina največja pri $x = 3$ cm, toda to ni res.



Rešitev naloge sem ocenil in jo rešil s poskušanjem na dva načina ter z malo bolj zanimivo taktiko s pomočjo tehnologije. Bilo je zabavno, a v matematiki je matematično korektni dokaz obvezen. Zato sem se lotil še višjega nivoja za reševanje te naloge – torej odvoda, ki ima za svojo prefinjenost precej zabavno ime. Obelal sem teoretične osnove, naredil nekaj primerov, saj je s pomočjo primerov vse skupaj lažje razumeti.

Uvedimo odvajanje kot drugi pomen

Z odvodom se, kot pravijo, prava matematika šele začne. A prva stvar, ki jo na internetu lahko najdemo o odvodu, je to:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Takoj sem se vprašal, kaj pomeni tisti *lim* in spodaj $h \to 0$. Stvar sem razčistil, a se v to nisem poglabljal, saj sem predvideval, da za rešitev naloge to ni prav zelo pomembno.

Limite

Limita funkcije v neki točki a je število, ki se mu vrednost funkcije $f(x)$ približuje, ko se vrednost spremenljivke x približuje danemu številu a.

Limito funkcije v točki a označimo $\lim_{x\to a} f(x)$, kar beremo: limita $f(x)$, ko gre x proti a.

Če imamo torej na grafu neke funkcije točko a, je limita vrednost funkcije, ko se koordinata x približuje a. To lahko zelo nazorno prikažemo na grafu.

Če poznamo a, lahko limito izračunamo; x se približuje a, ko pa pride do a, velja $x = a$. Toda pri nekaterih funkcijah se x približuje a, a tja nikoli ne pride – kar pa je zelo zanimivo – zato uporabimo izraz: ko gre x poti a. Naredil sem tudi nekaj primerov, da sem si stvar razjasnil.

a) Samo izračunamo vrednost funkcije za $x = 2$.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+5}{x^2-3} = \frac{2^2+5}{2^2-3} = \frac{9}{1} = 9$$

b) Če bi v tem primeru izračunali vrednost funkcije za $x = 2$, bi dobili deljenje z 0, ki v matematiki ni definirano, zato moramo najprej funkcijo poenostaviti. Funkcija pri $x = 2$ tako ni definirana.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2} = \frac{x-2}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2-1} = 1$$

c) Funkcija za $x = 4$ ni definirana, saj pridemo do deljenja z 0. Tako lahko x približujemo 4, a tja nikoli ne bo prišel, saj je za $x = 4$ funkcija nedefinirana. Vrednost funkcije bo tako, ko gre x proti 4, vedno večja, v takem primeru govorimo o neskončni limiti.

$$\lim_{x\to 4} \frac{1}{x-4} = \infty$$

č) Če x pošljemo proti ∞, se vrednost x seveda veča. Vrednost funkcije pa se ne bo bistveno večala, približevala se bo 2. Če izračunamo vrednost funkcije pri večjih x, bo vrednost vedno malo manj kot 2. Poleg tega pa lahko to vidimo tudi na grafu. V takem primeru govorimo o limiti v neskončnosti.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-2}{(x+3)^2} = 2$$

Definicija odvoda

Na funkciji $f(x)$ ležita dve točki $T_1 (x_1, y_1)$ in $T_2 (x_2, y_2)$. Skozi točko T_2 poteka tangenta, skozi točki T_1 in T_2 poteka sekanta. Naj bo razlika koordinat x_2 in x_1 enaka nekemu h, torej $x_2 - x_1 = h$. Zanima nas, kdaj bo naklon sekante enak naklonu tangente – ko bo $h = 0$, ko bosta točki sovpadali.

Naklon sekante lahko izračunamo. Uporabimo dejstvo, da je $x_2 - x_1 = h$.

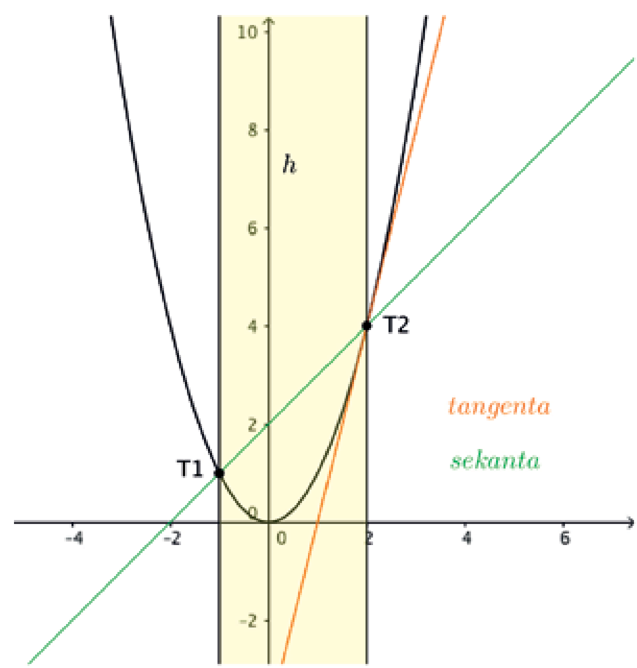
$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h}$$

Odvod funkcije $f(x)$ je enak smernemu koeficientu tangente pri nekem x. Odvod funkcije je enak limiti diferenčnega količnika, ko gre h proti nič:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Pa smo pri zapisu, ki sem ga omenil že v uvodu. Vprašanje pa je, kaj pomeni tista črtica ($f'(x)$). S črtico označimo odvod funkcije. Sicer pa lahko odvod označimo tudi drugače. Znameniti fizik Isaac Newton je odvod označil s pikico: $\dot{y}$ ($y = f(x)$), ta zapis se uporablja predvsem v fiziki. Matematik Euler pa je za zapis odvoda uporabil diferencialni operator D, odvod funkcije je zapisal kot D f.

Stvar sem tudi narisal. Dana je funkcija $f(x) = x^2$. Zanima nas naklon tangente, ko je $x = 2$. Ta je enak naklonu sekante, ko gre h proti 0. Uporabimo enačbo (1).



Slika 3: Za lažjo predstavo odvoda.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(h+2x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(h+2x)}{\cancel{h}}$$

Vstavimo $h = 0$.

$$f'(x) = h + 2x = 0 + 2x = 2x$$

Naklon tangente je pri poljubnem x enak $2x$, v našem primeru pa je to $2 \cdot 2 = 4$. Tudi tu sem naredil še nekaj primerov. S pomočjo definicije sem izračunal odvode.

a) $f(x) = 3x$

Vemo, da je naklonski koeficient v tem primeru 3 – gre namreč za linearno funkcijo, naklon je konstanten. Naklon nam pri linearni funkciji pove smerni koeficient. Kaj pa pokaže odvod?

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)-3x}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{3x+3h-3x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3h}{h} = 3$$

Vidimo, da tudi odvod pokaže, da je naklonski koeficient $k = 3$.

b) $f(x) = 2x^2 + 4x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)^2+4(x+h)-(2x^2+4x)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{2x^2+4xh+2h^2+4x+4h-2x^2-4x}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{4xh+2h^2+4h}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(4x+2h+4)}{h} = \lim_{h\to 0}(4x+2h+4)$$

Vstavimo $h = 0$.

$$f'(x) = 4x + 2 \cdot 0 + 4 = 4x + 4$$

Izračun odvoda

Pri odvajanju s pomočjo enačbe (1) lahko zelo kmalu naletimo na težave. Že ko imamo opravka s funkcijami 4. stopnje, se stvar zelo zaplete, saj moramo računati 4. potence, kar pa ni najbolj praktično. Zato za odvajanje obstaja lažji način.

Funkcijo, ki vsebuje en člen, odvajamo tako, da najprej s potenčnim eksponentom pomnožimo koeficient člena, nato pa eksponent zmanjšamo za 1.

Da sem osvojil to veščino, sem naredil tudi nekaj primerov.

(a) $f(x) = 5x^5$ $\quad f'(x) = 5 \cdot 5 \cdot x^{5-1} = 25x^4$

(b) $f(x) = 1{,}5x^6$ $\quad f'(x) = 1{,}5 \cdot 6 \cdot x^{6-1} = 9x^5$

(c) $f(x) = 3x^{-1}$ $\quad f'(x) = 3 \cdot (-1) \cdot x^{-1-1} = -3x^{-2}$

Pravila za odvajanje

Odvajanje enočlenika je sila enostavno, pri odvajanju več členikov, kvocientov, zmnožkov pa se stvar hitro zaplete, zato obstajajo pravila za odvajanje.

Odvod konstante

Odvod konstante je enak 0 za vsako realna število x. Stvar lahko dokažemo s pomočjo definicje odvoda (c je konstanta):

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

Ker je odvod prav vsake konstante enak 0, pri integriranju, ki je nasprotna operacija odvoda, ne smemo pozabiti na konstanto, ki jo označimo s c. Nikoli namreč ne vemo, za katero število gre, saj je odvod vsake konstante 0.

Odvod vsote

Odvod vsote dveh ali več funkcij je enak vsoti odvodov posameznih funkciji. Enako velja za odvod razlike.

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

Primer:

$f(x) = 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 102$

$f'(x) = 2 \cdot 4x^3 + 3 \cdot 3x^2 + 4 \cdot 2x + 5x^0 = 8x^3 + 9x^2 + 8x + 5$

Odvod produkta

Odvod produkta dveh funkcij je enak vsoti produktov odvoda prve in druge funkcije ter prve funkcije in odvoda druge funkcije.

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Pri treh funkcijah je odvod tega produkta enak vsoti:

$$(f(x) \cdot g(x) \cdot h(x))' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) +$$
$$+ f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$$

Splošno lahko odvajanje produkta zapišemo tako:

$$(f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_{n-1}(x) \cdot f_n(x))' = f_1'(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_{n-1}(x) \cdot f_n(x) +$$
$$f_1(x) \cdot f_2'(x) \cdot \ldots \cdot f_{n-1}(x) \cdot f_n(x) + \ldots + f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_{n-1}'(x) \cdot f_n(x)$$
$$+ f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_{n-1}(x) \cdot f_n'(x)$$

Primer:

$f(x) = x^3 + 2x^2,\ g(x) = 3x^2$

$(f(x) \cdot g(x))' = (3x^2 + 4x) \cdot 3x^2 + (x^3 + 2x^2) \cdot 6x = 15x^4 + 24x^3$

Odvod kvocienta

Odvod količnika izračunamo tako, da od produkta odvoda števca in imenovalca odštejemo produkt števca ter odvoda imenovalca. Slednjo razliko moramo deliti še s kvadratom funkcije v imenovalcu. Matematično:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Tabela odvodov

Nekaterih odvodov preprostno ne moremo izračunati in jih moramo poznati kot, na primer, odvodov kotnih funkcij. Zato potrebujemo tabelo odvodov.

Preglednica 3: Tabela odvodov

FUNKCIJA	ODVOD	FUNKCIJA	ODVOD
$c\ (c \in \mathbb{R})$	0	x	1
x^n	nx^{n-1}	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{arctg}\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arcctg}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

V tabelo sem vključil samo pomembnejše odvode.

Uporaba odvoda

Prvi odvod

Glede na to, da odvod pove naklon tangente v neki točki x_0, lahko sklepamo, da:
1. Ko je odvod večji od 0, je funkcija naraščajoča, saj je naklon tangente takrat pozitiven.
2. Ko je odvod manjši od 0, je funkcija padajoča, saj je naklon tangente takrat negativen.
3. Ko je enak 0, vemo, da gre za neko stacionarno točko – ne vemo ničesar o naraščanju in padanju.

Med stacionarnimi točkami lahko poiščemo lokalne ekstreme:
a) če je odvod levo pozitiven in desno negativen, ima funkcija v točki x_0 lokalni maksimum;
b) če je odvod levo negativen in desno pozitiven, ima funkcija v točki x_0 lokalni minimum;
c) če se predznak odvoda pri prehodu skozi točko ne spremeni, funkcija nima lokalnega ekstrema.

Ničle prvega odvoda nam pomagajo pri določanju lokalnih ekstremov.

Drugi odvod

Če nismo prepričani, ali smo našli lokalni minuimum ali lokalni maksimum, nam pride prav drugi odvod. Če je drugi odvod v stacionarni točki:
a) večji od 0, je v točki x_0 lokalni minimum;
b) manjši od 0, je v točki x_0 lokalni maksimum;
c) če je enak 0 ne moremo trditi, da je v točki x_0 dosežen lokalni ekstrem, in tudi če je, ne vem, kateri.

Kvadratna enačba

Pri iskanju ničel odvodov večkrat naletimo na enačbo oblike:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

rečemo ji kvadratna enačba.

Z osnovnošolskim znanjem take enačbe ni moč rešiti. V tem primeru lahko uporabimo naslednjo formulo:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

V enačbi a predstavlja koeficient x^2, b koeficient x^1, c pa koeficient x^0 – konstanto. Enačbo je treba nujno preizkusiti na primeru.

Primer: Poišči rešitvi enačbe.

$$x = \frac{3}{x-2}$$

$$x(x-2) = 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$a = 1,\ b = -2,\ c = -3$

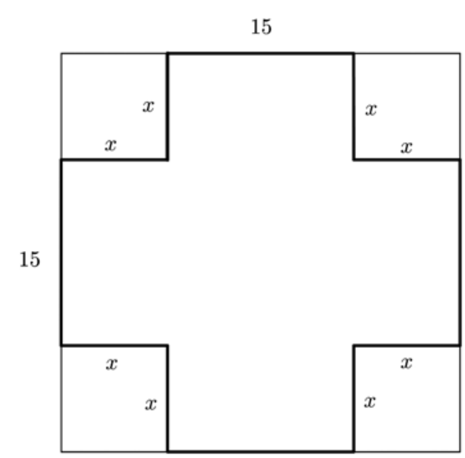
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -1$$

Raziskovanje – 5. del: Brez odvajanja ne gre



Slika 4

Pridobil sem veliko znanja s področja odvajanja. Ugotovil sem, da celo dovolj za nalogo učiteljice Rogine. Postopek pridobivanja znanja je bil zelo zanimiv; nekaj podatkov sem našel na internetu, nekaj so mi namignili drugi učitelji, tako da sem se lotil reševanja naloge, zaradi katere sem obdelal poglavje četrtega letnika gimnazije.

Reševanje

Prostornino škatlice sem nekaj razdelkov nazaj že zapisal splošno, a bom račun zapisal še enkrat. Upoštevamo, da je $a = 15 - 2x$ in $v = x$.

$$V = a^2 \cdot v = (15-2x)^2 \cdot x =$$
$$= (225 - 60x + 4x^2) \cdot x = 4x^3 - 60x^2 + 225x$$

Zanima nas največja možna prostornina, torej maksimum funkcije $4x^3 - 60x^2 + 225x$. Ekstreme funkcij nam pove 1. odvod.

$$(4x^3 - 60x^2 + 225x)' = 12x^2 - 120x + 225$$

Zdaj izračunamo ničli odvoda funkcije. Dobili bomo vrednost x za največjo in najmanjšo vrednost funkcije – prostornine. Uporabimo kvadratno enačbo.

$$12x^2 - 120x + 225 = 0$$
$$a = 12,\ b = -120,\ c = 225$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \\ &= \frac{-(-120) \pm \sqrt{(-120)^2 - 4\cdot 12 \cdot 225}}{2\cdot 12} = \\ &= \frac{120 \pm \sqrt{14400-10800}}{24} = \\ &= \frac{120 \pm \sqrt{3600}}{24} = \\ &= \frac{120 \pm 60}{24} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{120+60}{24} = \frac{180}{24} = 7{,}5\,cm \\ x_2 &= \frac{120-60}{24} = \frac{60}{24} = 2{,}5\,cm \end{aligned}$$

Kaj je kaj?

Dobili smo dve rešitvi. Vsaka predstavlja nekaj: Če v prvotno funkcijo (protornina) vstavimo eno izmed njih, bomo dobili največjo ali najmanjšo prostornino. Uporabili bomo drugi odvod, ki pove, ali gre za lokalni maksimum ali minimum.

$$(V'(x))' = (12x^2 - 120x + 225)' = 24x - 120$$

Vstavimo oba x.

$$\begin{aligned} V''(x_1) &= 24x_1 - 120 = 24 \cdot 7{,}5 - 120 = 180 - 120 = 60 \\ V''(x_2) &= 24x_2 - 120 = 24 \cdot 2{,}5 - 120 = 60 - 120 = -60 \end{aligned}$$

Pri x_1 je vrednost pozitivna, kar pomeni, da gre za lokalni minimum, pri x_2 pa je vrednost negativna, kar pomeni, da gre za lokalni maksimum. Kar pa je logično; pri x_1 = 7,5 cm prostorine škatlice tako rekoč ni; saj smo porabili ves papir. Tako da za izračun največje prostornine potrebujemo x_2 = 2,5 cm.

Izračunajmo prostornino.

$$\begin{aligned} V(x) &= (15-2x)^2 \cdot x \\ V(2{,}5) &= (15 - 2 \cdot 2{,}5) \cdot 2{,}5 = (15-5)^2 \cdot 2{,}5 = \\ &= 10^2 \cdot 2{,}5 = 100 \cdot 2{,}5 = 250\,cm^3 \end{aligned}$$

Zanimivo, da s poskušanjem na začetku nisem prišel do pravega rezultata. Največja prostornina škatlice ni za x = 3 cm, ampak za x = 2,5 cm. Ravno zaradi tega poizkušanje v matematiki ni priporočljivo. Pravo rešitev je treba dobiti z nekim postopkom, ne pa z računalniškim poskušanjem!

Raziskovanje – 6. del: V matematiki posplošujemo

Vprašal sem se, ali lahko nalogo rešujemo še na višjem nivoju. Ali lahko stvar še malo zakompliciramo? Zakaj namreč ne bi komplicirali, če pa lahko.

Stvar lahko posplošimo. V matematiki vedno skušamo priti do karseda splošnih rezultatov in to je še višji nivo te naloge.

Poljuben kvadrat

Imejmo kvadrat s stranico a, kjer iz vsakega vogala izrežemo 4 manjše kvadratke s stranicami x. Spet najprej zapišemo prostornino.

$$V(x) = x(a-2x)^2 = x(a^2 - 4ax + 4x^2) = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x$$

Odvajamo in pazimo, da je a parameter.

$$V(x)' = (4x^3 - 4ax^2 + a^2x)' = 12x^2 - 8ax + a^2$$

Uporabimo kvadratno enačbo.

$$12x^2 - 8ax + a^2 = 0$$
$$a_1 = 12 \qquad b_1 = -8a \qquad c_1 = a^2$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{8a \pm \sqrt{(-8a)^2 - 4 \cdot 12 \cdot a^2}}{2 \cdot 12} = \\ &= \frac{8a \pm \sqrt{64a^2 - 48a^2}}{24} = \\ &= \frac{8a \pm \sqrt{16a^2}}{24} = \\ &= \frac{8a \pm 4a}{24} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{8a+4a}{24} = \frac{12a}{24} = \frac{1}{2}a \\ x_2 &= \frac{8a-4a}{24} = \frac{4a}{24} = \frac{1}{6}a \end{aligned}$$

Prostornina je najmanjša pri $x_1 = \frac{1}{2}a$, saj takrat škatlice praktično ni, prostornina je torej vedno večja pri $x_2 = \frac{1}{6}a$.

Dobljena splošna zapisa preizkusimo na našem konkretnem primeru, kjer je a = 15 cm.

$$x_1 = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2} \cdot 15 = 7{,}5\,cm$$
$$x_2 = \frac{1}{6}a = \frac{1}{6} \cdot 15 = 2{,}5\,cm$$

Vidimo, da je dobljena rešitev povsem enaka prejšnji, konkretni.

Poljuben pravokotnik

Nalogo lahko rešimo tudi za pravokotnik. Začnemo s prostornino.

$$V(x) = x \cdot (a-2x) \cdot (b-2x) = x(ab - 2ax - 2bx + 4x^2) =$$

$$= 4x^3 - 2ax^2 - 2bx^2 + abx$$

$$V'(x) = (4x^3 - 2ax^2 - 2bx^2 + abx) = 12x^2 - 4ax - 4bx + ab$$

$$12x^2 - 4ax - 4bx + ab = 12x^2 - x \cdot 4(a+b) + ab = 0$$

$$a_1 = 12 \qquad b_1 = -4(a+b) \qquad c_1 = ab$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{4(a+b) \pm \sqrt{(-4(a+b))^2 - 4 \cdot 12 \cdot ab}}{2 \cdot 12} = \\ &= \frac{4a + 4b \pm \sqrt{16a^2 + 32ab + 16b^2 - 48ab}}{24} = \\ &= \frac{4a + 4b \pm \sqrt{16a^2 + 16b^2 - 16ab}}{24} = \\ &= \frac{4a + 4b \pm 4\sqrt{a^2 + b^2 - ab}}{24} = \\ &= \frac{a + b \pm \sqrt{a^2 + b^2 - ab}}{6} \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{a + b + \sqrt{a^2 + b^2 - ab}}{6}$$

$$x_2 = \frac{a + b - \sqrt{a^2 + b^2 - ab}}{6}$$

Iz izkušenj vem, da je največja prostornina x_2.

Preverimo, ali dobljeno deluje. Vidimo, da zapisa za splošen a in b nista prav lepa, zato bi bilo še najbolje, če privzamemo, da je $a = b = 15$ cm. Tako je:

$$x_1 = \frac{a + b + \sqrt{a^2 + b^2 - ab}}{6}$$

$$x_1 = \frac{15 + 15 + \sqrt{15^2 + 15^2 - 15 \cdot 15}}{6}$$

$$x_1 = \frac{15 + 15 + 15}{6}$$

$$x_1 = 7{,}5\,cm$$

$$x_2 = \frac{a + b - \sqrt{a^2 + b^2 - ab}}{6}$$

$$x_2 = \frac{15 + 15 - \sqrt{15^2 + 15^2 - 15 \cdot 15}}{6}$$

$$x_2 = \frac{15 + 15 - 15}{6}$$

$$x_2 = 2{,}5\,cm$$

Ugotovitve

Nalogo sem rešil na več načinov; vsak je primeren za določeno starostno stopnjo oziroma razred/letnik osnovne/srednje šole (gimnazije). Znanja, ki so pri vseh teh potrebna, sem zbral v spodnji preglednici. Določil sem nivoje znanja in dodal, za katero starost (razred, letnik) je način primeren.

Preglednica 4: Naloga za vse starosti

Nivo	**Znanje**
prvi nivo (tudi mlajši otroci)	ocenjevanje prostornine
drugi nivo (5., 6. razred)	izdelovanje škatlic in tehatanje sladkorja
tretji nivo (konec 6. razreda, 7. razred)	računanje prostornine škatlic
četrti nivo (8., 9. razred)	izračun prostornine splošno
peti nivo (9. razred, 1. letnik)	graf funkcije
šesti nivo (2. letnik)	kvadratna enačba
sedmi nivo (4. letnik)	odvod

Za reševanje naloge na višjih nivojih ni nujno potrebno samo znanje tega nivoja, ampak velikokrat tudi znanje nižjih. (Pri višjem nivoju je treba prostornino izračunati splošno in uporabiti kvadratno enačbo.) Za vsako strategijo sem opisal pozitivne in negativne strani tega nivoja.

Ocenjevanje

Ocenjevanje je prav gotovo ena zelo pomembnih zmožnosti za vsakega človeka. Tako je ta način za mlajše (in tudi starejše) zagotovo primeren, saj na ta način razvijajo svojo prostorsko predstavljivost in občutek – ta je izredno pomemben. A z ocenjevanjem ne moremo priti niti do približnih ugotovitev, kaj šele natančnih, kar je njegova negativna plat.

Izdelovanje škatlic in tehtanje

Način, pri katerem je škatlice treba izdelati in nato stehtati sladkor v njih, je za učence zelo atraktiven. Če smo pri izdelavi škatlic in tehtanju natančni, dobimo dokaj točne rezultate, a prav točnih nikakor ni moč najti. Posotopek je tudi zelo zamuden.

Računanje volumna škatlic

Računanje volumna za posamezen x je primerno za učence 6. (in tudi 7.) razreda, saj se navezuje na njihovo učno snov. Tu lahko brez pomislekov določimo, katera od obravnavanih škatlic ima največjo prostornino. A vseh možnih škatlic pač ne moremo preveriti, saj jih je neskončno mnogo. Kljub temu da poznamo natančne prostornine za vsa ustrezna naravna števila, postopek poizkušanja ni matematično korekten, a je učencem osnovne šole blizu.

Splošni zapis volumna in uporaba tehnologije za izris grafa

V 8. in 9. razredu lahko prostornino škatlice zapišemo splošno. V 9. razredu pa se prvič srečamo s funkcijami in grafi funkcij. Če se znajdemo, uporabimo tehnologijo, naredimo graf in odčitamo iskani x. Toda ne moremo biti prepričani, da je rešitev točna, saj jo zgolj odčitamo. Rešitev je zanimiva, a matematično še nepopolna.

Odvod in posplošitve

Le z odvodom lahko nalogo rešimo matematično korektno, a marsikateremu učencu oziroma dijaku ta predstavlja nekaj zahtevnega in se zgrozi ob pogledu na komplicirane matematične zapise. Zato ta rešitev učencem in dijakom načeloma ni tako blizu, a je edina matematično pravilna.

Posploševanje je del matematike, zato je nadgradnja s posplošitvijo zelo zanimiva, a seveda nekaterim učencem in dijakom nedostopna in mogoče suhoparna.

Zaključek

V raziskovalni nalogi sem prikazal raziskovanje oziroma reševanje istega problema na več načinov, ki so primerni za različne starostne stopnje; od 5. razreda osnovne šole, do četrtega letnika gimnazije. Zanimivo je, da lahko vsako pridobljeno znanje pomaga pri reševanju naloge, a za popolno rešitev je potreben odvod.

Viri in literatura

Cedilnik, A. (2006). *Matematični prir*očnik. Radovljica: Didaktika.

Pagon, B. (2010). *Odvod*. Seminarska naloga. Ljubljana: Fakulteta za matematiko in fiziko. Ogled: 14. 3. 2018. Dostopno na: http://wiki.fmf.uni-lj.si/images/7/73/Odvod.pdf.

Škarba, A. *Odvod*. Spletna stran: Astra.si. [ogled: 14. marec 2018]. Dostopno na: http://astra.si/category/odvod/.

Škarba, A. *Limite*. Spletna stran: Astra.si. [ogled: 14. marec 2018]. Dostopno na: http://astra.si/category/limite/.

Odvod. Wikipedija, prosta enciklopedija. [ogled: 14. 3. 2018]. Dostopno na spletnem naslovu: https://sl.wikipedia.org/wiki/Odvod.

Onesnaževanje oceanov in učiteljeva vloga pri tem po STEM korakih

Medpredmetna povezava med matematiko (MAT) in tehniko in tehnologijo (TIT)

Igor Pangrčič
Osnovna šola Frana Metelka Škocjan

Izvleček

Težava, ki se jo v globalnem smislu vsako leto intenzivneje raziskuje in ki ima z vsakim dnem večji vpliv na naše življenjsko okolje, je onesnaževanje. Dejstva kažejo, da vsako leto na svetu proizvedemo več plastične embalaže, pločevink itd. Kot posledica nepravilnega razvrščanja odpadkov in ozaveščanja pomena o tem se v morjih in na kopnem zbira na milijone kosov plastike in drugih smeti. Prispevek govori o tem, kako ozavestiti osnovnošolce o zbiranju, recikliranju in ponovni uporabi odpadne embalaže. Opisane so ure tehniškega dne, ki so potekale po korakih STEM priprave oz. 6E MODELU »Engineering Design Cycle«. Učenci so s pomočjo programa za delo s preglednicami računali s količinami odpadkov za obdobje 10 dni v njihovem gospodinjstvu. Sledilo je računanje količine odpadkov v občini Škocjan. Za preprečevanje oz. zmanjševanje uporabe plastike smo izdelovali izdelke iz zbranih odpadkov, kot so šah, posode za rože, peresnice in torbice ter plakate s sporočili za ozaveščanje o nastalem stanju ter konkretnih ukrepih za zmanjšanje odpadkov doma.

Ključne besede: STEM, preglednica, 1 m^3, odpadki, onesnaževanje

Ocean Pollution and teacher's Role Based on STEM Steps

Crosscurricular Connection between Mathematics and Technics and Technology

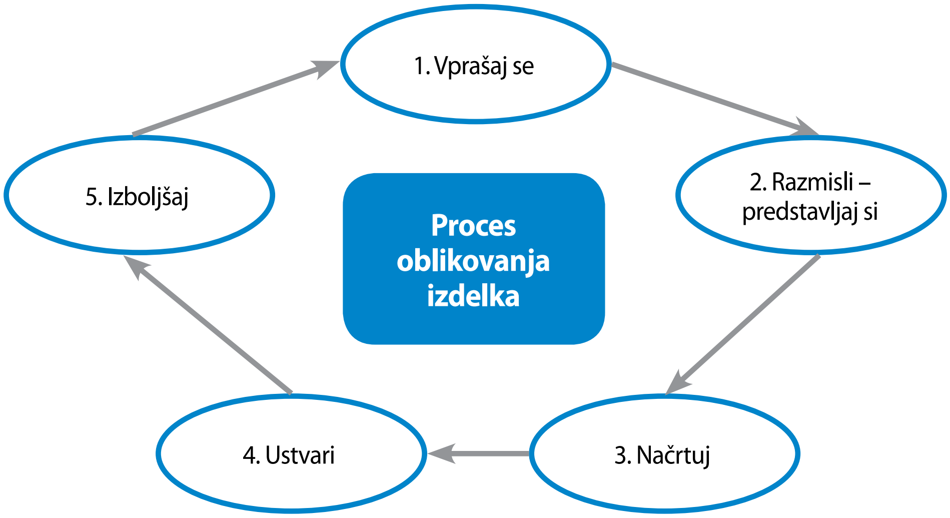
Abstract

Pollution is a problem that has been researched globally more and more intensely over the recent years and whose impact on our living environment is increasing every day. Evidence shows that global plastic production is growing every year and, as a consequence of improper waste segregation and lack of awareness of its importance, millions of tons of plastic waste are being accumulated in seas and oceans. The article introduces ways of introducing primary school students to activities such as collecting, recycling and reusing waste packaging materials and describes the Technical Day classes performed based on STEM steps and 6E MODEL »Engineering Design Cycle«. Students worked with a program using spreadsheets to calculate waste quantities for the period of 10 days in their households. This was followed by a calculation of waste quantities in the municipality of Škocjan for different time periods. In order to prevent or reduce the use of plastic packaging, we created products from the collected waste, e.g. chess, flower pots, pencil cases, bags and posters, with messages about the current situation and applicable measures to reduce waste at home.

Keywords: STEM, spreadsheet, 1 m^3, waste, pollution

Projekt Erasmus + z naslovom »Minds on Hands on STEM Goes on«, v katerega je vključena tudi naša šola, ima poudarek na naravoslovnem področju, kar je tudi razlog našega načrtnega medpredmetnega povezovanja. Že v začetku tega šolskega leta smo načrtovali izvedbo tehniških in naravoslovnih dni po STEM korakih. Z vodjo aktiva tehnike in tehnologije sva se začela poglobljeno pogovarjati o temi medpredmetnega povezovanja. Ker je problem onesnaževanje planeta ena od problematik, s katero se sooča človeštvo po vsem svetu, sva ozavestila, da ima velik pomen že osveščanje otrok v osnovni šoli o razvrščanju odpadkov doma.

Ure tehniškega dne so potekale po korakih STEM priprave oz. 6E MODELU »Engineering Design Cycle«. Ko učenci uporabljajo Engineering Design Cycle, razvijajo večjo poglobljenost razumevanja problema z uporabo konceptov, praks in odnosov.



Slika 1: Koraki STEM (diagram se nahaja na spletni strani [3]).

Kaj je STEM izobraževanje?

Model integriranega poučevanja, pri katerem se načrtno povezujejo :

- SCIENCE – znanost,
- TECHNOLOGY – tehnologija,
- ENGINEERING – inženiring,
- MATH – matematika.

STEM učna ura temelji na raziskovanju in iskanju rešitev življenjskega problema in podpira projektno učenje. Učenec razume povezavo z resničnim življenjem. STEM učna ura se lahko razširi z nadaljnjo integracijo, z drugimi učnimi predmeti, kot so jezik, družbene vede, umetnost itd. Učitelj ustvari učno okolje, ki je osredotočeno na učence (učitelj ni v središču) – od njih se pričakuje ustvarjalnost. Učenci rešujejo problem.

Značilnosti STEM učne ure:

1. Ure STEM se osredotočajo na probleme v realnem svetu.
2. Ure STEM vsebujejo proces inženirskega oblikovanja po osnovnih korakih. V tem procesu učenci definirajo probleme, izvajajo raziskave, razvijajo več idej za rešitve, razvijajo in ustvarjajo prototip ter jih nato testirajo, ovrednotijo in preoblikujejo. Učenci preizkušajo svoje ideje, ki temeljijo na raziskavah z različnimi pristopi. Učenci se učijo tudi iz napak.
3. Pri urah STEM je delo učencev praktično, raziskovalno, sodelovalno, učenci podajajo rešitve problemov. V urah STEM je pot do učenja odprta, v okviru omejitev (npr. materiali, ki so na voljo).
4. Delo učencev je skupinsko oz. sodelovalno.
5. STEM učne ure vključujejo matematične in znanstvene vsebine. Sodelovanje z učitelji matematike in/ali naravoslovja.
6. Učne ure STEM dovoljujejo več pravilnih odgovorov in pristopov – bogate možnosti za ustvarjalne rešitve. Pri načrtovanju in preizkušanju prototipov je možno, da skupina ne reši problema – neuspeh velja za pozitiven korak na poti k odkrivanju in oblikovanju rešitev.

Od učencev se pričakuje:

- reševanje problemov (več možnih rešitev),
- inovacije,
- izumi,
- logično mišljenje,
- samostojnost in
- skupinsko delo.

Začelo se je tako, da so se učenci 6. razredov skupaj z učiteljico pri uri tehnike in tehnologije pogovarjali o svetovnih problemih, ki so se dogajali med počitnicami. Učenci so povedali, da so slišali za tornade, tajfune, točo, zemeljske plazove, tanjšanje ozonskega plašča, poplave, da se iz Grčije širijo velike količine plastike proti naši obali, da hrvaški učenci med počitnicami pobirajo te odpadke … Eden od učencev je omenil, da je slišal, da je poginil kit na Tajskem, ker je pojedel 80 plastičnih vrečk, ki so tehtale do 8 kg, ter da je Tajska ena največjih porabnic plastičnih vrečk na svetu. Odgovori učencev so bili izhodišče za nadaljnjo razpravo.

Sledil je ogled posnetka o onesnaženosti oceanov na Youtubu [1], kjer strokovnjaki opozarjajo na to, kaj bo sledilo, če ne bomo bolj racionalno ravnali z odpadki, in predvsem opozarjajo, kakšno nevarnost predstavlja plastika, ki se zelo počasi razkraja, v oceanih. Posnetek si je izbrala učiteljica tehnike in tehnologije z namenom velike sporočilne vrednosti.

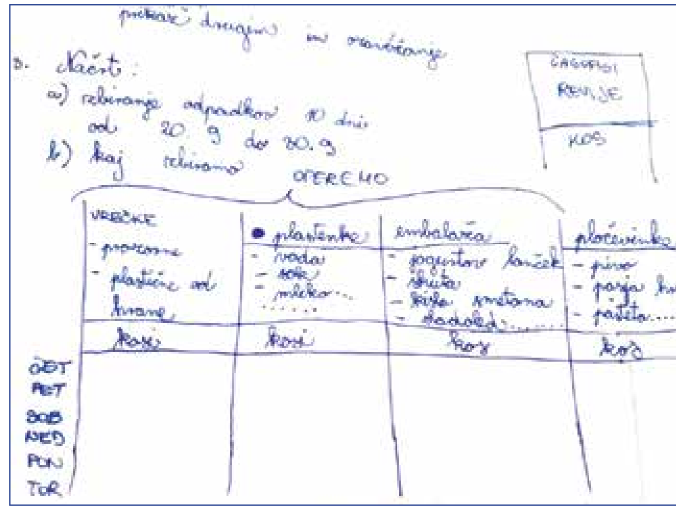
Avtorji posnetka so strokovnjaki ekipe »Bright Side«. Na Youtube kanalu imajo preko 23,5 milijona sledilcev po celotnem svetu. Videoposnetek je bil motivacijsko sredstvo za učence ter hkrati seznanitev s svetovnim problemom.

Govori o tem, da letno zavržemo okoli 2 milijona plastičnih vrečk na minuto. Letno se uporablja in odlaga okoli 500 milijard plastičnih skodelic. Na svetu so, kot posledica prekomerne količine plastičnih odpadkov, nastali trije veliki »smetarski« otoki: v osrednjem severnem Tihem oceanu, v Indijskem oceanu in v Atlantskem oceanu. Plastični predmeti v oceanu ubijajo živali ali se zataknejo v njihovem telesu. Ljudje moramo najti način, kako odstraniti smeti, ki so že v oceanu. Druga možnost je zmanjšati onesnaževanje ali ga popolnoma ustaviti.

Slika 2: Deset najpogostejših stvari, najdenih v oceanu.

Slika 3: Deset stvari, ki jih lahko narediš za morje brez odpadkov.

Na medsebojni hospitaciji, ki sem jo izvedel septembra 2018, smo se dogovorili, da bodo učenci zbirali podatke o številu kosov posameznih odpadkov v njihovem gospodinjstvu. Učenci so sami predlagali, kaj bi lahko zbirali. Učenci so skupaj z učiteljico oblikovali tabelo. V pripravljeno tabelo v zvezku so učenci dogovorjenih deset dni zapisovali podatke.



Slika 4: Primer učenčevega zapisa za spremljanje števila odpadkov.

Tabelo so izpolnjevali individualno, s pomočjo staršev. Dogovorili smo se, da bomo zbrane podatke obdelali na tehniškem dnevu v tednu otroka. Tehniški dan je potekal v računalniški učilnici. Vloga obeh učiteljev pri tem je bila, da učence ozavestiva o tem, kako pomembno je ločevati odpadke in kakšna je njihova vloga pri tem. Ta dan so učenci prinesli zapisane podatke ter najprej na karo papir narisali stolpčni prikaz. Stolpčni prikaz je prikazoval število kosov posameznih odpadkov v desetih dneh. Učenci pri risanju niso imeli težav, saj smo ponovili, kako narediti stolpčni grafikon, kako morajo biti označene osi, kaj prikazujemo na posamezni osi ter da mora prikaz vsebovati naslov in legendo. Sledilo je prepisovanje podatkov, ki so jih imeli zapisane v preglednicah, v vnaprej pripravljeno preglednico v programu za delo s preglednicami. Učencem sem vnaprej pripravil preglednico, da bi več časa namenili pogovoru. Ker je bila to njihova tretja ura pri delu s preglednicami, smo najprej ponovili, kako vnesemo posamičen podatek v celico in kako se premikamo med celicami po stolpcu in vrsticah. Nato so učenci začeli z vnašanjem svojih podatkov in tukaj niso imeli večjih težav. Ker je po STEM korakih v ospredju učenec, so boljši učenci demonstrirali posamičen izračun ostalim, sam pa sem nudil pomoč učencem s posebnimi potrebami in tistim, ki se jim je pri posameznem koraku ustavilo. Ko je bila preglednica izpolnjena, je učenec demonstriral, kako seštejemo število vseh kosov posameznega odpadka po stolpcih. Uporabil je obrazec za vsoto. Naslednji učenec je pokazal, kako izračunamo povprečje posameznega odpadka ter opozoril ostale v razredu, da morajo biti pozorni na to, kateri podatki so označeni in da ne smejo zraven označiti podatka iz obrazca za samodejno vsoto. Nato sta še dva učenca prikazala, kako uporabimo obrazec za prikaz najmanjše oz. največje vrednosti ter zopet opozorila, da ne smemo označiti celic, v katerih je izračunana samodejna vsota ter povprečje kosov posameznih odpadkov. Učenci so nato predlagali, da bodo število kosov za en mesec izračunali tako, da bodo podatek iz celice, kjer je izračunana samodejna vsota za 10 dni, množili s 3.

Zbiranje odpadkov po posameznem gospodinjstvu (zapisuj število kosov)							
Zap. št.	**Dan/ datum**	**Vrečke (prozorne, plastične od hrane)**	**Plastenke (od vode, soka, mleka …)**	**Embalaža (od jogurtov, skute, kisle smetane, sladoleda …)**	**Pločevinke (od piva, pasje hrane, paštete, konzerve …)**	**Časopisi, revije**	**Reklame**
Seštevek vseh kosov (obrazec za vsoto)							
Povprečje (obrazec za povprečje)							
Najmanjša vrednost (min.)							
Največja vrednost (maks.)							
Zbrani kosi na mesec (seštevek vseh kosov · 3)							
Zbrani kosi na leto (zbrani kosi na mesec · 12)							

Slika 5: Zbiranje odpadkov po posameznem gospodinjstvu (zapisano število kosov posazmnega odpadka).

Nato so učenci predlagali, da bi lahko na podoben način, kot smo prej izračunali število kosov posameznega odpadka na mesec, izračunali število kosov posameznega odpadka na leto. Sklenili smo, da celico, v kateri imajo izračunano vrednost za en mesec, pomnožimo s številom 12 ter tako dobimo podatek za število kosov posameznega odpadka za celo leto.

Učenci so z uporabo računalniškega programa tudi risali prikaze.

Ko je bila preglednica izpolnjena, smo se z učenci pogovarjali o dobljenih rezultatih. Podatke so učenci primerjali med seboj. Po pregledu vseh podatkov smo ugotovili, da je v gospodinjstvih največ plastične embalaže in pločevink ter manj časopisa in reklam, čeprav tudi teh ni zanemarljivo malo. Naredili smo tudi skupen zbirnik in analizirali stanje. Izračunali smo tudi povprečje za posamezen odpadek v gospodinjstvih učencev. Nato pa se je razvila debata o tem, ali bi lahko izračunali število odpadkov v občini Škocjan. Eden od učencev je predlagal, da bi bilo to mogoče, če bi poznali število gospodinjstev. Ta podatek sem pridobil od občine Škocjan, ko sem pisal samo pripravo. Z uporabo povprečja za posamezen odpadek v gospodinjstvih učencev, smo izračunali približno količino odpadkov za celotno občino. Učenci so pri tem ugotavljali, da so številke, čeprav občina Škocjan ne sodi med večje občine po velikosti, zelo velike. To smo počeli z namenom ozavestiti učence, da je treba odpadke ločevati. Nekatere odpadke lahko ponovno uporabimo oziroma iz njih izdelamo nov izdelek. Izdelek iz plastike lahko nadomestimo z izdelkom iz drugega materiala. Prišli smo do ugotovitve, da se vse začne doma in da mi sveta ne bomo spremenili. Lahko pa pripomoremo k temu tako, da doma začnemo z bolj racionalno uporabo plastične embalaže ter pripomoremo, da se čim več stvari reciklira in ponovno uporabi.

Nadaljnje delo je potekalo v treh skupinah. Učenci so v prvi skupini izdelali kubični meter (iz papirja ter plastenk). S štetjem posamičnih plastenk so ocenili število plastenk v enem kubičnem metru ter izračunali, koliko plastenk tvori 1 m^3. Učenci, ki so izdelovali kubični meter iz papirja, so preštevali število kosov v kubičnem metru. Nato smo odšli nazaj v računalniško učilnico. Najprej smo na tablo napisali rezultate obeh kubičnih metrov; papirja in plastenk. Število plastenk v enem kubičnem metru je bilo 432, število kosov časopisa in revij pa 12.800. Razvila se je debata, kako bi izračunali, koliko kubikov posameznega odpadka je v enem letu. To smo izračunali tako, da smo delil letni seštevek v občini Škocjan s številom kosov v 1 m^3 in tako dobil letni izračun zbranih kosov v kubičnih metrih.

Učenci so imeli nekaj težav pri izdelavi kubičnega metra papirja in enako pri izgradnji kubičnega metra iz plastenk. Papir jim je večkrat padal na tla in enako se je dogajalo s plastenkami. Učenci so se v skupini zelo povezali ter si med seboj pomagali. Povedali so, da jim je takšen način dela prijeten in bi ga želeli ponoviti.

Slika 6: Kubični meter iz papirja.

Slika 7: Izdelava kubičnega metra iz plastenk.

V drugi skupini so izdelovali plakate s sporočili za ozaveščanje o nastalem stanju ter konkretnih ukrepih za zmanjšanje odpadkov doma. Podatke so učenci črpali iz podatkov, ki so jih izvedeli pri pouku, v pomoč pa jim je bila tudi tablica. Plakati so bili razstavljeni po šoli in kasneje smo si jih skupaj ogledali ter se o njih pogovorili.

Slika 8: Nevarni odpadki v oceanu.

Slika 9: Zmanjšajmo porabo plastike, da ohranimo življenja v oceanu.

V tretji skupini so prinesene odpadke predelali v nove izdelke. V učilnicah tehnike in računalniški učilnici so posadili rože v prineseno embalažo. Izdelali so torbice in namizno igro šah. Nastale so tudi peresnice in torbice iz odpadnega usnja in tekstila.

Slika 10: Na novo nastali izdelki iz odpadne plastične embalaže.

Slika 11: Na novo nastale torbice iz odpadnega blaga.

Na šolskem hodniku smo mentorji ob pomoči učencev pripravili razstavo, ki so si jo lahko ogledali vsi učenci in zaposleni na naši šoli. Odzivi so bili odlični.

Zaključek

Ocenjujem, da so bile dejavnosti uspešno izvedene, saj so bili učenci ob koncu zelo zadovoljni, kar so zapisali tudi na evalvacijskem vprašalniku. Dejavnosti so potekale v tednu otroka. Medpredmetno smo povezali naravoslovje, matematiko, angleščino, tehniko in tehnologijo ter likovno umetnost. Z dejavnostmi bomo glede na problematiko nadaljevali tudi v prihodnje. Najbolj učinkovito je bilo, da so učenci dobili vpogled, koliko smeti proizvedemo, kaj se dejansko dogaja s smetmi ter ozavestili, zakaj je ločevanje potrebno. V prihodnje bi morda dlje časa beležili količino smeti in poiskali nove ideje za ponovno uporabo posameznih plastik.

Literatura

[1] https://www.youtube.com/watch?v=bMncyN_C-pQ&t=7s (10. 9. 2018).

[2] https://sites.google.com/site/eec344krystal/engineering-design-process-group-work (9. 9. 2018).

[3] https://www.eie.org/overview/engineering-design-process (8. 9. 2018).

[4] https://www.nap.edu/read/18290/chapter/15 (8. 9. 2018).

[5] https://ceeo.tufts.edu/documents/conferences/2010kwkccwljcrmbim.pdf (8. 9. 2018).

[6] https://www.iteea.org/File.aspx?id=87312&v=1ec40a5c (8. 9. 2018).

Uporaba žepnega računala pri preiskovanju številskih vzorcev

Mag. Sonja Rajh
Zavod RS za šolstvo

Izvleček

Premišljena uporaba numeričnega žepnega računala pripomore k boljšemu razumevanju matematičnih vsebin, pomaga pri reševanju problemov, učence motivira, spodbuja njihovo ustvarjalnost in vedoželjnost, poveča njihovo samozavest in samozaupanje v lastno matematično znanje ter pozitivno vpliva na njihov odnos do matematike.

V tem prispevku, ki je nadaljevanje prispevka ***Z žepnim računalom usvajamo nove vsebine pri pouku matematike v osnovni šoli,*** objavljenim v prejšnji številki revije, so predstavljeni primeri aktivnosti, pri katerih učenci uporabijo numerično računalo za preiskovanje različnih zakonitosti v številskih vzorcih.

Ključne besede: preiskovanje, številski vzorci, numerično računalo, pouk matematike

Use of Calculator in Researching Numerical Patterns

Abstract

A deliberate use of a calculator contributes to a better understanding of mathematical contents, facilitates problem solving, motivates students, encourages their creativity and curiosity, improves their self-esteem and confidence in their mathematical skills, and positively affects their approach to mathematics.

The article is a continuation of the article entitled ***Learning New Content in Primary School Mathematics Class Using a Calculator***, published in the previous issue of the magazine, and describes examples of activities where students use a calculator to study the laws behind various numerical patterns.

Keywords: research, numerical patterns, numeric calculator, mathematics class

Uvod

V različnih virih pogosto zasledimo naloge s številskimi izrazi, pri katerih učenci preiskujejo, katero računsko operacijo uporabiti, da bo veljala enakost (npr. $78 \square 95 \square 123 = 11763$), ali katero število oziroma števko vstaviti v številski izraz, da dobijo dano vrednost ($4\square \cdot \square 1 = 3408$), ali pa v izraz postavijo oklepaje, da s tem določijo vrstni red računskih operacij (Glejte nalogo iz NPZ, ki je na Sliki 1).

Učenci lahko preiskujejo, kaj se zgodi z vsoto/razliko/zmnožkom/količnikom/kvadratom … dveh/treh … števil, če enega od členov množijo/delijo z danim številom ali pa mu poljubno število prištejejo/odštejejo.

Pri takih in podobnih primerih si lahko učenci pri računanju pomagajo tudi z numeričnimi računali. S sistematičnim poskušanjem vstavljajo posamezni znak v izraz, ki je zapisan na zaslonu računala, ter nato računajo ustrezno vrednost številskega izraza. Ob tem se naučijo, da ni treba ponovno vpisovati celotnega izraza v računalo, če smo se pri tipkanju zmotili, ampak se s smernim kazalcem premaknemo na mesto v izrazu, ki ga želimo spremeniti, brišemo znak in vpišemo novega, ter nato izračunamo vrednost spremenjenega izraza. Podobno strategijo reševanja učenci usvojijo tudi pri preiskovanju vzorcev števil, ki so opisani v nadaljevanju.

Delovni list s številskimi vzorci za spodbujanje uporabe numeričnega računala pri pouku matematike v osnovni šoli

Na delovnem listu Številski vzorci (Priloga) je zbranih 10 primerov različnih preiskovalnih dejavnosti s številskimi vzorci. Seveda ni mišljeno, da bi učenci vse primere rešili hkrati. Učitelj jih glede na njihov namen učenja razporedi v pouk matematike.

a) V danem izrazu postavi oklepaje tako, da bo vrednost izraza manjša od 43. Vrednost izraza z oklepaji tudi izračunaj.

   $4 + 6 \cdot 7 - 3 =$

b) V danem izrazu postavi oklepaje tako, da bo vrednost izraza večja od 43. Vrednost izraza z oklepaji tudi izračunaj.

   $4 + 6 \cdot 7 - 3 =$

c) V danem izrazu postavi oklepaje tako, da bo vrednost izraza enaka 0.

   $7 + 3 \cdot 7 - 7 - 7 =$

Slika 1: Naloga iz NPZ, ki so jo učenci reševali leta 2010 v 6. razredu in nato ponovno leta 2013 v 9. razredu.
Vir: RIC

Pri prvih štirih primerih je na dnu strani v pravokotniku z zeleno barvo zapisan namig za učence, če nikakor ne ugotovijo pravila v vzorcu in ne najdejo posplošitve. Predlagamo, da ta namig učitelj izreže iz učnega lista in ga učencem ponudi le, če ga potrebujejo.

V 5., 6., 7. in 8. primeru ima učenec na voljo več številskih vzorcev. Predlagamo, da učitelj ponudi le enega od njih, ali pa si učenec za preiskovanje sam izbere primer vzorca, ki ga je pritegnil. V teh primerih smo namenoma zbrali več vzorcev, ker smo želeli učiteljem ponuditi večji nabor primerov.

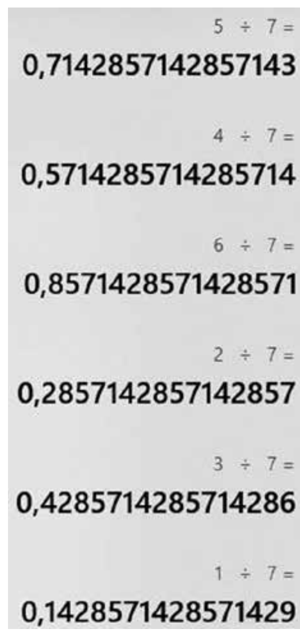
Pred prvim primerom številskih vzorcev je na delovnem listu za učenca zapisano: »Z žepnim računalom lahko računaš vrednosti podobnih izrazov tudi tako, da ne brišeš celotnega izraza, ko si izračunal njegovo vrednost. V zapisanem izrazu samo spreminjaš ali brišeš/vstavljaš nova števila.« Predlagamo, da učitelj z uporabo demonstracijskega pripomočka za delo z numeričnimi računali (emulatorja) vsem učencem hkrati pokaže, kako lahko to storijo, ali pa vsakemu posebej to ponazori na njegovem numeričnem računalu. (Slike 2–4).

Slika 2: Številski izraz, ki ga želimo dopolniti.

Slika 3: Znotraj oklepaja zapišemo, naj prišteje še 5.

Slika 4: Izračunana vrednost dopolnjenega številskega izraza.

Predvidevamo, da učenci uporabljajo numerično računalo, katerega zaslon prikazuje 10 števk. Predlagamo, da učenci za preiskovanje vzorca števil, ki imajo več kot 10 števk, uporabljajo katero od aplikacij za računanje na računalniku (Slika 5).



Slika 5: Uporaba aplikacije Kalkulator na računalniku.

Delovni list Številski vzorci lahko uporabljamo v različnih razredih osnovne šole. Odvisno od matematičnega predznanja učencev (npr. ali že poznajo potence, korene, racionalna števila).

Namen in cilj tega delovnega lista je, da učenci opazujejo in prepoznajo pravilo v številskem vzorcu, pravilo ubesedijo, vzorec nadaljujejo, znajo poiskati posplošitve ter ubesediti ugotovitve v korektnem matematičnem jeziku. Pri računanju vrednosti številskih izrazov si pomagajo z numeričnim računalom, saj v teh primerih spretnosti računanja ne smejo biti v ospredju, če se želijo učenci osredotočiti na višje miselne procese.

Viri in literatura

Žakelj, A. idr. (2011). *Učni načrt. Program osnovna šola. Matematika*. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo, http://www.mizs.gov.si/fileadmin/mizs.gov.si/pageuploads/podrocje/os/prenovljeni_UN/UN_matematika.pdf

MATEMATIKA preizkus znanja, Redni rok, 2. obdobje, torek, 10. maj 2010, RIC. Dostopno na povezavi: https://www.ric.si/mma/N101-401MAT-2-1/2010061813142869/

Številski vzorci

Z žepnim računalom lahko računaš vrednosti podobnih številskih izrazov tudi tako, da ne brišeš celotnega izraza, ko si izračunal njegovo vrednost. V zapisanem izrazu samo spreminjaš ali brišeš/vstavljaš nova števila.

Uporabi pri svojem žepnem računalu.

1. primer

Z uporabo žepnega računala izračunaj vrednosti naslednjih številskih izrazov.

$1^3 =$	$1^2 =$
$1^3 + 2^3 =$	$(1 + 2)^2 =$
$1^3 + 2^3 + 3^3 =$	$(1 + 2 + 3)^2 =$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 =$	$(1 + 2 + 3 + 4)^2 =$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 =$	$(1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2 =$

Nadaljuj oba vzorca. Zapiši naslednjih pet primerov obeh številskih vzorcev.

Kaj ugotoviš? Zapiši vse ugotovitve.

Oblikuj splošni algebrski zapis.

Namig

Primerjaj vrednosti izrazov v levem in desnem stolpcu.

Ali velja:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2$$

$$\dots$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 + 10^3 + 11^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11)^2$$

Zapiši manjkajoče eksponente potenc v splošnem algebrskem zapisu:

$$1^{\square} + 2^{\square} + 3^{\square} + \dots + n^{\square} = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^{\square}$$

2. primer

Z uporabo žepnega računala izračunaj vrednosti naslednjih številskih izrazov.

$0^3 + 1^3 =$	$1 =$
$1^3 + 2^3 =$	$2 + 3 + 4 =$
$2^3 + 3^3 =$	$5 + 6 + 7 + 8 + 9 =$
$3^3 + 4^3 =$	$10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 =$

Nadaljuj vzorca. Zapiši naslednje tri primere obeh številskih vzorcev.

Kaj ugotoviš? Zapiši vse ugotovitve.

Namigi

- Koliko zaporednih naravnih števil seštevaš v vsaki posamezni vrstici desnega vzorca?
  Ali je število teh seštevancev desnega stolpca v povezavi z osnovami potenc levega stolpca?
- Opazuj zadnji seštevanec desnega vzorca. V kakšni povezavi je z osnovo druge potence levega vzorca?
- Primerjaj vrednosti izrazov v levem in desnem stolpcu.
  Ali velja enakost:

$$2^3 + 3^3 = 5 + 6 + 7 + 8 + 9$$

3. primer

Z uporabo žepnega računala izračunaj vrednosti naslednjih številskih izrazov.

$1 =$	$1^2 =$
$1 + 3 =$	$2^2 =$
$1 + 3 + 5 =$	$3^2 =$
$1 + 3 + 5 + 7 =$	$4^2 =$
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 =$	$5^2 =$

Nadaljuj oba vzorca. Zapiši naslednjih pet primerov obeh številskih vzorcev.

Kaj ugotoviš? Zapiši vse ugotovitve.

Oblikuj splošni algebrski zapis.

Namigi

- Koliko seštevancev je v levem vzorcu? Katera števila seštevaš?
- Katero število kvadriraš v desnem stolpcu?
- Ali opaziš kakšno povezavo med številom seštevancev levega vzorca in osnovo potence desnega vzorca?
- Ali v levem vzorcu seštevamo vsa zaporedna naravna števila?
- Ali sta vrednosti izrazov v levem in desnem stolpcu enaki?

Pomoč

Izberi vsaj pet naravnih števil.
Vstavi jih v enakost:

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

Primerjaj z zgornjimi izračuni.

4. primer

Z uporabo žepnega računala izračunaj vrednosti naslednjih številskih izrazov.

$1 =$	$1^3 =$
$3 + 5 =$	$2^3 =$
$7 + 9 + 11 =$	$3^3 =$
$13 + 15 + 17 + 19 =$	$4^3 =$
$21 + 23 + 25 + 27 + 29 =$	$5^3 =$
$31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 =$	$6^3 =$
$43 + 45 + 47 + 49 + 51 + 53 + 55 =$	$7^3 =$

Nadaljuj oba vzorca. Zapiši naslednje tri primere obeh številskih vzorcev.

Kaj ugotoviš? Zapiši vse ugotovitve.

Namigi

- Koliko seštevancev je v levem vzorcu? Katera števila seštevaš?
- Kateri vzorec opaziš v desnem stolpcu?
- Ali opaziš kakšno povezavo med številom seštevancev levega vzorca in osnovo potence desnega vzorca?
- Ali v levem vzorcu seštevamo vsa zaporedna naravna števila?
- Ali sta vrednosti izrazov v levem in desnem stolpcu enaki?

5. primer

Z uporabo žepnega računala izračunaj vrednosti naslednjih številskih izrazov.

Opazuj številske vzorce in zapiši vse ugotovitve. Utemelji svoje ugotovitve.

$$1 \cdot 8 + 1 =$$
$$12 \cdot 8 + 2 =$$
$$123 \cdot 8 + 3 =$$
$$1234 \cdot 8 + 4 =$$
$$12345 \cdot 8 + 5 =$$
$$123456 \cdot 8 + 6 =$$
$$1234567 \cdot 8 + 7 =$$
$$12345678 \cdot 8 + 8 =$$
$$123456789 \cdot 8 + 9 =$$

$$9 \cdot 9 + 7 =$$
$$98 \cdot 9 + 6 =$$
$$987 \cdot 9 + 5 =$$
$$9876 \cdot 9 + 4 =$$
$$98765 \cdot 9 + 3 =$$
$$987654 \cdot 9 + 2 =$$
$$9876543 \cdot 9 + 1 =$$
$$98765432 \cdot 9 + 0 =$$

$$1 \cdot 9 =$$
$$12 \cdot 9 =$$
$$123 \cdot 9 =$$
$$1234 \cdot 9 =$$
$$12345 \cdot 9 =$$
$$123456 \cdot 9 =$$
$$1234567 \cdot 9 =$$
$$12345678 \cdot 9 =$$
$$123456789 \cdot 9 =$$

$$1 \cdot 9 + 2 =$$
$$12 \cdot 9 + 3 =$$
$$123 \cdot 9 + 4 =$$
$$1234 \cdot 9 + 5 =$$
$$12345 \cdot 9 + 6 =$$
$$123456 \cdot 9 + 7 =$$
$$1234567 \cdot 9 + 8 =$$
$$12345678 \cdot 9 + 9 =$$
$$123456789 \cdot 9 + 10 =$$

$$1 \cdot 12345679 \cdot 9 =$$
$$2 \cdot 12345679 \cdot 9 =$$
$$3 \cdot 12345679 \cdot 9 =$$
$$4 \cdot 12345679 \cdot 9 =$$
$$5 \cdot 12345679 \cdot 9 =$$
$$6 \cdot 12345679 \cdot 9 =$$
$$7 \cdot 12345679 \cdot 9 =$$
$$8 \cdot 12345679 \cdot 9 =$$
$$9 \cdot 12345679 \cdot 9 =$$

$$999999 \cdot 1 =$$
$$999999 \cdot 2 =$$
$$999999 \cdot 3 =$$
$$999999 \cdot 4 =$$
$$999999 \cdot 5 =$$
$$999999 \cdot 6 =$$
$$999999 \cdot 7 =$$
$$999999 \cdot 8 =$$
$$999999 \cdot 9 =$$
$$999999 \cdot 10 =$$

6. primer

Preiskuj številske vzorce. Zapiši vse ugotovitve.

Napovej in zapiši še nekaj nadaljnjih primerov posameznega vzorca. Nato vrednosti preveri z žepnim računalom.

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 &= \\ 11 \cdot 11 &= \\ 111 \cdot 111 &= \\ 1111 \cdot 1111 &= \\ 11111 \cdot 11111 &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9 \cdot 9 &= \\ 99 \cdot 99 &= \\ 999 \cdot 999 &= \\ 9999 \cdot 9999 &= \\ 99999 \cdot 99999 &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7 \cdot 9 &= \\ 77 \cdot 99 &= \\ 777 \cdot 999 &= \\ 7777 \cdot 9999 &= \\ 77777 \cdot 99999 &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7^2 &= \\ 67^2 &= \\ 667^2 &= \\ 6667^2 &= \\ 66667^2 &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{16} &= \\ \sqrt{1156} &= \\ \sqrt{111556} &= \\ \sqrt{11115556} &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1\cdot 2} &= \\ \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3} &= \\ \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4} &= \\ \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5} &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1} &= \\ \sqrt{1+3} &= \\ \sqrt{1+3+5} &= \end{aligned}$$

Vrednost številskih izrazov lahko izračunaš tudi z uporabo aplikacij za računanje na računalniku. Tam lahko zapisuješ števila, ki imajo več kot 10 števk.

Uporabi eno od aplikacij za računanje na računalniku in zapiši še nekaj nadaljevanj številskih vzorcev.

Še sam poišči zanimiv številski vzorec.

7. primer

Preiskuj naslednje številske vzorce. Napovej in zapiši še naslednjih šest primerov izbranih vzorcev. Nato preveri vrednosti z žepnim računalom ali eno od aplikacij za računanje na računalniku.

Zapiši vse ugotovitve.

$$987654321 \cdot 9 \cdot 1 =$$
$$987654321 \cdot 9 \cdot 2 =$$
$$987654321 \cdot 9 \cdot 3 =$$

$$10^2 - 10^1 + 1 =$$
$$10^4 - 10^2 + 1 =$$
$$10^6 - 10^3 + 1 =$$
$$10^8 - 10^4 + 1 =$$

$$63 \cdot 12 =$$
$$63 \cdot 123 =$$
$$63 \cdot 1234 =$$
$$63 \cdot 12345 =$$

$$7 \cdot 77 =$$
$$7 \cdot 777 =$$
$$7 \cdot 7777 =$$

$$15873 \cdot 7 =$$
$$15873 \cdot 14 =$$
$$15873 \cdot 21 =$$
$$15873 \cdot 28 =$$

$$37 \cdot 3 =$$
$$37 \cdot 6 =$$
$$37 \cdot 9 =$$
$$37 \cdot 12 =$$

$$79 \cdot 9 =$$
$$79 \cdot 18 =$$
$$79 \cdot 27 =$$
$$79 \cdot 36 =$$

8. primer

Z uporabo ene od aplikacij za računanje na računalniku (ki izpisuje več kot 10 števk), izračunaj naslednje količnike. Opazuj nastali številski vzorec. Zapiši ugotovitve.

1 : 7 =
3 : 7 =
2 : 7 =
6 : 7 =
4 : 7 =
5 : 7 =

1 : 17 =
10 : 17 =
15 : 17 =
14 : 17 =
4 : 17 =
6 : 17 =
9 : 17 =
5 : 17 =
16 : 17 =
7 : 17 =
2 : 17 =
3 : 17 =
13 : 17 =
11 : 17 =
8 : 17 =
12 : 17 =

1 : 11 =
2 : 11 =
3 : 11 =
4 : 11 =
5 : 11 =
6 : 11 =
7 : 11 =
8 : 11 =
9 : 11 =
10 : 11 =

Razišči še količnike z deliteljem 13 (oziroma 18, 19, 23, 3, 6, 9 …).

9. primer

Z uporabo žepnega računala preveri, da velja:

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 = 5^2$

$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1 = 19^2$

Poišči nekaj podobnih primerov.

10. primer

Oglej si zapisana primera. Kaj imata skupnega?

$21^2 - 12^2 = 441 - 144 = 297$

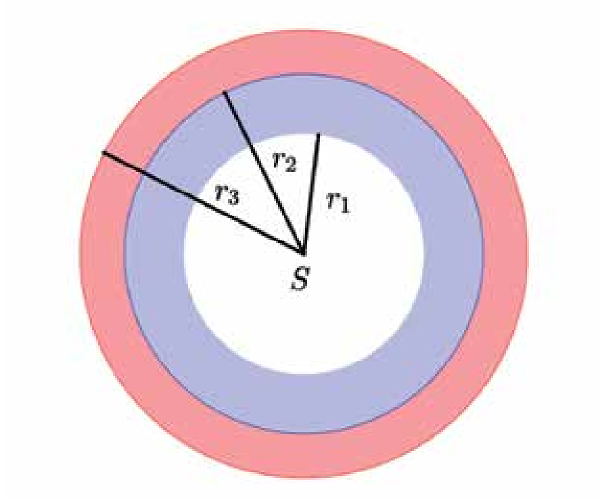
$31^2 - 13^2 = 961 - 169 = 792$

Zapiši še sam nekaj podobnih primerov. Preiskuj. Zapiši ugotovitve.

Ploščinsko enaka kolobarja in še kaj

dr. Marko Razpet

Del ravnine med dvema krožnicama, od katerih je manjša v celoti v večji, je *krožni kolobar*, v nadaljevanju kar *kolobar*. Če imata obe krožnici isto središče, govorimo o *koncentričnem kolobarju*, sicer pa o *ekscentričnem kolobarju*. Če je polmer manjše krožnice r_1, večje pa r_2, je ploščina kolobarja v obeh primerih enaka $p = \pi r_2^2 - \pi r_2^2 = \pi(r_2^2 - r_2^2)$.



Slika 1: Stikajoča se koncentrična kolobarja.

Denimo, da krožnicama s polmeroma r_1 in r_2 s središčem v točki S pridružimo še krožnico s polmerom r_3, prav tako s središčem v S (Slika 1). Pri tem velja relacija $r_1 < r_2 < r_3$. Zanima nas, kdaj je ploščina kolobarja med prvima dvema krožnicama enaka ploščini kolobarja med zadnjima dvema. To se pravi, da nas zanima, kdaj je $\pi(r_2^2 - r_1^2) = \pi(r_3^2 - r_2^2)$ oziroma po krajšanju s π, kdaj je $r_2^2 - r_1^2 = r_3^2 - r_2^2$. Zadnji razliki označimo z d, kar pomeni, da sta tedaj ploščini kolobarjev enaki πd. Kvadrati vseh treh polmerov morajo zato sestavljati aritmetično zaporedje r_1^2, r_2^2, r_3^2 z razliko d. To zaporedje lahko zapišemo tudi v obliki $r_2^2 - d, r_2^2, r_2^2 + d$. Polmeri krožnic pri izbranem r_2 in d so potemtakem $r_1 = \sqrt{r_2^2 - d}, r_2, r_3 = \sqrt{r_2^2 + d}$.

Naloga bi bila lahko s tem končana, če nas ne bi zanimalo, ali se nemara ne da poiskati takih pozitivnih *racionalnih števil* r_1, r_2, r_3 in takega *naravnega števila* d, da bo vsak od obeh kolobarjev imel ploščino πd. To pomeni, da moramo poiskati pozitivna racionalna števila r_1, r_2, r_3 in naravno število d, za katera veljata enačbi

$$r_2^2 - d = r_1^2,\ r_2^2 + d = r_3^2. \tag{1}$$

Po navadi d kar izberemo in iščemo r_1, r_2, r_3. Naloga, rešiti sistem (1), je stara že okoli 1000 let. Z njim so se ukvarjali arabski matematiki in Leonardo iz Pise (1170–1250), bolj znan kot Fibonacci. Leonardo je nalogo rešil za $d = 5$: $r_1 = 31/12$, $r_2 = 41/12$, $r_3 = 49/12$. V resnici je rešitev nešteto. Nalogo rešijo na primer tudi

$$r_1 = \frac{249563579992463717493803519}{5354229862821602092291248},$$

$$r_2 = \frac{249850594047271558364480641}{5354229862821602092291248},$$

$$r_3 = \frac{250137278774864229623059201}{5354229862821602092291248},$$

kar dobimo s teorijo eliptičnih krivulj, s katerimi so povezani problemi kongruentnih števil.

Naravno število d, za katero obstajajo pozitivna racionalna števila r_1, r_2, r_3, ki rešijo sistem (1), imenujemo *kongruentno število*. Število 5 je kongruentno. Pierre de Fermat (1601–1665) je dokazal, da število 1 ni kongruentno. Posledično niso kongruentni kvadrati naravnih števil. Če bi namreč $d = n^2$ bilo kongruentno število za naravno število $n > 1$, bi sistem $r_2^2 - n^2 = r_1^2,\ r_2^2 + n^2 = r_3^2$ imel rešitev v pozitivnih racionalnih številih r_1, r_2, r_3. Potem bi lahko zapisali $(r_2/n)^2 - 1 = (r_1/n)^2$, $(r_2/n)^2 + 1 = (r_3/n)^2$, kar bi pomenilo, da za pozitivna racionalna števila $r_1' = r_1/n, r_2' = r_2/n, r_3' = r_3/n$ veljata zvezi $r_2'^2 - 1 = r_1'^2,\ r_2'^2 + 1 = r_3'^2$. To pa pomeni, da je 1 kongruentno število, kar je protislovno z omenjeno Fermatovo ugotovitvijo. Kvadrati naravnih števil torej niso kongruentna števila.

Število 4 ni kongruentno, prav tako ne 2 in 3. Število 5 je najmanjše kongruentno število. Med 1 in 35 so naslednja kongruentna števila: 5, 6, 7, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 24, 28, 29, 30, 31, 34.

Podobno tudi dokažemo, da je število $d = k^2 d_1$, kjer je $k > 1$ naravno število, d_1 pa naravno število brez kvadratnega faktorja, kongruentno, kakor hitro je d_1 kongruentno. Kongruentno število brez kvadratnega faktorja imenujemo *primitivno kongruentno število*. Število 5 je primitivno kongruentno število, število $20 = 4 \cdot 5$ je kongruentno, toda ne primitivno kongruentno.

Ugotavljanje, ali je dano število d brez kvadratnega faktorja kongruentno, je trd oreh tudi za največje matematike. Znani kriteriji kongruentnosti so prezapleteni, da bi jih tukaj sploh omenjali. Razumljiva pot do kongruentnih števil vodi prek pitagorejskih trikotnikov. To so pravokotni trikotniki s celoštevilskimi stranicami a, b, c. Pri tem sta a, b kateti, c pa hipotenuza, tako da velja $a^2 + b^2 = c^2$. Dovolj se je omejiti na *primitivne* pitagorejske trikotnike, pri katerih a, b, c nimajo skupnih faktorjev. Vedno lahko predpostavimo, da je $a < b < c$. Seveda velja še relacija $b - a < c < a + b$. Z lahkoto preverimo enakosti

$$c^2 - 2ab = (b - a)^2,\ c^2 + 2ab = (a + b)^2. \tag{2}$$

Sistem (2) primerjamo s sistemom (1) in takoj ugotovimo, da je $d = 2ab$ kongruentno število, če vzamemo $r_1 = b - a$, $r_2 = c$, $r_3 = a + b$.

Za najenostavnejši pitagorejski trikotnik s stranicami $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ je $r_1 = 1$, $r_2 = 5$, $r_3 = 7$, $d = 24$. Ker je $d = 24 = 4 \cdot 6$, iz
$5^2 - 24 = 1^2$, $5^2 + 24 = 7^2$
po deljenju s $4 = 2^2$ dobimo
$(5/2)^2 - 6 = (1/2)^2$, $(5/2)^2 + 6 = (7/2)^2$.

Število 6 je zato primitivno kongruentno.

Za pitagorejski trikotnik s stranicami $a = 5$, $b = 12$, $c = 13$ dobimo $r_1 = 7$, $r_2 = 13$, $r_3 = 17$, $d = 120$. Ker je $d = 120 = 4 \cdot 30$, je 30 primitivno kongruentno število in velja:
$(13/2)^2 - 30 = (7/2)^2$, $(13/2)^2 + 30 = (17/2)^2$.

Tako bi lahko nadaljevali s pitagorejskimi trikotniki in našli nova kongruentna števila. Ta pot je sicer preprosta, toda neučinkovita in zamudna. Traja lahko dolgo časa, preden ugotovimo, če imamo srečo, ali je število d kongruentno ali ne. Zato matematiki na vse kriplje iščejo metode, ki bi odgovorile na to vprašanje in nam obenem dale racionalna števila r_1, r_2, r_3.

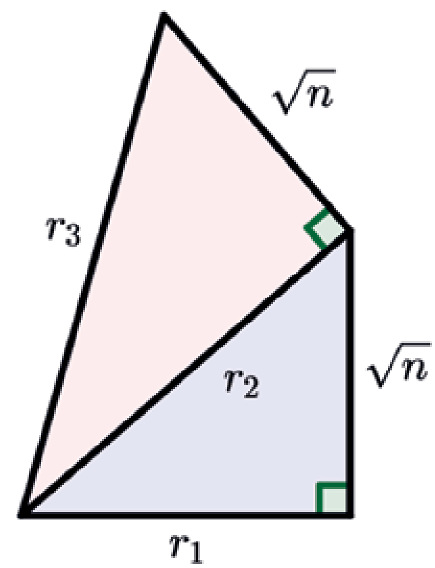
Če enačbi v (2) delimo s 4, dobimo:

$$(c/2)^2 - ab/2 = (b/2 - a/2)^2, \; (c/2)^2 + ab/2 = (a/2 + b/2)^2. \quad (3)$$

Enačbi veljata za vsak pravokoten trikotnik. Izraz $ab/2$ je ploščina pravokotnega trikotnika s stranicami a, b, c. Zato se je smiselno vprašati po pravokotnem trikotniku z racionalnimi stranicami a, b, c ($a < b < c$), katerega ploščina $ab/2$ je naravno število n.

Če vpeljemo
$r_1 = b/2 - a/2$, $r_2 = c/2$, $r_3 = a/2 + b/2$, $d = n$
v (3), dobimo
$r_2^2 - n = r_1^2,\ r_2^2 + n = r_3^2,$
kar pa je ravno sistem enačb (1). To pa pomeni, da obstaja pravokoten trikotnik z racionalnimi stranicami in ploščino n takrat in samo takrat, ko je n kongruentno število. Iz znanih r_1, r_2, r_3 takoj izračunamo stranice: $a = r_3 - r_1$, $b = r_1 + r_3$, $c = 2r_2$.

Za $n = 5$ dobimo na primer iz $r_1 = 31/12$, $r_2 = 41/12$, $r_3 = 49/12$ stranice $a = 3/2$, $b = 20/3$, $c = 41/6$. Seveda pa to ni edina rešitev.



Slika 2: Geometrijska predstavitev.

Povezavo med r_1, r_2, r_3 in n lahko predstavimo tudi geometrijsko (slika 2).

Viri

[1] J. H. Coates. (2005). Congruent Number Problem, *Pure and Applied Mathematics Quarterly, 1*, št. 1, str. 14–27.

[2] G. Kramarz. (1986). All Congruent Numbers Less than 2000, *Mathematische Annalen, 273*, str. 337–340.

[3] I. Vidav. (1986). O kongruentnih številih, *Obzornik za matematiko in fiziko*, *33*, št. 1, str. 1–8.

Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887–1920) – 1. del

mag. Milena Strnad in
Aleksander Simonič, mag. mat.
The University of New South Wales (Canberra), ACT, Australia

Izvleček

Članek v dveh delih prinaša podroben prikaz življenja in dela skrivnostnega indijskega matematičnega genija S. A. Ramanujana, ki vse od leta 1920 dalje navdušuje mlade Indijce za matematiko. Prvi del se osredotoči na njegovo mladost v Indiji, zaključi pa z vsebino znamenitih pisem med njim in angleškim matematikom G. H. Hardyjem. Članek obeležuje njegovo minulo 130. obletnico rojstva in prihajajočo 100. obletnico smrti, učiteljem pa ponudi zgodbo, da z njo lahko navdušijo tudi slovensko mladino za učenje in raziskovanje matematike.

Ključne besede: S. A. Ramanujan, G. H. Hardy, biografije

Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887–1920) – Part 1

Abstract

The main focus of this two-part article is a detailed account of the life and work of S. A. Ramanujan. Ever since 1920, this mysterious Indian mathematical genius has inspired young Indians to study mathematics. The first section examines his early years in India and concludes with the content of the celebrated letters between Ramanujan and the English mathematician G. H. Hardy. The article marks the recent 130th anniversary of Ramanujan's birth and the forthcoming centennial of his death. In addition, it provides a wealth of information for Slovenian teachers, who can use it to inspire future generations of students to learn and research mathematics.

Keywords: S. A. Ramamujan, G. H. Hardy, Biographies

Ramanujanova mladost

V Južni Indiji[1] se je v revni brahmanski in s hindujsko tradicijo prežeti družini trgovca s sariji K. Srinivasa Iyengarja, na domu svoje matere Komalattammal v vasici Erode, 22. decembra 1887 rodil **Srinivasa Aiyangar Ramanujan**. Bil je zelo zaželen otrok, za katerega je matematično in pevsko nadarjena, izobražena, odločna in pobožna mati trdila, da je po družinski prerokbi božji otrok, skozi katerega bo spregovorila družinska boginja Namagiri iz templja Namakkal. Spregovoril je šele s tremi leti in zelo hitro usvojil tamilščino, katere zapleteno abecedo sestavlja 12 soglasnikov, 18 samoglasnikov in njihovih 216 kombinacij. Še bolj pa je izstopal z izjemno matematično nadarjenostjo. Rad je imel števila in je z njimi že v rosni mladosti spretno računal. Od prvega leta starosti dalje je z manjšimi presledki 20 let bival v Kumbakonamu, živahnem mestu trgovcev, rokodelcev in templjev, ki je imelo takrat okoli 53000 prebivalcev.

Bil je svojeglav in živahen otrok, vzkipljivega značaja, ki se je zelo razburil, če ni bilo vse po njegovem. Stroga mati ga je zaščitila pred možnimi otroškimi prepiri tako, da mu je preprečevala druženje z vrstniki. Doma mu je tako vedenje dopuščala, ker ga je zaradi nadarjenosti občudovala, morda pa tudi zato, ker sta Ramanujanu do njegovega šestega leta po nekaj mesecih življenja umrla majhna bratca in sestrica. Brata, ki sta preživela, je dobil kot desetletnik in sedemnajstletnik, torej v času, ko je bil že pošteno vpet v šolanje.

S petimi leti je začel obiskovati bližnjo dveletno osnovno šolo *pial*, kjer so učencem urili spomin s prepevanjem, recitiranjem in prepisovanjem verzov iz hindujskih svetih knjig Ved. S sedmimi leti, ko je pred tem prve osnovnošolske korake poskušal narediti po več šolah po Južni Indiji, je šolanje nadaljeval na osnovni šoli Kangeyan v Kumbakonamu blizu svojega doma, ki danes ne obstaja več. Ko so pri matematiki prvič obravnavali deljenje, je

1 Danes je to v zvezni državi Tamil Nadu z glavnim mestom Chennai. Takrat se je država imenovala Tanyor, glavno mesto Madras, britanska kolonija Indija pa Britanska vladavina (British Raj; raj pomeni pravilo). To preimenovanje nekdanje kolonije Indije je storila kraljica Viktorija po svojem kronanju za cesarico Velike Britanije in Indije leta 1857. British Raj je prenehal obstajati z osamosvojitvijo Indije leta 1947.

takoj ugotovil, da učiteljeva razlaga, *če število deliš s samim seboj, dobiš vedno 1*, ni popolna, ker velja le za števila, različna od nič. Sošolcem je takoj nazorno razložil, da deljenje z 0 ni dovoljeno, ker bi v tem primeru dobili čudne rezultate. Sošolce, svojega učitelja in številne prijatelje je očaral z izjemno hitrim računanjem, saj je brez težav množil in razcepljal večmestna števila na prafaktorje. Njegov osnovnošolski učitelj je o njem dejal [7, str. 27]:

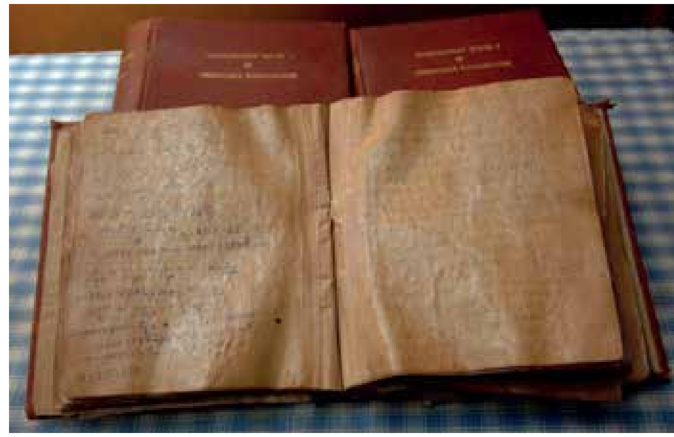
> *Ramanujan si zasluži več, kot obsega najvišja ocena, je izven možnosti meritve z običajnimi merili ocenjevanja. 100-odstotno znanje je zanj preslaba ocena.*

Slika 1: Ramanujanova otroška soba v Kumbakonamu

Večino svojega prostega časa je zaradi materine stroge vzgoje preživel doma na vrtu ali v sobi (Slika 1), kjer se je v osami zabaval tako, da je na prenosni tablici iz skrila (Slika 2) preverjal svoje enačbe in razne matematične igrice, kot so magični kvadrati. Svoja odkritja je skozi okno navdušeno razlagal vrstnikom.

Slika 2: B. C. Berndt[2] z Ramanujanovo tablico

Rezultate je Ramanujan začel zapisovati v angleščini na liste, ki so bili osnova za slavne *beležke*[3] (ang. Notebooks), glej sliki 3 in 4. Pogosto je zahajal tudi v hlad bližnjega svetišča, tam sanjaril, spal na peščenih tleh in po njih računal.



Slika 3: Originalne beležke, danes shranjene v knjižnici Univerze v Madrasu.

Novembra leta 1897 je kot najboljši v državi Tanyor pri vseh predmetih (angleščini, tamilščini, aritmetiki in geografiji) opravil izpite in se naslednje leto samo s polovično šolnino vpisal na Mestno visoko šolo v Kumbakonamu, oddaljeno komaj 20 minut hoda od doma. S svojo neverjetno matematično zmožnostjo si je tudi tu pridobil občudovanje prijateljev, čeprav ti pogosto niso razumeli njegovih razlag. Slovel je tudi kot izjemen pripovedovalec zgodb in šal, ki se jim je tudi sam prešerno smejal. Rad je pomagal. Tako je kot srednješolec univerzitetnim študentom, ki jih je srečeval na poti do šole, reševal matematične naloge. Znana je zgodba, da je rešitev $x = 9$, $y = 4$ sistema enačb $\sqrt{x} + y = 7, \sqrt{y} + x = 11$ dobil zgolj z bežnim pogledom. S tem si je leta 1902 pridobil velikega občudovalca in prijatelja Rajagopalacharija, ki mu je osem let kasneje, ko je bil Ramanujan v hudi eksistenčni krizi, pomagal.

Slika 4: Druga izdaja faksimil vseh treh beležk v dveh knjigah.

2 Bruce Carl Berndt (1939–) je ameriški matematik, ki deluje na področju analitične teorije števil. Zaslužen je za ohranitev in razlago Ramanujanovih neobjavljenih zapisov, o čemer je v soavtorstvu napisal in uredil več knjig. Leta 1996 je prejel Steelovo nagrado za pisanje v matematiki, ki jo podeljuje Ameriško matematično društvo, ter leta 2012 častni doktorat Univerze SASTRA v Kumbakonamu.

3 Ramanujan je zapustil tri zvezke (Slika 3), v katere je v obdobju 1903–1914 *beležil* svoja odkritja. Najobširnejša in najpomembnejša je *Druga beležka*, ki vsebuje 21 urejenih poglavij (252/355 str.), preostalo pa je neurejeno. Nastala je s prepisovanjem starejše *Prve beležke*, ki vsebuje 16 poglavij (134/214 str.). *Tretja beležka* ima samo 33 strani neurejenega materiala. B. C. Berndt je s sodelavci v letih 1985–1998 beležke opremil s komentarji in dokazi. Rezultat tega dela je pet knjig (2301 str.), vse izdane pri založbi Springer. Več o zgodovini in vsebini beležk lahko bralec poišče v [2], nekaj od tega pa bo bomo omenili v drugem delu.

Posebno vlogo sta v Ramanujanovi mladosti odigrali dve matematični knjigi: Loneyeva *Trigonometrija v ravnini*[4] in Carrov *Synopsis*[5].

Prvo je dobil v roke kot dvanajstletnik od starejših študentov. Knjiga ga je navdušila in še preden jo je prebral do konca, je samostojno odkril, da se funkciji sinus in kosinus lahko izrazita tudi z neskončnimi vrstami. Ko pa je pozneje v drugem delu Loneyeve knjige prebral, da je to izpeljavo poldrugo stoletje pred njim odkril že Leonhard Euler (1707–1783), je to spoznanje občutil kot nekaj sramotnega in je zato svoj zapis skril na domačem podstrešju. To kaže na njegovo izjemno občutljivost in notranjo nemoč premagati oseben, čeprav samo dozdeven poraz.

Drugo, zanj usodnejšo knjigo, je dobil pri petnajstih letih od študentov, ki so si jo izposodili v knjižnici Državnega kolidža v Kumbakonamu. V knjigi je zbranih in sistematično urejenih 4417 matematičnih formul, ki pa so v večini opremljene brez posebne razlage, z redkimi zgledi uporabe in skoraj nobenim dokazom. Formule, ki so pokrivale vsa bistvena spoznanja matematike 19. stoletja iz algebre, trigonometrije, diferencialnega in integralnega računa ter analitične geometrije, je v sklopu zasebnega tutorstva za pripravo študentov na izjemno zahteven izpit *Tripos*[6] na Cambridgeu več desetletij zapisoval matematični entuziast **George Shoobridge Carr** (1837–1914), ki pa mu ni uspelo v akademskih krogih in se je preživljal z inštruiranjem matematike. Opomniti moramo, da to nista edini knjigi, ki ju je Ramanujan poznal pred odhodom v Anglijo leta 1914, glej [5].

Ramanujana, ki je že poznal precejšen del klasične matematike, so formule v *Synopsisu* takoj očarale. Lotil se je njihovega preverjanja, po Carrovem zgledu pa je začel tudi sam v *Prvo beležko* dodajati vse več lastnih formul, ki jih je najverjetneje zaradi predragega papirja preverjal v pesku ali na tablici. Po njej je neprestano pisal, brisal pa s svojim desnim komolcem tako, da je nadlaket zvil k sebi in komolec uporabil za radirko. Kanigel v [7, str. 92] opisuje, kako mu je pozneje, v srečnem Ramanujanovem letu leta 1912, njegov prijatelj dejal:

Pravijo, da si genij.

Ramanujan mu je odgovoril:

Kakšen genij. Poglej moj komolec. Ta ti govori mojo zgodbo. Moj komolec dela genija iz mene.

To je dragocena Ramanujanova izjava o načinu njegovega dela. Vsem, ki so prej ali pozneje drezali vanj s vprašanjema *Kako delaš?* in *Kako razmišljaš?*, je odgovarjal, da on samo zapisuje formule, govorico bogov, ki mu jih prišepetava boginja Namagiri.

Zaključimo razdelek z Ramanujanovim najbolj znanim prispevkom s tega obdobja, *magičnimi kvadrati*, katerih vsebina sestavlja prvo poglavje v obeh beležkah in je izrazito starejša od preostalega rokopisa. Sledimo [3].

Magični kvadrat dimenzije $n \times n$ je sestavljen iz n^2 različnih naravnih števil, zloženih v n vrstic in n stolpcev tako, da so vsote po vrsticah, stolpcih in obeh diagonalah enake nekemu številu, ki ga imenujemo *magično število*. Prva magična kvadrata, ki ju je zapisal, sta

6	1	8
7	5	3
2	9	4

in

15	1	11
5	9	13
7	17	3

Ramanujan je uvodoma podal nekaj preprostih lastnosti magičnih kvadratov dimenzije 3×3. Naj bosta m_1 in m_2 vsoti števil v srednji vrstici in srednjem stolpcu ter c_1 in c_2 vsoti števil v prvi in drugi diagonali. Potem velja $3x = m_1 + m_2 + c_1 + c_2 - S$, kjer je S vsota vseh števil v kvadratu, x pa število v sredini kvadrata. Pri tem ni treba, da je kvadrat magičen. Če pa je, sledi $x = r/3$, kjer je r magično število. Opazimo, da za levi kvadrat velja $r = 15$, sredinsko število pa je 5, kar je v skladu s prejšnjo ugotovitvijo. Pozoren bralec lahko na zgornjih primerih opazi, da števila v sredinski vrstici in stolpcu ter obeh diagonalah tvorijo aritmetično zaporedje. Res! Naj bodo a, x, b ta števila. Potem je $a + x + b = r = 3x$ in s tem $a + b = 2x$. Sledi $x - a = b - x$, kar pomeni, da je zaporedje a, x, b aritmetično. V nadaljevanju je dodal nekaj možnih konstrukcij in dejanskih realizacij magičnih kvadratov dimenzij 3×3, 4×4 in 5×5. Navedimo le primer konstrukcije za $n = 4$:

$$\begin{array}{cccc} A+P & D+S & C+Q & B+R \\ C+R & B+Q & A+S & D+P \\ B+S & C+P & D+R & A+Q \\ D+Q & A+R & B+P & C+S \end{array}$$

kjer so *A, B, C, D* in P, Q, R, S poljubna nenegativna cela števila. Zapisal je poseben primer za $A = 1, B = 3, C = 7, D = 5$ in $P = 0, Q = 8, R = 1, S = 9$:

1	14	15	4
8	11	10	5
12	7	6	9
13	2	3	16

Kot zanimivost povejmo, da se zgornji magični kvadrat v permutirani različici pojavi v znameniti Dürerjevi gravuri *Melencolia I*. Ramanujan obravnava tudi konstrukcije večjih magičnih kvadratov iz manjših ter tako poda primera dimenzije 8×8, kjer je eden sestavljen iz štirih magičnih kvadratov dimenzije 4×4.

4 S. L. Loney, *Plane trigonometry*, 1st ed., Cambridge University Press, 1893.

5 Knjiga G. S. Carr, *A synopsis of elementary results in pure mathematics containing propositions, formulae, and methods of analysis, with abridged demonstrations*, London, F. Hodgson, Cambridge, Macmillan and Bowes, je bila izdana v dveh delih v letih 1880 in 1886. Upravičeno lahko sklepamo, da prav zaradi Ramanujanove vpletenosti *Synopsis* in s tem tudi Carr nista zatonila v pozabo.

6 Zelo zahteven izpit *Mathematical Tripos* je bil pogoj za diplomo BA. Nanj so se študenti pripravljali tri leta. Najboljši so dobili prestižen naziv *Wrangler*: prvi med njimi *Senior Wrangler*, drugi *Second Wrangler* itd. Reforme so leta 1909 med drugim težavnost izpita nekoliko omilile in vrstni red *Wranglerjev* ni bil več javno dostopen. Tak se v precejšnji meri izvaja še danes.

Ramanujanovo univerzitetno obdobje

Šolanje na Mestni visoki šoli v Kumbakonamu je Ramanujan končal z drugim mestom na maturi, ki so jo opravljali na madraški univerzi leta 1903, in si s tem pridobil štipendijo za nadaljnji univerzitetni študij. Januarja 1904 je tako nadaljeval študij na Državnem kolidžu v Kumbakonamu (Slika 5). Zaradi strogih zahtev študija, pa tudi lepih zgradb, ki so bile obdane z vrtom, so ga imenovali Indijski Cambridge[7]. Na njem bi moral Ramanujan dobiti najprej diplomo FA (First Arts) in šele nato bi lahko nadaljeval študij same matematike. Vendar pri študiju, ki je poleg matematike vključeval še psihologijo, grško in rimsko zgodovino ter angleški jezik, ni bil uspešen. Vrtinec preverjanja enačb iz Carrovega *Synopsisa* in izumljanja lastnih ga je vsega potegnil v matematiko, vse ostale predmete študija pa je povsem zanemaril. Tako konec leta 1905 na madraški univerzi ni opravil nobenega izpita za diplomo FA, razen matematike. To, da študija ni končal, je bil za doslej blestečega fanta velikanski poraz, ki ga je zelo prizadel in za vselej zaznamoval. Izgubil je štipendijo, izgubil je zaupanje vase, začel se je bati izpitov, predvsem pa se je sam pred seboj počutil osramočen navznoter še bolj kot navzven. Pobegnil je od doma v upanju, da bo daleč v mestu, kjer bo nepoznan, našel službo in notranji mir. Toda starši so ga s posredovanjem policije po mesecu mrzličnega iskanja našli v 1000 km oddaljenem mestu Vizagapatamu in ga pripeljali domov.

Slika 5: Državni kolidž v Kumbakonamu (današnja podoba).

Naslednje leto je kot samoplačnik nadaljeval študij v oddaljenem Madrasu na kolidžu Pachaiyappa, imenovanem tudi Dragulj vzgojnega sistema Južne Indije, kjer so lahko študirali le Hindujci. Toda tudi tu se je zapletlo. Najprej je moral študij zaradi amebne griže po treh mesecih prekiniti. Povsem izčrpan se je vrnil domov. Ko se je bolezen umirila, se je vrnil v Madras, živel pri prijateljih in se preživljal z inštrukcijami matematike. V maju 1907 si je na kolidžu Pachaiyappa (Slika 6) pridobil dovoljenje za ponovno opravljanje izpitov za diplomo FA. Tudi tokrat je padel pri angleščini, sanskrtu, zgodovini in fiziologiji. Opravil je le izpit iz matematike in še tu je dosegel samo 85 točk od 150 možnih in 45 potrebnih[8]. S tem si je v Indiji za študij matematike, ki bi sledil po opravljeni diplomi FA, dokončno zaprl vsa vrata.

Slika 6: Kolidž Pachaiyappa (današnja podoba).

Težki izgubljeni leti in začetek poti iz bede

Tako se je Ramanujan leta 1908 ponovno znašel doma v Kumbakonamu. Odločna mati in glava družine mu je v želji, da bi njen sin vsaj odrastel in se osamosvojil, že v tem letu začela iskati bodočo ženo. Hitro je poiskala primerno dekle in Ramanujana, moževemu nasprotovanju navkljub, že julija 1909 poročila s takrat desetletno Janaki Amal (1899–1994). S tem je po indijskih zapovedih najvišje kaste brahmanov, ki jim je pripadala vsa družina, Ramanujana prisilila, da si je moral začeti iskati službo, da bo ob polnoletnosti žene lahko prevzel skrb za družino in zaživel skupaj z njo. Po poroki, na kateri sta se ženin in nevesta prvič videla za nekaj trenutkov, se je namreč njegova žena do polnoletnosti morala vrniti k svojim staršem v uk za gospodinjska dela, sam pa se je dve težki in naporni leti brez sredstev, odvisen od prijateljev in občasnih inštrukcij, potikal po Južni Indiji in si na ta način iskal službo. Trkal je na vrata pomembnih indijskih mož in jim kazal beležki, saj sta bili to njegovi edini spričevali. Ob tem je žel njihovo občudovanje, ni pa si pridobil njihove pomoči, saj naprošeni, čeprav so bili matematiki, niso razumeli napisanih matematičnih trditev tudi zato, ker je v njih Ramanujan pogosto uporabljal svoje nestandardne oznake.

Sreča se je Ramanujanu nasmehnila šele leta 1910 ob četrtem obisku matematika **Derwana Ramashandra Raoa** (1871–1936) v mestu Tirukoilur, ki je opravljal službo pobiralca davkov v okrožju Neville. Da je Rao popustil in dal siromašnemu Ramanujanu majhno državno podporo 25 rupij mesečno za dobo enega leta, je bil zaslužen že omenjeni prijatelj Rajagopalachari.

7 Kolidž je bil leta 1854 nameščen v dvorec nekdanjega tanjurskega maharadže. Od leta 1971 do 1880 so dvorec prenavljali in zgradili še eno stavbo. V času Ramanujanovega študija je na njem poučevalo samo 12 profesorjev. V tem obdobju je akademsko leto na indijskih univerzah potekalo od januarja do decembra, da so Angleži lahko s svojimi družinami preživljali božične praznike v svoji deželi.

8 Berndt in Reddi ugotavljata, zakaj se je Ramanujan tako slabo izkazal pri izpitu iz matematike. Najverjetneje je to posledica Ramanujanovega precejšnjega nezanimanja za geometrijo. Dve tretjini izpita, ki je skupaj z maturitetnimi nalogami reproduciran v [6], so sestavljale naloge iz trigonometrije z nekaterimi bolj geometrijskimi nalogami in geometrije.

Ta mu je za zadnji obisk Raoa priskrbel tudi ugodno priporočilo profesorja matematike **Saldhana** iz Bombaya, ki je iz dela Ramanujanovih zapisov v njem prepoznal izjemnega matematika.

Skromna štipendija je Ramanujana osvobodila boja za preživetje in tako je v Madrasu zaživel. Živel je skupaj s prijateljem, poučeval študente z Državne univerze, sam pa raziskoval matematiko in pisal članke. Prvi Ramanujanov matematični članek *Nekatere lastnosti Bernoullijevih števil*[9] je izšel leta 1911 na 16 straneh v *Reviji indijskega matematičnega društva*, ki je še danes osrednja publikacija te ustanove. Ta števila je Ramanujan spoznal leta 1904, ko je dobil v roke drugi del Carrovega *Synopsisa*, ni pa poznal nadaljnjih študij drugih matematikov o njih. Genezo članka lahko najdemo v petem poglavju *Druge beležke*.

Ob ta članek se je že v letu 1912 obregnil angleški matematik Hill. Temeljit komentar nanj, ki je nastal po Ramanujanovi smrti, pa najdemo v [8, Dodatek I] in ni preveč entuziastičen: *Članek je zanimiv kot primerek Ramanujanovega zgodnjega načina pisanja, toda ključne ugotovitve so dobro znane in dokazi nepopolni*. Wagstaff ga je v [9] podrobno analiziral. Res je, da je bila večina trditev že znana, prav tako se je na nekaterih mestih Ramanujan preprosto zmotil. Toda Bernoullijeva števila se pojavijo na številnih matematičnih področjih, zato so mnoge njihove lastnosti že pred Ramanujanom večkrat na novo odkrili. Prav tako so Ramanujanovi dokazi, čeprav nepopolni, zelo originalni in nekatere so pozneje celo popravili.

Bernoullijeva števila B_n se običajno definirajo s potenčno vrsto

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n,$$

ki konvergira za $|x|<2\pi$. Prvi štirje členi so $B_0=1$, $B_1=-1/2, B_2=1/6$ in $B_3=0$. Izkaže se, da za $k\in\mathbb{N}$ velja $B_{2k+1}=0$. Bernoullijeva števila za $n\geq 2$ zadoščajo zvezi

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}B_k=0.$$

To je v bistvu rekurzivna zveza, saj nam poznavanje prvih $n-1$ števil omogoča izračun števila B_{n-1}, uporabi pa se lahko tudi za samo definicijo števil. Pomembna posledica je $B_n\in\mathbb{Q}$.

Ramanujanov članek se po vsebini deli na del z rekurzivnimi formulami in del s številskimi lastnostmi. V prvem delu je izpeljal razne rekurzivne formule, med drugim tudi zgornjo, z namenom lažjega računanja Bernoullijevih števil, ki jih je izračunal po vrsti do B_{40}. Pozneje se je izkazalo, da je bila samo enačba

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{6n+2}{6k}B_{6k}B_{6n+2-6k}=-\frac{6n+1}{3}$$

zares nova. V drugem delu je podal nepopoln dokaz pomembne trditve

$$B_{2n}+\sum_{p-1|2n}\frac{1}{p}\in\mathbb{Z},$$

kjer so p praštevila. To je *von Staudt-Clausenov izrek* (1840), za katerega se zdi, da ga ne Ramanujan ne uredništvo revije nista poznala. Popravljen dokaz lahko najdemo v [9]. Ta izrek ima za posledico pomembno trditev, da je imenovalec okrajšanega ulomka števila B_{2n} enak produktu tistih praštevil p, za katera velja $p-1\mid 2n$. To nam med drugim zagotavlja, da je imenovalec števila B_{2n} vedno deljiv s 6, kar je Ramanujan v članku neposredno izpostavil. V nadaljevanju je navedel še razne izreke s kongruencami za števce in imenovalce Bernoullijevih števil. Omenimo le *J. C. Adamsov izrek* (1878)*: Če obstaja tak $r\in\mathbb{N}$, da za praštevilo p velja $p^r\mid 2n$ in $p-1\nmid 2n$, potem p^r deli števec števila B_{2n}.* Ramanujan je trdil, da je kvocient števca in največjega takega delitelja praštevilo, toda to ni res. Vzemimo

$$B_{22}=\frac{854513}{138}=\frac{11\cdot 131\cdot 593}{2\cdot 3\cdot 23}.$$

Praštevilo 11 ustreza pogojem iz izreka, toda $854513/11=131\cdot 593$ ni praštevilo. To ni edina napaka. Trdil je tudi, da je števec okrajšanega ulomka $B_{2n}/(2n)$ vedno praštevilo. Protiprimera sta npr. $B_{22}/22$ in $B_{20}/20$.

Od leta 1912 dalje je Ramanujan v *Journal of the Indian Mathematical Society* objavil kar enajst od skupno 37 člankov. Pri tem nismo šteli njegovih matematičnih vprašanj, ki jih je zastavljal v tej reviji v tem obdobju in na katera je potem večinoma odgovarjal sam. S tem je postal prepoznaven ne samo med indijskimi matematiki, pač pa so se zanj začeli zanimati odlični angleški matematiki, ki so takrat v Indiji zasedali pomembne državne službe in so pozneje zelo vplivali na nadaljnji potek Ramanujanovega življenja.

Prva ocena Ramanujanovega dela

Kljub temu, da je Ramanujan končno vsaj malo svobodno zadihal, je še naprej iskal ustrezno službo. Delo, ki ga je opravljal samo nekaj tednov na Glavnem računovodskem uradu v Madrasu, mu ni ustrezalo. Ko je izvedel za možnost zaposlitve v velikem pristaniškem podjetju Port Side v Madrasu, je 9. februarja 1912 napisal prošnjo in ji priložil priporočilo angleškega matematika **E. W. Middlemasta**[10], v katerem je slednji izpostavil Ramanujanovo neverjetno zmožnost računanja. Dobil je službo v podjetju, ki ga je vodil zelo ugledni Irec **Sir Francis Spring**[11] (Slika 7), njegov neposredni šef pa je bil matematik **S. Narayana**[12] (Slika 8). Oba sta v Ramanujanu hitro prepoznala genialnega matematika,

9 S. Ramanujan, *Some properties of Bernoulli's numbers*, J. Indian Math. Soc. **3** (1911), 219–234.

10 Edgar William Middlemast, *Deseti Wrangler*, je bil takrat profesor matematike na Pokrajinskem kolidžu okrožij Bengalije, Bombaya in Madrasa. Leta 1915 je bil izvoljen za tretjega predsednika Indijskega matematičnega društva.

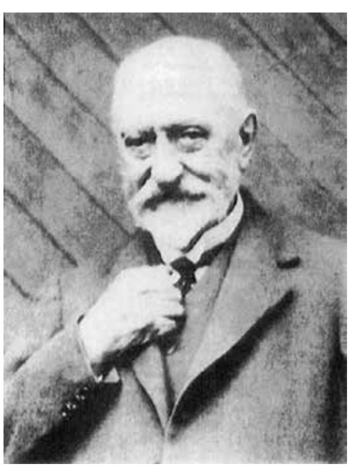
11 Konstruktor, politik in donator Sir Francis Spring (1849–1933) je bil za svoje številne zasluge pri razvoju Južne indijske železnice, gradnji mosta čez reko Gadavi in širitvi madraškega pristanišča leta 1911 imenovan za Viteza indijskega imperija. Od leta 1912 dalje je bil tudi »skriti« mecen Ramanujanu.

12 S. Narayana Aiyar (1874–1937) je na kolidžu Svetega Jožefa v Trichinopolu po diplomi nadaljeval kariero kot profesor matematike vse do odhoda k Springu, kjer je bil najprej šef vseh uradnikov, leta 1912 pa je napredoval v glavnega računovodjo družbe. S tem je dosegel najvišje mesto kakega Indijca v družbi Port Trust v Madrasu. Do svojih podrejenih je bil vedno spoštljiv in ljubezniv. Vlada mu je dodelila naziv *Rao Badahur*, namenjen le najvišjim uradnikom. Vse od ustanovitve Indijskega kluba, ki je pozneje prerasel v Indijsko matematično društvo, je v njem zasedal pomembno mesto. Kljub vsem uspehom je ostal skromen, indijski tradiciji zvest brahman, vedno odet v indijska oblačila in turban. Nikoli ni pozabil, da je izšel iz zelo revne intelektualne družine. Po upokojitvi leta 1934 je ustanovil poseben koncern za pomoč revnim.

Aiyar pa se mu je zelo posvetil in ga vzel v zaščito. Po službenem času sta veliko večerov pozno v noč reševala zapletene matematične probleme v starejši moški hiši v predmestju Madrasa, Triplicanu, blizu njune službe.

Po treh mesecih stalne službe naj bi Ramanujan končno zaživel srečno družinsko življenje z ženo Janaki, ki je vsa leta od poroke dalje živela pri tašči v Kumbakonamu ali pa pri starših v Rajendramu. Preselil se je v majhno hišo svoje babice na cesti Saiva Muthiah Mudali, v dokaj neurejeno madraško predmestje zelo blizu njegove službe. Toda z ženo se je v hišo priselila tudi Ramanujanova oblastna mati, ki je svoji snahi, skladno z indijsko tradicijo, da je sinova žena le njena in sinova sužnja, strogo odmerjala čas, ki ga je Janaki smela preživeti z možem le, ko mu je stregla pri umivanju in obrokih, spati pa je morala pri njej. V času njene odsotnosti je ta strogi nadzor nad Janakinim življenjem prevzela Ramanujanova babica.

Vsebina Middlemastovega priporočilnega pisma Ramanujanu, ki se je širila od ust do ust vplivnih ljudi, je vznemirila indijsko politično in intelektualno javnost. Vplivneži so pričeli raziskovati, kaj neki se skriva v Ramanujanu, da je brez formalne izobrazbe dosegel preboj v sam indijski matematični vrh. Pri tem jih ni vodila samo vedoželjnost, ampak predvsem bojazen, da jih ne bo nekoč obsodila zgodovina, če se izkaže, da je Ramanujan zares čudežni genij in bodo tudi zdaj ponovno odpovedali pri pomoči Ramanujanu in nadaljevali z dosedanjim nerazumevanjem njegove genialnosti. Med njimi je zaživelo intenzivno dopisovanje in poizvedovanje.



Slika 7: Sir Francis Spring

Omenimo le dopisovanje, ki ga je sprožil Ramachandra Rao preko svojega nekdanjega profesorja Griffitha. Sledimo [4]. Griffith je pridobil mnenje angleškega matematika **M. J. M. Hilla**[13] tako, da mu je v Anglijo poslal v oceno nekaj Ramanujanovih odkritij iz beležk in njegov že izdan prvi članek. S tem je prišlo Ramanujanovo delo prvič v neodvisno strokovno presojo zunaj Indije. Hill je v prvem pismu 3. decembra 1912 poslana dela pohvalil. Obregnil se je le ob končne rezultate

$$1+2+3+\cdots=-\frac{1}{12},$$
$$1^2+2^2+3^2+\cdots=0,$$
$$1^3+2^3+3^3+\cdots=\frac{1}{240}.$$

V zvezi s tem je pošiljatelja opozoril [4, str. 16]:

[...] če želi svojo teorijo o neskončnih vrstah objaviti, mora delo še zelo prečistiti, jasno napisati in poskrbeti, da v njem ne bo napak. Predvsem pa v njem ne sme uporabljati simbolov [...], ki jih predhodno ni obrazložil [...]

V branje je Ramanujanu svetoval še Bromwichevo knjigo[14]. V drugem pismu 7. decembra 1912 je podrobneje komentiral Ramanujanov članek. V zvezi z divergentnimi vrstami je zapisal [4, str. 18]:

Ko sem bil sam študent v Cambridgeu, 1876-79, mi teh reči nismo dobro razumeli, čeprav je bila takrat ta moderna teorija že postavljena na čvrsto osnovo. Številni takratni slavni in vzvišeni matematiki so se tudi najprej obregali ob to teorijo, ker je še niso razumeli in so se nad njo zgražali. Zato se mi ne zdi nič presenetljivega, da je gospod Ramanujan, ki je vse to naredil sam, dobil napačen rezultat. Upam, da ga to ne bo prizadelo in mu vzelo poguma.

O vseh izsledkih tega dopisovanja je Griffith poročal tudi Springu, ki je skupaj z Aiyarjem vseskozi verjel v Ramanujanove sposobnosti.

Slika 8: S. Narayana Aiyar

Verjetno se je bralec vprašal, od kod končni izračuni zgornjih vrst, saj že bežen pogled razkriva, da vrste očitno divergirajo. Odgovor se skriva v teoriji ene izmed najslavnejših matematičnih funkcij, *Riemannovi funkciji zeta*. Ramanujan se je z njo podrobneje ukvarjal v petem poglavju *Druge beležke*, sicer pa tudi skozi celotno kariero, saj je funkcija neposredno povezana s praštevili in je ključnega pomena za analitično teorijo števil. Riemannova

13 Micaich John Muller Hill (1856–1929), *FRS* (*The Fellow of the Royal Society* - pomen tega visokega naziva bomo pojasnili kasneje), je leta 1876 pridobil diplomo MA na Univerzitetnem kolidžu v Londonu, leta 1891 pa še naziv ScD na Univerzi v Cambridgeu. Čisto matematiko je poučeval sprva na Univerzi v Birmihghamu, potem na Univerzitetnem kolidžu v Londonu in kariero zaključil kot *Astor* profesor na Univerzi v Londonu.

14 T. J. I'a. Bromwich, *An introduction to the theory of infinite series*, Macmillan and co., London, 1908.

funkcija zeta je za $\Re\{s\} > 1$ definirana kot $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$. Ta neskončna vrsta za $\Re\{s\} \leq 1$ divergira, zato je na tem območju ne smemo uporabiti. Izkaže pa se, da lahko s sredstvi kompleksne analize ζ-funkcijo analitično razširimo na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, pri čemer ima v točki $s = 1$ enostaven pol. S pomočjo teorije ostankov lahko za $n \in \mathbb{N}$ izračunamo $\zeta(1-2n) = -B_{2n}/(2n)$ in $\zeta(-2n) = 0$, glej npr. [1]. Če pa vseeno zlorabimo oznake s tem, da na teh vrednostih uporabimo vrsto iz definicije, dobimo

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2n-1} = -\frac{B_{2n}}{2n} \quad \text{in} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^{2n} = 0,$$

v klasičnem smislu nesmiselna rezultata. Od tod sledijo Ramanujanove vrste iz pisma.

Kritika je Ramanujana vznemirila, prav tako je vznejevoljila njegove prijatelje in občudovalce. Ti so Ramanujana opogumili, da je še sam poslal v oceno svoje delo **H. V. Bakerju**[15]. Ker je ostal brez odgovora, je poskusil še pri Bakerjevem kolegu, starejšem profesorju **E. W. Hobsonu**[16]. Po molku tudi z njegove strani mu je njegov nekdanji profesor P. V. Seshu Iyer z Državnega kolidža v Kumbakonamu, ki je takrat poučeval na enem izmed kolidžev madraške univerze, svetoval, naj se obrne še na mlajšega profesorja **G. H. Hardyja**. Posredoval mu je tudi njegovo knjižico *Orders of infinity*[17].

Oris Hardyjevega življenja do leta 1913

Godfrey Harold Hardy (1877–1947) (Slika 10) je bil v tistem času najbolj znan angleški matematik in eden izmed vodilnih raziskovalcev na svetu s področja teorije števil. Bil je strokovnjak tudi za matematično analizo, izjemni mojster strogega dokazovanja, neizprosni kritik in strog ocenjevalec vsega okrog sebe, šarmantni sogovorec, odličen predavatelj in zagovornik čiste in stroge matematike, ki jo je uvedel v angleško matematiko in jo štel za lepo, ter strasten ljubitelj kriketa. Vse življenje je veljal za lepega človeka, čeprav sam ni bil tega mnenja in v svojem okolju ni prenesel ogledal. Življenje je preživel kot ateist, ki je trdil, da je v večnem sporu z bogom, o katerem je govoril, da je njegov največji nasprotnik.

Odraščal je v ambiciozni, prosvetljeni učiteljski družini, kjer so intelektualne vrline in umetnost visoko cenili. Takrat je bilo to značilno le za aristokracijo. Imel je dve leti mlajšo sestro, ki je svoje življenje prav tako posvetila intelektualnemu delu. Deležen je bil skrbne viktorijanske vzgoje ob prijaznem, razumevajočem očetu in strogi, odločni ter hudo pobožni in ambiciozni materi. Ta je od svojega fantiča veliko pričakovala, saj je že pri dveh letih poznal števila do milijon in jih kmalu znal razcepljati. Po zaključku idiličnega osnovnošolskega šolanja v rodni vasici Cranleigh na JV delu Londona je kljub temu, da niso bili bogati, pri dvanajstih letih nadaljeval šolanje na najbolj prestižni javni šoli v Angliji z večstoletno tradicijo, v strogem Winchestru, ki je sprejela samo zelo nadarjene dečke, če so opravili zahteven sprejemni izpit. Od 120 vpisanih so jih sprejeli dvanajst in Hardy je med njimi dosegel prvo mesto. Tega je obdržal skozi vse svoje šolanje.

Po izjemno uspešnem zaključku šolanja v Winchestru je leta 1896 nadaljeval študij matematike na kolidžu Trinity v Cambridgeu (Slika 9), čeprav je imel še veliko drugih darov. Bil je izvrsten igralec in poznavalec kriketa ter že od dijaških let mojster peresa. Po malem se je vse življenje ukvarjal z novinarstvom in v zrelejših letih tudi s filozofijo. Izjemen dar za pisanje je ohranil in s pridom uporabljal vse življenje.

Matematiki je posvetil življenje ne samo zato, ker se je že kot dijak zavedal, da bo v njej najhitreje in najlažje izstopal iz še tako dobre skupine drugih, ampak tudi zato, ker ga je pri 14 letih očarala knjiga *A Fellow of Trinity* avtorice Frances Marshall, ki jo je izdala pod psevdonimom Alan St. Aubin. V tem povprečnem delu je bil opisan izjemno naporen študij na Trinityju. Ta je prinesel tistim, ki jim je uspelo ostati kot profesorji na njem, neizmerno zadoščenje in slavo. Postati najboljši med najboljšimi je bil Hardyjev cilj, ki ga je tudi dosegel, čeprav je bil samo *Četrti Wrangler* na *Triposu*.

Slika 9: Trinity College, veliko dvorišče

Hardyjeva mentorja pri doktoratu (1903) sta bila A. E. H. Love (1863–1940) in E. T. Whittaker (1873–1956). Love ga je uvedel v francosko in nemško matematiko. Jordanova knjiga *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique* je Hardyju že leta 1896 spremenila pogled na matematiko in s tem tudi njegovo življenje. Sam je zapisal [7, str. 111]:

> *Moja vdanost matematiki je res najbolj ekstravagantna in fanatična. Verjamem, da jo ljubim, in vem, da bi bil nesrečen brez nje [...] Raziskovanje v matematiki mi pomeni neprekinjeno srečo mojega življenja.*

Od leta 1898 je bil član tajne bratovščine Cambridge Apostles, ki še vedno deluje vse od ustanovitve leta 1820. V Hardyjevem času so bile med njenimi člani izjemne osebnosti, kot so pesnik Tennyson, filozof Whitehead, fizik J. C. Maxwell in Hardyjev dolgoletni prijatelj, logik in filozof Bertrand Russell (1872–1970).

15 Henry Frederick Baker (1866–1956), *Senior Wrangler* in profesor na Univerzi v Cambridgeu, se je ukvarjal z algebraično geometrijo, o kateri je napisal šest temeljnih del, pa tudi s funkcijami theta in astronomijo.

16 Ernest William Hobson (1856–1933), *Senior Wrangler* in *FRS*.

17 G. H. Hardy, *Orders of infinity. The »Infinitärcalcül« of Paul du Bois-Reymond*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics 12, Cambridge University Press, Cambridge, 1910.

Slika 10: Hardy (levo) in Littlewood okrog leta 1924

Že v letu 1899, ko je Hardy končal z drugim delom izpita *Tripos*, je postal član Trinityja. Takrat je tudi pričel z objavljanjem matematičnih prispevkov, sprva v obliki vprašanj za časopis *Educational Times*. Prvo knjigo *The integration of functions of a single variable*, ki je izšla leta 1905 v sklopu Cambridge Tracts, je napisal, da bi posodobil teoretično matematiko v Angliji. Vendar se je to zgodilo šele s prelomnim učbenikom *A course of pure mathematics*, ki je izšel leta 1908 in ga je napisal po vzoru Jordanove *Cours d'analyse*. Učbenik je do leta 1952 doživel 10 izdaj in je tako še v dvajsetem stoletju močno vplival na poučevanje matematike.

Za obdobje 1906–1919 je bil Hardy nastavljen za predavatelja matematike. Že na začetku je dobil nalogo modernizirati izpit *Tripos*. Tega je preprosto ukinil, čeprav so ga pozneje v milejši obliki uvedli nazaj. Zaradi nadpovprečnih dosežkov je bil kmalu izvoljen za *FRS*[18] (1910), štiri leta kasneje pa so mu podelili častni naziv *Cayley Lecturer in Mathematics*.

Hardy je rad sodeloval z drugimi matematiki. Pravil je, da ima vsak avtor skupnega članka veliko več kot pol zasluge zanj. Leta 1912 je izdal 9 člankov. Prvi med njimi, *Some Problems of Diophantine Approximation*, ki je nastal v sodelovanju z **J. E. Littlewoodom**[19] (Slika 10), je izšel v sklopu petega mednarodnega kongresa matematikov v Cambridgeu. Njuno več kot 30-letno sodelovanje, katerega bera je blizu 100 člankov, je kmalu preraslo v legendo[20].

Potem pa je prišlo leto 1913, ko je v Hardyjevo življenje vstopil Ramanujan.

Začetek znamenite naveze Ramanujan-Hardy

Hardy je po smrti Ramanujana na vprašanje o poznanstvu z njim odgovoril:

> *Dolgujem mu več kot komurkoli na svetu, z eno izjemo, in moje družabništvo z njim je edini romantični pripetljaj v mojem življenju.*

Kanigel v [7, str. 370] ponuja Littlewooda za izjemo. Kot bomo v nadaljevanju videli, malce tragičen prizvok v drugem delu stavka ni naključje.

Pismo, ki ga je 16. januarja 1913 Ramanujan poslal Hardyju, velja za najslavnejše pismo v zgodovini matematike in je zaznamovalo Ramanujanovo nadaljnjo življenjsko pot. Čitljivo napisano pismo, ki je izražalo samozavest pisca, je s prilogami vred obsegalo 12 strani in se je pričelo takole [4, str. 21]:

> *Dragi gospod,*
> *dovolite, da se vam predstavim. Sem uslužbenec računovodskega oddelka Velike pristaniške družbe iz Madrasa z letnim zaslužkom samo 20 rupij. Imam okoli 23 let. Nimam univerzitetne izobrazbe, sem pa naredil običajne šolske tečaje. Ves svoj prosti čas varčno uporabim za samostojne matematične raziskave. Naredil sem posebno raziskavo o divergentnih vrstah na splošno in rezultati, ki sem jih dobil, so »presenetljivi«.*

V pismu in prilogah je Ramanujan zapisal okoli 50 formul s področja teorije števil, integralov, neskončnih vrst, transformacij vrst in integralov, približne integracije in sumacije, neskončnih verižnih ulomkov ter divergentnih vrst.

Citirajmo le odlomek s področja teorije števil [4, str. 22–23]:

> *Našel sem funkcijo, ki natančno izraža število praštevil, manjših od x, »natančno« v smislu, da je razlika med funkcijo in dejanskim številom praštevil v splošnem 0 ali pa majhna končna vrednost, tudi ko gre x proti neskončnosti. To funkcijo sem dobil v obliki neskončne vrste in jo izrazil na dva načina [...] Prav tako sem našel izraz, kako najti dejansko število praštevil v obliki $Ax + B$, ki je vedno manjše od danega števila ne glede, kako je to veliko.*

Ramanujan je še omenil, da mu je poslal samo delček svojih rezultatov, ne pa tudi raziskav, s katerimi se trenutno ukvarja.

Pismo je udarilo v srčiko Hardyjeve samozaverovanosti in ponosa. Izjavo, da mu Ramanujan ne bo dodal raziskav, s katerimi se trenutno še ukvarja, je Hardy vzel za neprijazno, vzbudila pa mu je tudi radovednost. Priloga desetih strani, popisanih z enačbami in izreki brez dokazov, ki naj bi jih Hardy kar mimogrede preve-

18 *FRS* je kratica za *The Fellow of Royal Society* (Član Kraljevega društva). To častno imenovanje so tedaj podelili samo izjemnim strokovnjakom, ki so s svojimi deli bistveno prispevali k razvoju ali uveljavitvi svoje stroke. Članstvo ni pomenilo samo izjemno čast in velik ugled, ampak je članu prinašalo v prvih šestih letih po izvolitvi tudi visoko finančno podporo. Od leta 1987 dalje so v to visoko družbo sprejeli tudi nekatere člane britanske kraljeve družine.

19 John Ederson Littlewood (1885–1977), *Senior Wrangler* (1905), je deloval v analitični teoriji števil, diferencialnih enačbah in algebraični geometriji. Leta 1908 je bil izvoljen za člana Trinityja. Tri leta je deloval na Univerzi v Manchestru, preostanek kariere do upokojitve leta 1950, pa na Cambridgeu. Leta 1916 je postal *FRS*. Pozneje je prejel več odmevnih matematičnih nagrad. Hardy ga je opisal kot izrednega matematika, ki nima konkurence v svojih miselnih sposobnostih, uvidih, razumevanju, reševanju problemov in znanju.

20 Znana je anekdota, da je nemški matematik Edmund Landau obiskal Anglijo z edinim namenom prepričati se, da je Littlewood le plod Hardyjeve domišljije, ki mu pomaga zakrivati Hardyjeve napake. Prav tako je odmevna anekdota danskega matematika Haralda Bohra, ki je svojim kolegom na srečanju leta 1947 dejal: *Dandanes so samo trije veliki angleški matematiki: Hardy, Littlewood in Hardy-Littlewood.*

ril, je bila nenavadna in skrivnostna. Še bolj pa Ramanujanova prošnja, da naj Hardy zato, ker je on reven, kar sam poskrbi, da bodo te njegove matematične ugotovitve tudi objavljene. Pismo je zaključila fraza zahvale in hvaležnosti [4, str. 22]:

Ostajam, dragi gospod, resnično Vaš,
S. Ramanujan

Dodal je tudi že natisnjeni članek o Bernoullijevih številih.

Pismo je Hardyja vznemirilo in zmedlo. Ni se mogel odločiti, ali gre za veliko potegavščino nekoga, ki v Indiji pozna *Tripos*, ali pa je vse skupaj morda vseeno delo ekscentričnega genija. Po razrešitev zagate se je napotil k Littlewoodu. Skupaj sta še istega dne in pozno v noč pregledovala in razreševala nastalo uganko. Littlewood je bil do Hardyjeve domneve, da je vsebina pisma lahko prevara, zadržan. Bolj je verjel, da gre za zelo izvirno in smelo delo.

Skupno branje, študij nekaterih formul iz prilog, ki bodo obravnavane v drugem delu članka, in razpravljanje pozno v noč je oba matematika privedlo do spoznanja, da poslano gradivo, ki ga sicer ne znata v celoti pojasniti, ni potegavščina, ampak delo samosvojega najodličnejšega matematika z izjemno domišljijo in obsežnim, toda neurejenim znanjem. Hardy se je takoj odločil, da mora tega genija pripeljati k sebi na Cambridge. Ne da bi Ramanujanu najprej odgovoril na njegovo pismo in mu v njem sporočil to svojo namero, je kar začel pripravljati teren za njegov prihod in s tem naredil veliko napako. Ramanujanovo pismo je kazal vse naokrog, zato so se na Cambridgeu začele pojavljati govorice. Pri tem se profesorja Baker in Hobson nista izdala, da sta podobno pismo prejela od istega avtorja pred tem tudi onadva.

V nasprotju s to gorečnostjo, pripeljati Ramanujana v Anglijo, pa mu je Hardy odgovoril z dolgim in neprijaznim pismom 8. februarja 1913. Dodal je, da so poslani zapisi nejasni, brez dokazov, zato je zelo težko preveriti njihovo pravilnost. Vse poslano gradivo je razvrstil v tri kategorije:

- v prvo je dal izreke, ki so bili že poznani ali so se tem bolj ali manj približali;
- v drugo je dal nove in zanimive izreke, toda bolj zaradi skrivnostnega značaja kot pomembnosti;
- v tretjo, za Hardyja najpomembnejšo skupino, pa izreke, za katere je menil, da bi utegnili biti zelo pomembni, če bi bili dokazani.

Napisal je, da dokaze izrekov iz tretje skupine želi videti, saj bo šele takrat lahko začel razmišljati o njihovi objavi. Izrazil je tudi zanimanje za Ramanujanovo delo v povezavi s praštevili in z neskončnimi vrstami. Nič pa ni omenil:

- da je imel ob branju poslanega gradiva sam težave, ker je Ramanujan uporabljal nestandardne simbole, ki jih ni nikjer pojasnil;
- da ne more dati ocene o pravilnosti njegovih trditev brez Ramanujanovih dokazov, ker zapisane trditve sam ne zmore dokazati;
- da si on sam zelo želi, da bi spoznal njegov način dela;
- da ga tudi zelo zanima, kaj raziskuje zdaj.

Pismu je dodal še tri Littlewoodove opombe.

Medtem ko je Ramanujan še nestrpno čakal Hardyjev odgovor na svoje pismo, je od indijskih veljakov izvedel, da ga Hardy po drugih kanalih izjemno hvali in mu že pripravlja pot v Anglijo. To ga je zelo začudilo, ob neprijazni vsebini prispelega Hardyjevega odgovora pa se je zato počutil prevaranega. Iz pisma, brez povabila za Anglijo, je vela predvsem Hardyjeva zahteva, naj mu čim prej pošlje rigorozne dokaze svojih trditev, naštete so bile njegove napake, ki sta jih z Littlewoodom našla v poslanem gradivu.

Potrt, a ne »uklonjen« Ramanujan je tako v odgovoru Hardyju dne 27. 2. 1913 na šestih straneh deloval prepričljivo, samozavestno in na nekaterih mestih celo vzvišeno. Začel je z uvodom, da je vesel, da je Hardy s simpatijo sprejel njegovo delo. Potem je zatrdil, da za svojimi izreki stoji, da so pravilni, četudi se morda zdi, da temeljijo na šibki osnovi. Vse, kar je sledilo v pismu, pa je bilo napisano spet zelo originalno in podobno kot v prvem pismu. Bralec lahko uvidi, da se Ramanujan ni niti malo potrudil, da bi Hardyju ugajal, in da mu je preprosto vseeno, kaj si Hardy misli o njem. Iz zapisa veje tudi Ramanujanovo presenečenje, da tako priznan matematik ne uvidi pravilnosti zapisanega, ampak se mu številni njegovi izreki zdijo celo zahtevni. V bran pravilnosti svojih trditev je navedel [4, str. 53]:

Vi zahtevate od mene dokaze tako kot drugi londonski profesorji. Ampak njim jih nisem dal. Sem pa odgovoril z nekaj primeri, ki izhajajo iz moje teorije.

Navedel je primer neskončne vsote po naravnih številih, ki ga je zapisal že v prvem pismu [4, str. 53]:

Če je tudi Vaš rezultat enak, potem je nekaj na moji teoriji. Če pa Vam dam svojo metodo, ki ima morda kako napako v katerem koli koraku, pa se s temi koraki ne boste mogli prepričati o pravilnosti računa [...]

Svojo prizadetost je razkril šele na koncu pisma [4, str. 54]:

Že sedaj sem napol izstradan človek. Da ohranim svoje možgane, potrebujem hrano in zdaj je to moja poglavitna skrb. Vsakršno naklonjeno pismo z Vaše strani bi mi omogočilo, da dobim ustrezno podporo s strani Univerze ali države [...] Lahko me ostro obsodite, ker molčim o metodah dokazov, toda ne mislim, da bi te metode morale umreti z menoj.

V pismu je brez pojasnila navedel tri približne formule za število praštevil, npr.

$$\pi(n) \approx \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{(2k-1)\,|B_{2k}|} \left(\frac{\log n}{2\pi} \right)^{2k-1}.$$

Med poslanim je bilo tudi neko novo transformacijsko pravilo za hipergeometrijske vrste, katerega dokaz pa je Hardy objavil šele leta 1923.

Toda tudi Hardy se ni vdal. Odgovor Hardyja na drugo Ramanujanovo pismo, ki ga je odposlal 26. marca 1913, je bil skrajno zadržan, strog in neprijazen. V njem mu je suhoparno nanizal več njegovih napak, ki jih je prepoznal Littlewood. Dodal je še več Littlewoodovih natančnih opomb in ga spet grajal, ker mu ni poslal dokazov. Pri tem se je skliceval tudi na podobna mnenja nekaterih svojih kolegov. Hardy je tudi trdil, da ima Ramanujan že tri njegove dolge odgovore, kar pa ni bilo res. Hardyjevi osornosti je morda botrovalo tudi to, da je marca 1913 izvedel, da Ramanujan zavrača pot v Anglijo.

Vsebina in način povedanega je Ramanujanu jasno pokazala, da Hardyja mineva potrpljenje kljub temu, da mu je Littlewood ob branju drugega Ramanujanovega pisma zatrdil [7, str. 205]:

Verjamem, da je Ramanujan najmanj Jacobi.

Ramanujan, ki je medtem doživel priznanje v Indiji tudi na račun svojega dopisovanja s Hardyjem, je v bolj spravljivem tonu odgovoril 17. aprila 1913. To razberemo iz naslednjega citata [4, str. 81]:

Malo me je prizadelo vaše pisanje, ki je nastalo pod vplivom gospoda Littlewooda. Niti malo se ne bojim, da moje metode ne bi bile uporabne tudi za druge. Nasprotno, v zadnjih osmih letih nisem naletel na nikogar, ki bi mi jih oporekal. Kot sem pisal v svojem zadnjem pismu, sem v vas našel simpatičnega prijatelja in pripravljen sem vam, povsem brez omejitve, izročiti tisto malo, kar imam.

Kljub svoji uklonitvi pa je Hardyju vseeno oporekel, da od njega ni prejel treh, ampak samo dve pismi. Izrazil je tudi začudenje, da ga Hardy nikoli ni vprašal nič osebnega, da pa je morda to storil v pismu, ki ga ni prejel. Pohvalil se je, da mu je medtem lokalna univerza dodelila šolnino 60 funtov letno za dobo dveh let. Zdaj se bo potrudil in poslal tako zaželene dokaze o razporeditvi praštevil.

Fotografije

Slika 1: Ramanujanova otroška soba v Kumbakonamu
https://valuevar.wordpress.com/2012/01/01/four-squares-jacobi-ramanujan/
Pravice proste.

Slika 2: B. C. Berndt z Ramanujanovo tablico
https://faculty.math.illinois.edu/~berndt/
Z dovoljenjem B. C. Berndta.

Slika 3: Originalne beležke, danes shranjene v knjižnici Univerze v Madrasu
https://www.thehindu.com/sci-tech/science/3-notebooks-of-Ramanujan-being-microfilmed/article15713504.ece
Vir: The Hindu, pravice proste.

Slika 4: Druga izdaja faksimil vseh treh beležk v dveh knjigah, foto Aleksander Simonič.

Slika 5: Državni kolidž v Kumbakonamu
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kumbakonam_College.jpg
Vir: WikimediaCommons, licenca CC BY.

Slika 6: Kolidž Pachaiyappa v Madrasu

Slika 7: Sir Francis Spring
https://en.wikipedia.org/wiki/Francis_Spring
Vir: Wikipedija, pravice proste.

Slika 8: S. Narayana Aiyar
https://www.arunachala.org/newsletters/2013/mar-apr
Vir: ArunachalaAshrama, pravice proste.

Slika 9: Trinity College, veliko dvorišče
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Trinity_College_-_Great_Court_02.jpg
Vir: WikimediaCommons, licenca CC BY-SA.

Slika10: Hardy in Littlewood leta 1924
http://trinitycollegechapel.com/about/memorials/brasses/hardy/
Vir: TrinityCollegeChapel, pravice proste.

Literatura

[1] L. V. Ahlfors, *Complex analysis: An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1979.

[2] B. C. Berndt, *Ramanujan's notebooks*, Math. Mag. **51** (1978), 147–164.

[3] B. C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks, Part I*, Springer-Verlag, New York, 1985.

[4] B. C. Berndt, R. A. Rankin, *Ramanujan: Letters and commentary*, History of Mathematics 9, AMS, London Mathematical Society, 1995.

[5] B. C. Berndt, R. A. Rankin, *The books studied by Ramanujan in India*, Amer. Math. Monthly **107** (2000), 595–601.

[6] B. C. Berndt, C. A. Reddi, *Two exams taken by Ramanujan in India*, Amer. Math. Monthly **111** (2004), 330–339.

[7] R. Kanigel, *The man who knew infinity: a life of the genius Ramanujan*, Washington Square Press, 1991.

[8] S. Ramanujan, *Collected papers*, University Press, Cambridge, 1927.

[9] S. S. Wagstaff, Jr., *Ramanujan's paper on Bernoulli numbers*, J. Indian Math. Soc. (N.S.) **45** (1981), 49–65.

Raziskovalne naloge iz matematike na Srečanju mladih raziskovalcev Slovenije 2018

Dr. Borut Jurčič Zlobec
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za elektrotehniko

Državno Srečanje mladih raziskovalcev Slovenije organizira Zveza za tehnično kulturo Slovenije. Namen srečanja je čim zgodnejše uvajanje mladih v znanost, popularizacija znanosti in tehnike odkrivanja nadarjenih učencev in dijakov na posameznih področjih in njihovo spodbujanje k poglabljanju znanja in raziskovalne dejavnosti.

Na to državno srečanje prispejo naloge, ki se bile izbrane na regijskih srečanjih. Vse prispele naloge z regijskih srečanj dobijo na državnem izboru eno od priznanj.

V letu 2018 je potekalo že 52. državno srečanje v Murski Soboti. Organizator je dobil v pregled 18 nalog, ki so prišle v končni izbor za priznanja, od teh jih je šest določil za bronasto priznanje.

Ostale naloge so bile predstavljene pred državno komisijo. Komisijo so sestavljali izr. prof. dr. Dominik Benkovič, dr. Borut Jurčič Zlobec, izr. prof. dr. Marko Jakovac in doc. dr. Janja Jerebic.

Komisija je izbrala osem nalog za srebrno priznanje, štiri naloge pa so dobile zlato priznanje.

Odločili smo se, da bomo vsako leto objavili recenzijo nalog, ki so dosegle zlata priznanja. Po eni strani, da povemo širši javnosti, kaj delajo naši mladi raziskovalci, po drugi strani pa, da spodbudimo druge, da bi jim sledili. Morda bomo z opisom dela najboljših dali kakšno idejo tudi drugim in jih spodbudili, da še oni zapišejo svoje misli, ki so se jim ob tem porodile. Seveda imajo tu mentorji pomembno vlogo in enako velja seveda tudi zanje.

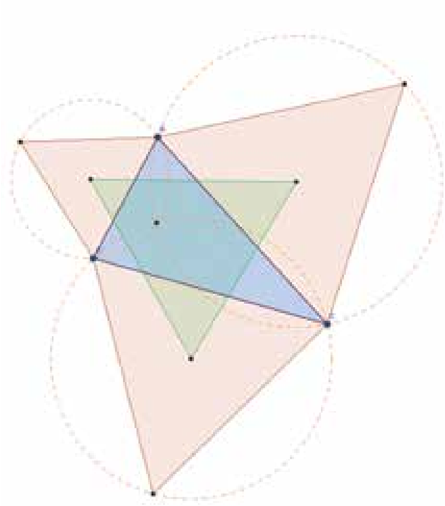
S prejetim zlatim priznanjem so mladi raziskovalci dobili pohvalo za svoje dosežke. Na tem mestu pa jim želimo sporočiti, kaj bi lahko popravili, izboljšali, da bi bili še bolj uspešni.

Pojdimo k nalogam. Teme nalog, ki so bile predstavljene, so bile predvsem algebrske (devet nalog), potem geometrijske (pet nalog), tri iz teorije iger oziroma kombinatorike in ena čisto statistična.

Raziskovalne naloge, nagrajene z zlatim priznanjem za leto 2018

Nagrajene so bile štiri raziskovalne naloge, dve osnovnošolski in dve srednješolski: sledi kratek opis, najprej za osnovnošolski, nato pa za srednješolski nalogi.

1. **Napoleonovi trikotniki**
   Avtor: **Aljaž Gornik**
   Mentorica: **Vesna Harej**
   Osnovna šola Dravlje, Ljubljana

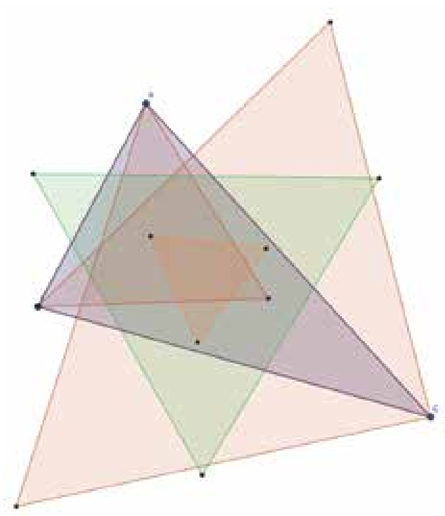


Slika 1: Napoleonovi trikotniki

2. **Trdnjavski polinomi**
   Avtor: **Jaka Slapar**
   Mentorja: **Katarina Kunaver** in **Tadej Starčič**
   Osnovna šola Riharda Jakopiča, Ljubljana
3. **Pitagorejske peterice**
   Avtorja: **Rok Jurinčič** in **Patrik Mikuž**
   Mentor: **Alojz Grahor**
   Škofijska gimnazija Vipava
4. **Dimenzija fraktalov in fraktalna dimenzija**
   Avtorica: **Eva Kuhar**
   Mentorici: **Metka Horvat** in **Ivana Vogrinčič**
   Gimnazija Murska Sobota

Kratek opis nagrajenih nalog

1. Naloga z naslovom: **Napoleonovi trikotniki**



Izrek o Napoleonovih trikotnikih

Če nad vsako stranico poljubnega trikotnika načrtamo enakostranične trikotnike, potem tvorijo središča očrtanih krogov teh treh trikotnikov oglišča enakostraničnega trikotnika. Trikotnike nad stranicami načrtamo na dva načina tako, da načrtani trikotniki ne prekrivajo osnovnega, oziroma tako, da ti prekrivajo osnovni trikotnik. Tako dobimo veliki in mali Napoleonov trikotnik. Očrtani krogi teh trikotnikov se sekajo v eni točki. Težišča osnovnega trikotnika in obeh Napoleonovih trikotnikov sovpadajo.

V nalogi so bile dokazane gornje trditve z izključno geometrijskimi sredstvi. Vsi dokazi so bili izpeljani korektno, nekateri na precej originalen način, ki kaže, da se je kandidat resno poglobil v temo. Pri tem je nalogo opremi s slikami konstrukcij, narejenih s programom GeoGebra. Pri tem je pokazal, da to programsko orodje dodobra obvlada.

Poleg dokazov gornjih trditev najdemo v nalogi še izračunani ploščini obeh trikotnikov in dokaz, da je razlika ploščin med velikim in malim Napoleonovim trikotnikom enaka ploščini osnovnega trikotnika.

Naj navedemo nekaj stavkov, ki jih je avtor zapisal v povzetku.

Glavna tema moje raziskovalne naloge je bila preučevanje Napoleonovih trikotnikov. Med samim raziskovanjem sem spoznal ogromno novih pojmov in povezave med njimi, kot na primer Eulerjeva premica, Eulerjeva krožnica, tetivni štirikotniki, potrebna pa je bila tudi razširitev znanja o podobnosti in znamenitih točkah trikotnikov. Srečal sem se s številnimi novimi pojmi, ki sem jih razrešil po svojih najboljših močeh ter hkrati razširil svoje osnovnošolsko znanje matematike. Menim, da mi je raziskovalna naloga dobro uspela, vendar je precej kompleksna in bolj primerna za srednješolsko raven.

2. Naloga z naslovom: **Trdnjavski polinomi**

V nalogi se je avtor ukvarjal s posplošenimi šahovnicami in postavitvijo trdnjav tako, da se medsebojno ne ogrožajo.

Za dano obliko šahovnice ga je zanimalo, na koliko načinov lahko postavi nanjo dano število trdnjav, ne da bi se medsebojno ogrožale.

Če označimo dano šahovnico z B in število trdnjav s k, potem bomo označili število vseh možnih takih postavitev z $n = p_k(B)$.

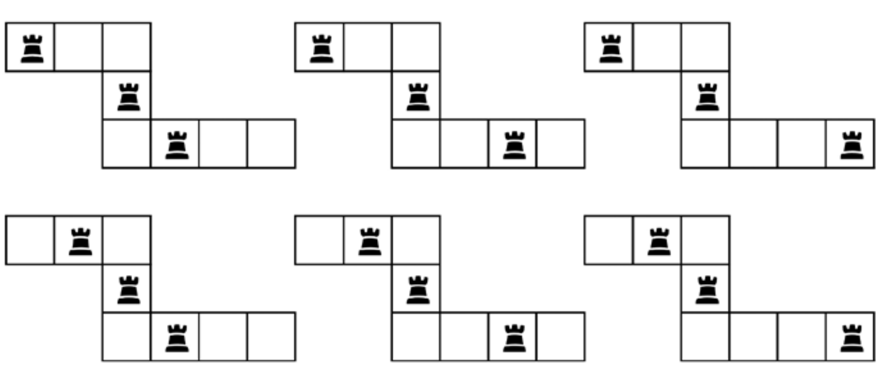
Definiral je trdnjavski polimom za dano šahovnico B, $R_B(x) = p_0(B) + p_1(B)x + \dots + p_n(B)x^n$, kjer je n največje možno število trdnjav, ki jih lahko postavimo na šahovnico tako, da se medsebojno ne ogrožajo. Na sliki 2 je primer take šahovnice s tremi trdnjavami (slika je vzeta iz naloge).

Trdnjavski polinom te šahovnice je $1 + 8x + 16x^2 + 6x^3$.

Avtor je v nalogi pokazal, da trdnjavske polinome za kvadratne in pravokotne šahovnice lahko določimo s pomočjo kombinatorike.

Za splošne šahovnice je izpeljal naslednjo rekurzivno zvezo za trdnjavske polinome.

Naj bo B šahovnica in (i, j) poljubno polje na šahovnici. Če sta B' in B'' zaporedoma šahovnici, ki ju dobimo, če iz B izbrišemo i-ti stolpec in j-to vrstico, potem velja $R_B(x) = x\,R_{B'}(x) + R_{B''}(x)$.



Sika 2: Šahovnica a tremi trdnjavami

V povzetku je avtor napisal med drugim tudi tele vrstice:

Predstavil sem način, kako lahko vsaki posplošeni šahovnici priredimo neko drugo šahovnico, tako da bo trdnjavski polinom prirejene šahovnice enak polinomu lovcev prvotne šahovnice. Napisal sem tudi program v Mathematici, ki mi izračuna polinom lovcev. Raziskovanje trdnjavskih polinomov in kombinatorike je bilo res zanimivo. Pri izdelavi naloge sem se res veliko naučil. Ker pa mi je matematika zelo blizu, mi ni bilo preveč težko. Naučil sem se tudi veliko o delovanju programa Mathematica in o osnovnih ukazih v zapisu algoritmov. Seveda pa se da še veliko izboljšati.

3. Naloga z naslovom: **Pitagorejske peterice**

Iz Škofijske gimnazije prihajajo že kar nekaj let naloge, ki so med najboljšimi in se odlikujejo tudi po izbrušenem jeziku, kar ni nujno pravilo, tudi ne med najboljšimi nalogami. Zato bom prepustil besedo avtorjema in zapisal to, kar sta onadva zapisala v povzetku.

Pitagorejska peterica je peterica števil (a, b, c, d, e), ki ustrezajo enačbi $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2$. Kadar so števila a, b, c, d in e naravna števila, imenujemo peterico naravna pitagorejska peterica (na primer (24, 887, 1520, 512, 1833)), če pa so a, b, c, d in e cela števila, jo imenujemo cela pitagorejska peterica (na primer (−2, 10, −11, 20, 25)). V prvem delu raziskovalne naloge smo odkrili več različnih parametrizacij naravnih pitagorejskih peteric. Pri kreiranju nekaterih izmed njih smo uporabili analogijo s parametrizacijo pitagorejskih trojic in četveric. S pomočjo izbire parametrov dobimo pitagorejsko peterico, zato parametrizaciji pravimo tudi generator pitagorejske peterice. Odkrili smo tudi generator, ki generira vse pitagorejske peterice in to tudi dokazali.

V drugem delu raziskovalne naloge smo v množici celih pitagorejskih peteric definirali množenje s predpisom:
$(a, b, c, d, e) \cdot (p, q, r, s, t) = (ap - bq - cr - ds,\ aq + bp + cs - dr,\ ar - bs + cp + dq,\ as + br - cq + dp,\ et)$.

Dokazali smo, da obstaja enota za množenje ter da je množenje asociativno, ni pa komutativno. V množici neničelnih racionalnih pitagorejskih peteric obstaja k vsakemu elementu inverzni element, tako da je množica neničelnih racionalnih pitagorejskih peteric nekomutativna grupa. Raziskovali smo tudi razstavljanje pitagorejskih peteric. Dokazali smo trditev, da v množici celih pitagorejskih peteric ne velja izrek o enoličnem razcepu na nerazcepne pitagorejske peterice, kjer je nerazcepna tista pitagorejska peterica, ki je ne moremo zapisati kot produkt dveh pitagorejskih peteric. Izrek velja tudi v podmnožici naravnih pitagorejskih peteric. V nalogi smo si zastavili štiri cilje, in sicer odkriti čim več parametrizacij (generatorjev) pitagorejskih peteric, odkriti parametrizacijo, ki opiše vse pitagorejske peterice, v množici celih pitagorejskih peteric definirati množenje in preveriti ter dokazati, ali velja izrek o enoličnem razcepu na nerazcepne pitagorejske peterice. Opisali smo osem parametrizacij (generatorjev) pitagorejskih peteric. Odkrili in dokazali smo tudi generator, s katerim generiramo vse pitagorejske peterice. V množici celih pitagorejskih peteric smo definirali množenje pitagorejskih peteric. Dokazali smo, da obstaja enota za množenje, da je množenje asociativno in da ni komutativno. Kot povezavo povejmo, da je množenje pitagorejskih trojic komutativno in asociativno. Zastavili smo si tudi problem razstavljanja in dokazali, da niti v množici celih pitagorejskih peteric niti v množici naravnih pitagorejskih peteric ne velja izrek o enoličnem razcepu na nerazcepne pitagorejske peterice. V nam dostopnih virih smo zasledili zelo malo omemb in člankov o pitagorejskih petericah in še tisti so bili na visokem znanstvenem nivoju, ki ga nismo razumeli. O pitagorejskih trojicah in četvericah pa je več znanega. Tako smo nekaj lastnosti dobili iz idej o pitagorejskih trojicah in četvericah, nekaj pa je plod našega lastnega ustvarjanja. Nadaljnje raziskovanje pitagorejskih peteric bi se lahko usmerilo v iskanje pogojev, kdaj so pitagorejske peterice nerazcepne. Zanimivo bi bilo raziskati, kako so pitagorejske peterice razporejene znotraj štirirazsežnega vektorskega prostora. Predvidevamo pa, da bi bilo zelo težko ugotoviti, saj je pitagorejskih peteric zelo veliko. Z določeno hipotenuzo dobimo zelo veliko število pitagorejskih peteric. Izdelati bi bilo treba seveda računalniško simulacijo. Ker so pitagorejske trojice razporejene po parabolah, bi bilo zanimivo videti, ali so mogoče tudi pitagorejske peterice razporejene samo na določenih predelih.

4. Naloga z naslovom: **Dimenzija fraktalov in fraktalna dimenzija**

Kakšne so značilnosti fraktala? Nekaj pove že sama beseda fraktal, ki izvira iz latinske besede frāctus, ta pa pomeni zlomiti. Na začetku so tako poimenovali zvezno in nikjer odvedljivo krivuljo. To je krivulja, ki ji v nobeni točki ne moremo položiti tangente, v vsaki točki je prelomljena.

Sodobna definicija fraktala vsebuje dva osnovna pojma: sebipodobnost in fraktalno dimenzijo. Biti sebi podoben pomeni, da so drobni deli podobni celoti, so pomanjšana kopija celote. Zaradi sebipodobnosti odlikuje fraktal posebna lastnost, da lahko s sorazmerno preprostim opisom sestavimo izjemno zapletene in čudovite strukture. Morda je to razlog, da v naravi najdemo mnogo primerov sebipodobnosti.

Fraktalna dimenzija ni celo število, ampak zavzame realne vrednosti.

Dimenzijo sebipodobnega objekta izračunamo iz števila delov, na katere razpade sebipodobni objekt pri dani skrčitvi. Vzemimo daljico. Ta razpade na dve daljici polovične dolžine, kvadrat razpade na štiri kvadrate s polovično stranico, medtem ko kocka razpade na 8 kock s polovičnim robom. To lahko zapišemo z enačbami $2^1 = 2$, $2^2 = 4$ in $2^3 = 8$. Število 2 je faktor skrčitve, medtem ko je eksponent dimenzija objekta.

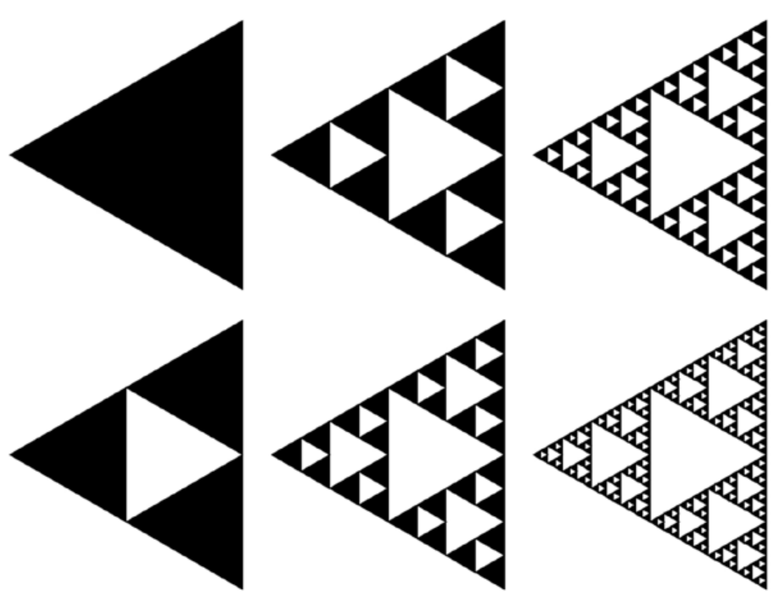
Na sliki 3 je prikazano nastajanje fraktala, ki se imenuje trikotnik Sierpinskega. Na vsakem koraku iz črnih trikotnikov izrežemo trikotnik, katerega stranica je polovica stranice črnega trikotnika. To nadaljujemo v nedogled, končni lik je trikotnik Sierpinskega. Koliko je njegova fraktalna dimenzija? Če stranice razpolovimo, razpade trikotnik na tri dele, ki so identični originalu, le za faktor 2 zmanjšani. Za fraktalno dimenzijo trikotnika Sierpinskega velja $2^n = 3$, ki pa ni več celo število.

Avtorica je v povzetku med drugim zapisala:

O fraktalih smo med raziskovanjem veliko odkrili. Najprej smo spoznali že znane fraktale, kot so Kochova krivulja, Kochova snežinka, Trikotnik Sierpinskega in Cantorjeva množica. Izračunali smo njihove fraktalne dimenzije, obsege in ploščine.

Naloga z naslovom: **Ali je pokončna piramida res pokončna**

Avtorja Maja Križnič, Lenart Žežlina, mentor Alojz Grahor Škofijska gimnazija Vipava



Slika 3: Trikotnik Sierpinskega

Naj na koncu omenim še nalogo, ki sicer ni posegla po najvišjem priznanju, bila pa je zanimiva in po dolgem času povzročila na koncu živahno razpravo.

Avtorja pravita:

V raziskovalni nalogi smo se poglobili v tri srednješolske učbenike za matematiko in v njih poiskali neskladja, ki smo jih v nalogi tudi predstavili. Pri tem smo se skušali vživeti v vlogo dijaka, ki se uči po učbeniku in rešuje naloge. Vprašali smo se tudi, kako bi bilo z vrednotenjem dijakovih izdelkov v primeru uporabe drugega učbenika.

Neskladja smo opisali in napisali pobude za poenotenje. Nekatera neskladja smo v nalogi poenostavili, saj so se posamezni problemi izkazali za globlje, kot smo sprva predvidevali. Ko smo se poglabljali v posamezni problem, smo naleteli tudi na matematična ozadja, ki presegajo naše znanje. Nalogo bi lahko še razširili in se pri določeni temi zadržali še veliko več časa, iskali izvore samih pojmov ter povezave med tujimi učbeniki in slovenskimi univerzitetnimi učbeniki za matematiko.

Zavedamo se, da najverjetneje nismo našli vseh neskladij v in med obravnavanimi učbeniki. Menimo, da bi bil potreben bolj strokovni pogled na omenjena in druga neskladja. Naša temeljna pobuda je, da bi bilo treba ugotovljena (in še morebitna druga neskladja) v slovenskih gimnazijskih učbenikih odpraviti s poenotenjem.

Zavedamo se tudi dejstva, da so na gimnazijskem nivoju potrebne določene poenostavitve in da dijake same podrobnosti v definicijah in konceptih v veliki večini ne pritegnejo niti ne zanimajo. Za dijaka je poglavitno, da zna nalogo rešiti po določenem postopku (ki je žal velikokrat samo rutinski in brez razumevanja), da bo naloga čim bolje ovrednotena v šoli pri ocenjevanju in na maturi. Zaradi same matematične korektnosti pa se nam zdi, da bi morala biti teorija, ki presega nivo gimnazijskega znanja, v učbenikih podana v posebnih okvirčkih vsaj z opombo, da »le-ta presega nivo gimnazijskega znanja« in z namigom, kje bo radovedni dijak našel odgovor.

V nalogi se nismo ukvarjali z vzroki, ki so pripeljali do neskladij. Verjamemo, da imajo avtorji svoje razloge za poenostavitve ali svoje rešitve. Cilj je bil le ugotoviti, ali neskladja so, jih evidentirati in predlagati pobude za poenotenje. Z vidika dijakov in končnega preverjanja znanja na maturi pa razlike vsekakor niso dobre. Matematika je eksaktna veda in dijaki pričakujemo doslednost. Kot sta nam povedala visokošolska matematika dr. Banič in dr. Milutinović, s katerima smo se prosto (ne v smislu raziskave) pogovarjali, na nivoju univerzitetne matematike ni neskladij.

Naš končni predlog je, da bi slovenski matematiki napisali slovenski matematični terminološki slovar. Menimo, da bi bil to dober pripomoček avtorjem učbenikov, učiteljem in dijakom.

Tatjana Kerin, dobitnica priznanja Blaža Kumerdeja za leto 2018

V Muzeju novejše zgodovine Slovenije smo 14. februarja 2019 že dvajsetič podelili priznanja Blaža Kumerdeja za izjemne dosežke pri razvoju in uvajanju novosti v vzgojno-izobraževalno prakso v partnerskem sodelovanju z Zavodom Republike Slovenije za šolstvo.

Za leto 2018 so jih prejeli:
- učiteljici Barbara Oder in
- **Tatjana Kerin**,
- Biotehniški center Naklo – Srednja šola in gimnazija,
- Gimnazija Franca Miklošiča Ljutomer,
- Gimnazija Nova Gorica ter
- skupina za razvijanje in uvajanje posodobitev pouka na Osnovni šoli Janka Glazerja Ruše.

S priznanji želimo predstaviti visoke strokovne dosežke posameznikov in ustanov pri delu z mladimi, poudariti njihovo ustvarjalnost in inovativnost ter se jim zahvaliti za prvovrstno sodelovanje z Zavodom.

Nagrajenka Tatjana Kerin je učiteljica matematike na Osnovni šoli Leskovec pri Krškem, ki je pomembno vplivala k dvigu kakovosti pouka matematike v Sloveniji. Pri svojem delu sledi visokim strokovnim standardom poučevanja, odnosa do dela in učencev, svoje strokovno znanje pa ves čas nadgrajuje in poglablja ter kontinuirano skrbi za svoj profesionalni razvoj. Ob tem svoje izkušnje uspešno deli in predstavlja drugim učiteljem ter jih navdušuje za spremembe in sodobne pristope k učenju in poučevanju matematike. Ima izvrstno sposobnost reflektiranja lastne pedagoške prakse, v katero ves čas vnaša izboljšave na področju oblik in metod dela z učenci in s tem pri učencih razvija pozitiven odnos do matematike.

Od leta 2015 do 2018 je kot aktivna članica razvojne skupine za matematiko v razvojni nalogi *Formativno spremljanje* pomembno prispevala k razvijanju, predstavljanju in širjenju ideje formativnega spremljanja med učitelji matematike. Gradiva, ki jih je v skupini pripravljala, so bila vključena tudi v priročnik *Formativno spremljanje pri matematiki*. Z izdelki *učencev, ki jih je skrbno zbirala več let, je prikazala* njihov napredek in svoj strokovni razvoj. Kot soavtorica priročnika je pomembno vplivala na to, da se ideja formativnega spremljanja razrašča med učitelji matematike in s tem dviguje kakovost pouka matematike. Svoje delo na področju formativnega spremljanja od leta 2018 nadgrajuje v novi razvojni skupini učiteljev matematike, ki se poglobljeno ukvarja z delom na področju meril za vrednotenje znanja učencev, izkazanega na različne načine. S svojo energijo v skupini ustvarja vzdušje zaupanja in podpore ter soustvarja vzpodbudno okolje za strokovni razvoj vseh članov v skupini. V razvojni nalogi *Formativno spremljanje* v podporo vsakemu učencu in razvoju vključujoče šole vodi šolski razvojni tim na Osnovni šoli Leskovec pri Krškem, kjer svoje znanje in izkušnje deli s svojimi sodelavci.

Foto: Andrej Novak

Od leve proti desni: direktor Zavoda RS za šolstvo dr. Vinko Logaj, minister za izobraževanje, znanost in šport dr. Jernej Pikalo, svetovalec na ZRSŠ, Tomaž Kranjc in nagrajenka Tatjana Kerin.

Kot večletna vodja študijskega središča za matematiko na Osnovni šoli Leskovec pri Krškem je vestno in strokovno izpolnjevala svoje naloge, pri čemer je presegala pričakovanja z vidika strokovnih prispevkov in idej, ki jih je prenašala učiteljem v svojem središču. Matematiko uspešno povezuje tudi z drugimi področji in na ta način prispeva k razvijanju pozitivnega odnosa do matematike. Učence vzpodbuja h kreativnosti in povezovanju z umetnostjo, kar je opaziti na stenah učilnic in hodnikov na šoli.

Svoje izkušnje pri spreminjanju lastne pedagoške prakse in tudi izkušnje z uvajanjem učenja s preiskovanjem je predstavila na številnih strokovnih srečanjih za različne ciljne skupine: kolegom v svojem aktivu in na šoli, na študijskih srečanjih, ravnateljem v Območni enoti Novo mesto Zavoda RS za šolstvo, šolskim kolektivom, na konferencah za učitelje matematike KUPM. Njeni strokovni prispevki so objavljeni v zbornikih omenjenih konferenc, na 2. mednarodni konferenci KUPM pa so svoje izdelke predstavili tudi njeni učenci.

Tatjana Kerin je v svojem načrtu dela v letu 2015 zapisala: »Želim, da bi učenci vedeli in razumeli, kaj naj se učijo, kako naj se učijo, in končno, kaj bodo potem znali. Želim, da bodo prevzeli tudi večjo odgovornost za svoje učenje, da bodo lažje vrednotili svoj napredek, dosežke, napredek vrstnika, dajali povratne informacije in načrtovali svoje učenje.«

S svojim pedagoškim delom v sodelovanju z Zavodom RS za šolstvo je te svoje cilje uspešno udejanjila in pomembno prispevala k dvigu kakovosti pouka matematike v Sloveniji. Zato je Tatjana Kerin prejela priznanje Blaža Kumerdeja.

Zbrane je nagovoril minister za izobraževanje, znanost in šport dr. Jernej Pikalo, ki je v nagovoru poudaril, da je naš šolski sistem, kot družbeni podsistem, eden

Foto: Andrej Novak

Nagrajenka Tatjana Kerin, učiteljica matematike.

najboljših na svetu. »Daje odlične rezultate in je obenem tako odprt, da lahko sprejema veliko kritike. Na vseh nas je, da le-to zapeljemo v primerne okvire in se poskušamo od tega veliko naučiti,« je povedal in dodal, da ga zato vedno znova nadgrajujemo, kakovostno izboljšujemo, kot so to počeli razsvetljenci. Izpostavil je, »da danes častimo tiste, ki ne le najbolje sodelujejo z Zavodom, ampak dajejo najboljši del sebe v to, da izobrazijo druge in jim kažejo pot«. »Predane učiteljice in učitelje, ki vidijo preko kalupov in so srce šolstva,« je poudaril in dodal, da je šolski sistem temelj, na katerem je utemeljena nacija. Naš šolski sistem je dober, ker ga stalno nadgrajujemo in hkrati redko revolucionarno spreminjamo, je dejal in ob koncu čestital vsem nagrajenkam in nagrajencem.

Nagrajenka Tatjana Kerin se je ob koncu slovesne podelitve priznanj zahvalila v imenu vseh prejemnikov priznanj in nagovorila zbrane.

Zahvalni nagovor Tatjane Kerin, učiteljice matematike na Osnovni šoli Leskovec pri Krškem in prejemnice priznanja Blaža Kumerdeja za leto 2018

Spoštovane in spoštovani, dovolite mi, da vas najprej prav lepo pozdravim. Gospoda ministra, gospoda direktorja in ostale predstavnike Zavoda za šolstvo, ravnatelje, ravnateljice, kolegice in kolege. Prijatelje, znance, sorodnike.

Hvala vam vsem, ker to svečanost delite z nami.

Biti učitelj ni samo poklic. Je strast. Je veselje. In predvsem, je pot. Pot zmot in vedno novih stran poti v iskanju najboljšega približka resnici. Z drugimi besedami, nikoli dokončana pot.

V čast in veselje mi je, da sem danes v družbi tistih, ki smo bili na enem od delčkov te poti še posebej opaženi. Vsak zase in vsak na svojem področju. Vsi pa kot uspešni partnerji Zavoda za šolstvo, kjer smo s skupnimi močmi in ob pomembni strokovni podpori posameznikov in Zavoda kot celote razvijali in odstirali nove poglede na svoje delo, se celovito razvijali in si zastavljali vedno nova vprašanja in izzive. Iskanja in reševanja le-teh smo se lotili s polno mero pedagoškega entuziazma, ki po mojem prepričanju je in mora ostati najmočnejše gonilo vsakega izmed nas in v pedagoških krogih nasploh. Poleg znanja, seveda.

Zahvaljujem se vsem, ki ste v našem delu prepoznali dodano vrednost, nas na poti spreminjanja podpirate, nam nudite strokovno pomoč in nam ne dovolite zaspati na lovorikah dosedanjega dela. Počaščeni smo kot nagrajenci in hkrati še vedno in še bolj motivirani za svoj nadaljnji profe-

Foto: Andrej Novak

sionalni razvoj. Naj nam bo to današnje druženje ne le v ponos ampak v vzpodbudo in navdih vsem nam zbranim in tistim doma, ki smo na kakršenkoli način povezani s pedagoškim poklicem.

Kolegice in kolegi. Učitelji moramo razpreti krila. Gojiti svoj pedagoški duh in ga hraniti z vedno novimi znanji in hotenji na poti do cilja. Kajti samo avtonomen, kompetenten, povezovalen, odprt, razmišljujoč … vsestransko izobražen učitelj, si dovoli za ta cilj videti ne najprej predpisanega učnega načrta, temveč predvsem in v prvi vrsti otroka. Učence.

Sanje naših učencev se začnejo največkrat z učiteljem, ki verjame v njih, ki čuti toplo naklonjenost do svojih učencev. Dober učitelj pove, pojasni, prikaže. Le Velik učitelj navdihuje. Prepričana sem, da je slovenski učitelj, s svojo pridobljeno formalno izobrazbo, pripravljen postati vse to in še več.

Pred nekaj leti me je pot lastnega profesionalnega razvoja pripeljala pod okrilje Zavoda za šolstvo, kjer sem se začela podrobneje in bolj poglobljeno seznanjati s formativnim spremljanjem. In če ravno temu raziskovanju nikoli ni konca, kajti vedno se odpirajo novi začetki, si upam trditi, da sem postala drugačna učiteljica. Mirnejša, svobodnejša, bolj odprta in zaradi presenetljivega odziva učencev na vse to, še bolj navdihnjena za svoj poklic.

Spoštovane in spoštovani.

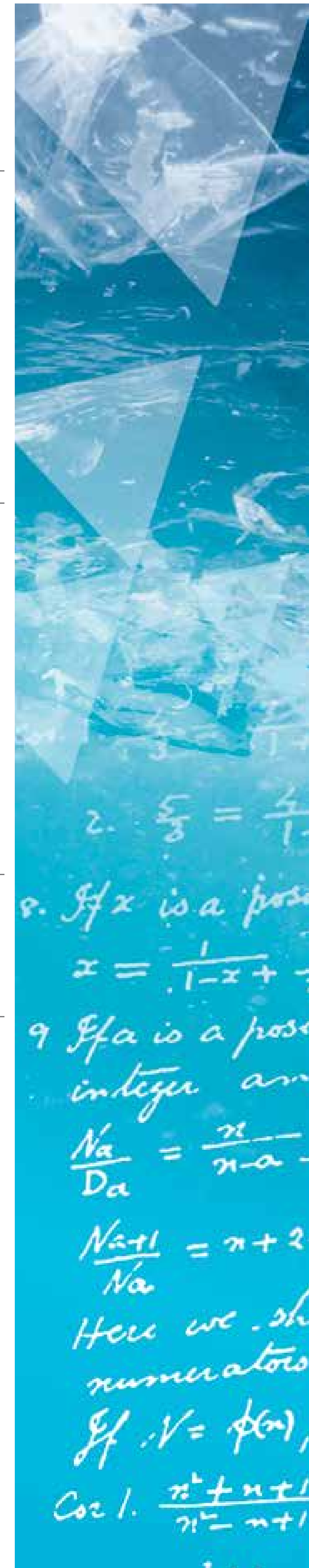
Kljub velikemu navdušenju, ki ga je, upam, čutiti preko izrečenih besed, pa vendarle moramo ostati kritični, preudarni, razmišljujoči in zahtevni posamezniki, slediti svojemu plemenitemu poslanstvu, da bi lahko s svojimi spoznanji in dejanji bili zgled in navdih šolajoči se mladini. Da bi jih lažje razumeli. In da bi jim lahko nudili čim več, kar jim bo pomagalo odrasti v samostojne, odgovorne, ustvarjalne in razmišljujoče ljudi. Hvala.

Foto: Andrej Novak

Dobitniki priznanja Blaža Kumerdeja za leto 2018.

Mathematics in school

1 2019, Volume 25



CONTENTS

ISSN 1318-010X