Elektrotehniški vestnik 77(1): 1-4, 2010
Electrotechnical Review: Ljubljana, Slovenija

Nekateri vidiki četrte Maxwellove enačbe

Anton R. Sinigoj

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za elektrotehniko, Tržaška 25, 1000 Ljubljana, Slovenija

E-pošta: anton.sinigoj@fe.uni-lj.si

Povzetek. V sestavku govorimo o vidikih četrte Maxwellove enačbe. Prvi je gotovo premikalni tok, kot Maxwellova izvirna zamisel, ki je odprla pot analizi valovnih pojavov in razvoju elektrotehnike na splošno. V povezavi s premikalnim tokom in interpretacijo Maxwellovih enačb se odpira vidik vzročnosti. Osrednje mesto je namenjeno povezavi z Biot-Savartovim zakonom in zakonom o ohranitvi naboja. Dolžna pozornost je namenjena tudi akademiku V. A. Koželju, ki je o teh stvareh razmišljal in izzval iskanja tudi pri drugih. Poseben vidik odpira snov, ki interaktira z elektromagnetnim poljem. Ne nazadnje je tu še pedagoški vidik: opaziti je, da je obravnavana enačba tisti del elektromagnetne teorije, ki se ji v učbenikih namenja premalo pozornosti.

Ključne besede: četrta Maxwellova enačba, premikalni tok, polni tok, eter, Biot-Savartov zakon

Some of the Aspects of the Fourth Maxwell's Equation

Extended abstract. The paper addresses some of the aspects of the fourth Maxwell's equation. The first to be dealt with is the displacement current, which has, as an original Maxwell's idea, enabled analysis of wave phenomena and development of electrical engineering in general. In connection with the displacement current and interpretation of the last Maxwell's equations, the still present aspect of causality has been opened. The main attention is devoted to the equation in connection with the Biot-Savart law in the light of the conservation of charge. One of the aspects has been opened also by the interacting between material and electromagnetic field. Worth of being considered is also the pedagogical aspect. The fact is that the fourth Maxwell's equation is the part of the theory that is most likely not being paid enough attention in textbooks.

In the beginning of our paper we highlight the Maxwell's idea making him introduce the displacement current and the difficulty associated with its realisation after the supposition about ether had been rejected. So far, the manner of introduction of the displacement current into the theory has nevertheless practically remained the same, as it can be seen even from the most modern textbooks. Also remaining unchanged is the thesis that the displacement current has the role of the sources such as current of the charge carriers. The focus of the paper is on the aspect introduced by the analysis of the magnetic field of a finite section of the current curve. It has been established that the displacement current in the fourth Maxwell's equation has in fact the role of the property and not the role of the source of the magnetic field. It would therefore be more appropriate to place it on the opposite side of the equality sign. So far there has no answer been given to the question as to how would the theory of electromagnetism have been developing if the last Maxwell's equation had been of an earlier date than it actually is? The time gap of fifty years between Ampere, Laplace, Biot and Savart to Maxwell is quite "too long". We find it our duty to devote our attention also to the academician V. A. Koželj who himself was deeply attracted to the unknown horizons of these subjects and evoked interest of many others. By writing the Maxwell's equations in conducting, insulating, dielectric and magnetic materials, the idea of the displacement current - the role of which is in the Maxwell's sense resumed by the polarisation current - has been revivified. So far, writing the Maxwell's equations has taken different forms. Physics write them in a slightly different form than electrical engineers. This makes us speculate what in fact is the role of individual quantities and provides the basis towards more in-depth understanding of the electromagnetic phenomena. The paper is concerned only with certain aspects of the fourth Maxwell's equation without lessening the importance of those related to movement, which are hereby only briefly mentioned as their complexity exceeds the limits of this paper.

Keywords: fourth Maxwell's equation, displacement current, total current, ether, Biot-Savart law

1 Uvod

Četrta (zadnja) Maxwellova enačba,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right), \qquad (1)$$

pomeni zaokrožitev odnosov v trikotniku[1] električno polje, magnetno polje in električni naboji-toki oziroma nadgradnjo tretje o Faradayevi indukciji,

[1] V trikotniku, ki je ključen tudi pri gostoti elektromagnetne sile: $\mathbf{f}_L = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$.

Prejet 5. avgust, 2009
Odobren 9. september, 2009

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{2}$$

in dveh Gaussovih lastnosti,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{3, 4}$$

Stanje električnega naboja določata njegova gostota (ρ) in gostota toka (**J**), elektromagnetno polje opredeljujeta električna poljska jakost (**E**) in gostota magnetnega pretoka (**B**), konstanti μ_0 in ε_0 pa sta permeabilnost oziroma dielektričnost vakuuma. Njim se pridružuje še kontinuitetna enačba,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \tag{5}$$

ki izhaja iz zakona o ohranitvi naboja in je implicitno zajeta v zadnji in prvi Maxwellovi enačbi, po drugi strani pa je eden najbolj verjetnih razlogov, da je Maxwell do takrat poznan Amperov vrtinčni zakon,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \tag{6}$$

ki velja za statična polja, razširil z gostoto premikalnega toka ter vpeljal pojem polni (celotni) tok, z gostoto:

$$\mathbf{J}_{\text{polni}} = \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{7}$$

V tem sestavku želimo govoriti o nekaterih vidikih, ki jih sproža četrta Maxwellova enačba. Prvi je gotovo sam premikalni tok kot Maxwellova izvirna zamisel, ki je v nadaljevanju odprla pot analizi valovnih pojavov v elektromagnetiki in razvoju elektrotehnike na splošno. V povezavi s premikalnim tokom in interpretacijo zadnjih Maxwellovih enačb se odpira še vedno trdoživ vidik vzročnosti in posledičnosti. Osrednji vidik posvečamo Biot-Savartovemu zakonu in zakonu o ohranitvi naboja. Nov pogled odpira snov, ki z elektromagnetnim poljem interaktira, in razčlenitev virov. Prikriti vidik, ki se z drugimi prepleta in je tudi motiv tega sestavka, pa je pedagoški. Pri sledenju virom je namreč mogoče opaziti, da je četrta Maxwellova enačba tisti del elektromagnetne teorije, ki se ji v učbenikih nameni premalo pozornosti.

2 Premikalni tok

Začnimo z mislijo iz Maxwellovega temeljnega dela [1], ki jo navaja diplomsko delo Leona Marca [2]: *Na voljo imamo le malo dokazov, izhajajočih iz poskusov, v zvezi z neposrednim elektromagnetnim učinkom tokov, ki nastajajo v dielektrikih zaradi spremembe električnega odmika. Toda skrajne težave, ki se pojavijo, ko želimo zakone elektromagnetizma uskladiti z nezaključenimi tokovi, so eden od razlogov, zakaj moramo priznati obstoj prehodnih tokov zaradi spremembe odmika. Pomembnost teh tokov se bo pokazala, ko bomo obravnavali elektromagnetno teorijo svetlobe.* Izbrani citat opisuje polnilni tok kondenzatorja – ta plošči elektri z nasprotnima nabojema ter v medprostoru posledično gradi Maxwellov tok z gostoto $\varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ –, in ga avtorji učbenikov uporabijo kot pomoč pri uvajanju novega, premikalnega toka oziroma toka odmika; od starejših omenimo Tamma [3], od sodobnih pa npr. Ulabyja [4]. Vedeti moramo, da je bil v Maxwellovem času v veljavi »eter«, o katerem so bili prepričani, da ima, čeravno kot »izpraznjen prostor«, redke nabite delce, ki se v časovno spremenljivem polju premikajo in tvorijo električni tok. Ker pa je vsakršnemu toku oziroma gibajočemu se naboju lastno magnetno polje, je povsem razumljivo, zakaj je Maxwell Amperov zakon (6) razširil oziroma dopolnil s premikalnim tokom. Problem nastane, ko z Einsteinom eter »pade« in se »zamaje« tudi Maxwellov argument za uvedbo premikalnega toka. Kljub temu se za člen $\varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ še vedno uporablja ime »displacement current in vacuum«. Redka izjema je npr. Purcell, ki v slovitem učbeniku fizike [5] prizna, da danes takšno ime ni več primerno (da je historično sicer na mestu, vendar bolj zavaja kot koristi).

Zanimivo razmišljanje, ki je nastalo pod vtisom Maxwellovega razumevanja stvari, je prispeval tudi naš profesor in akademik Venčeslav A. Koželj v [6], ko je analiziral magnetno polje, ki ga ustvarja tok skozi odsek vodnika. Sklepal je, da je polje, ki ga izračunamo z Biot-Savartovim zakonom, v resnici polje, ki pripada toku v vodniku in premikalnemu oziroma »poljskemu toku«, kot ga je imenoval, ki se »razvije« skozi prostor med koncema odseka in sklene tok v samem odseku. Pri tem se je opiral na Maxwellovo tezo o zaključenosti, ki je iz vstopnega citata tudi razvidna.

Iz dela [7], ki je posvečeno 150-letnici rojstva J. C. Maxwella, je mogoče razbrati: da je uvedba premikalnega toka morda izšla tudi iz želje po simetriji enačb (1, 2) v prostoru brez tokov, in sicer, da sta levi strani vrtinca polj, desni strani pa časovna odvoda nasprotnih polj,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{8}$$

Enačbi sta bili takrat zapisani v veliko bolj okorni obliki [1], kot sistem šestih enačb, in s konstantami, ki so bile stvar sistema CGS. Ko je Maxwell obdelal enačbe za ravninski primer, je dobil valovno enačbo, katere rešitev je določala motnjo, ki bi se v prostoru širila s svetlobno hitrostjo. Ob njej je izrekel hipotezo (ki jo delno zajema tudi uvodni citat): svetloba je elektromagnetni pojav. V istem delu so v poznejših izdajah navedene izmerjene vrednosti svetlobne hitrosti, med katerimi najdemo tudi ime Klemenčič in hitrost $3{,}019 \cdot 10^{10}$ cm/s iz leta 1884. L. Marc je izbrskal in v [2] navedel, da bi mogel biti to Slovenec Nace Klemenčič.

3 Vzročnost

Maxwellovo razumevanje vloge premikalnega toka je vneslo vidik vzročnosti: da je ta tok odmika (čeravno v etru) tudi vir magnetnega polja. Maxwellu sta verjetno to narekovali dve dejstvi: da je tok vir magnetnega polja in da spreminjajoče se magnetno polje spremlja inducirano električno polje, kar je posredno zajeto v enačbah (2, 6). Ob njiju se ponuja interpretacija: da sta desni strani (tok in spremenljiv magnetni pretok) vira posamičnih polj, da enačbi torej razkrivata vzročno-posledična odnosa. To mnenje je še vedno prisotno in implicitno zajeto tudi pri Feynmanu [8], ko v primeru radialne razelektritve točkastega naboja povezuje ničnost magnetnega polja v prostoru z ničnostjo desne strani enačbe (1), čeravno ima že sam radialni tok to lastnost, da nima magnetnega polja. Vzročno-posledični odnos ovrže Jefimenko v [9] in poudari, da so viri elektromagnetnega polja naboji in toki in da je prvi dve Maxwellovi enačbi prav zaradi tega primerneje pisati takole:

$$\nabla\times\mathbf{B}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\mu_0\mathbf{J},\quad \nabla\times\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=\mathbf{0}. \tag{9, 10}$$

4 Biot-Savartov zakon

Na ta zakon se v delu [6] opira tudi Koželj: magnetno polje tokovne niti izrazi s prostorskimi koti stožcev oziroma lijakov, ki imata svoja vrhova na začetku in koncu niti. Izkaže se, da se podoben rezultat dobi tudi za integral gostote magnetnega pretoka poljubno oblikovane niti s tokom i vzdolž poljubne sklenjene pentlje [10, 11], pri čemer so uporabljeni enaki geometrijski elementi kot v [12], pri izpeljavi magnetne napetosti med dvema točkama v okolici tokovne zanke:

$$\oint_{\mathcal{L}}\mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}=\frac{\mu_0 i}{4\pi}\left(\Omega_2-\Omega_1\right). \tag{11}$$

Ω_1 in Ω_2 sta prostorska kota lijakov, ki sta napeta med sklenjeno pentljo $\mathcal{L}$ in točko T_1, točko začetka, glede na opredeljen tok i, oziroma točko T_2, točko konca tokovne niti. Z vidika zakona o ohranitvi naboja sta T_1 in T_2 mesti, na katerih se kopičita nasprotna naboja (Q na koncu in $-Q$ na začetku), in velja: $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = i$. To omogoči zapis relacije (11) v novi obliki:

$$\oint_{\mathcal{L}}\mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}=\mu_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{Q}{4\pi}\left(\Omega_2-\Omega_1\right). \tag{12}$$

Omenjena naboja ustvarjata v prostoru električno polje $\mathbf{E}$, katerega časovni odvod je sorazmeren ritmu toka, izraz pod znakom odvoda pa ustreza električnemu pretoku ϕ_e skozi ploskev $\mathcal{A}$, ki je napeta na pentljo $\mathcal{L}$, oziroma integralu polja $\varepsilon_0\mathbf{E}$ skozi to ploskev,

$$\begin{aligned}&\oint_{\mathcal{L}}\mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}=\mu_0\frac{\mathrm{d}\phi_\mathrm{e}}{\mathrm{d}t}=\\&\mu_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_{\mathcal{A}}\varepsilon_0\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a}=\mu_0\varepsilon_0\oint_{\mathcal{A}}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a}.\end{aligned} \tag{13}$$

Ko krivuljni integral pretvorimo v ploskovnega, dobimo okrnjeno Maxwellovo enačbo

$$\nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}. \tag{14}$$

Enačba govori o tem, da sta magnetno in električno polje v okolici tokovne niti matematično povezani: da desna stran ustreza ravno gostoti Maxwellovega toka, množeni s permeabilnostjo vakuuma.[2]

Na tem mestu lahko »ugibamo«: če bi Maxwellovi predhodniki opravili pretres magnetnega polja odseka toka, bi člen v enačbo (6) $\mu_0\varepsilon_0\partial\mathbf{E}/\partial t$ ne vstopil kot tok odmika, ampak kot osnovna lastnost magnetnega polja. Vse to je za ta in za druge primere opravljeno v [10, 11]; izhodišči sta prostorski postavitvi odseka toka in zanke oziroma opne te zanke, da opna in odsek nimata skupne točke, ali da odsek opno prebada, v nadaljevanju pa, da je odsekov veliko in da je v vsakem od njih diferencialni tok. S temi posegi se pridobi integralska, s Stokesovim izrekom pa še diferencialna oblika četrte Maxwellove enačbe:

$$\oint_{\mathcal{L}}\mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}=\mu_0\oint_{\mathcal{A}}\left(\mathbf{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{a}, \tag{15}$$

$$\nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\left(\mathbf{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right). \tag{16}$$

5 Maxwellove enačbe v snovi

Snovi delimo na prevodnike, izolante, dielektrike in magnetike, čeravno zadeva ni črno-belo-siva, ampak živopisna. Kakorkoli: v trdih snoveh, tekočinah, plinih in relativno praznih prostorih imamo določeno strukturo prostih nosilcev naboja (protone, elektrone, ione ali še druge delce) z gostoto ρ_prosti, ki v gibanju pomenijo prosti tok z gostoto $\mathbf{J}_\mathrm{prosti}$. V izolacijskih in dielektričnih snoveh imamo opraviti z vezanimi naboji, ki se odzivajo v parih, zato jim priredimo vektor gostote električnega dipolnega momenta oziroma vektor polarizacije $\mathbf{P}$, v magnetnih snoveh pa z naboji, ki se vedejo kot vrtavke, in jim priredimo vektor gostote magnetnega dipolnega momenta oziroma vektor magnetizacije $\mathbf{M}$. Izkaže se, da moremo s pomočjo teh količin opisati stanje nabojev v prostoru, da sta:

$$\rho=\rho_\mathrm{prosti}+\rho_\mathrm{vezani}=\rho_\mathrm{prosti}-\nabla\cdot\mathbf{P}, \tag{17}$$

$$\mathbf{J}=\mathbf{J}_\mathrm{prosti}+\mathbf{J}_\mathrm{vezani}=\mathbf{J}_\mathrm{prosti}+\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}+\nabla\times\mathbf{M}. \tag{18}$$

Časovni odvod polarizacije je gostota polarizacijskega toka in pomeni premike vezanih nabojev v atomski, molekulski ali kristalni strukturi, rotor magnetizacije pa ustreza gostoti Amperovih tokov v magnetnih snoveh. Če z razdelanima gostotama vstopimo v Maxwellovi enačbi (1, 2), dobimo:

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho_\mathrm{prosti}-\nabla\cdot\mathbf{P}}{\varepsilon_0}, \tag{19}$$

[2] Z analizo vektorskega magnetnega potenciala tokovne niti in zakona o ohranitvi naboja moremo na soroden način pridobiti tudi Lorentzov pogoj, $\nabla\cdot\mathbf{A}+\mu_0\varepsilon_0\partial V/\partial t=0$, oziroma zvezo med magnetnim in električnim potencialom [11].

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J}_{\text{prosti}} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right), \tag{20}$$

po ureditvi pa še:

$$\nabla \cdot \left(\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \right) = \rho_{\text{prosti}}, \tag{21}$$

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J}_{\text{prosti}} + \frac{\partial \left(\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \right)}{\partial t}. \tag{22}$$

Izraza v oklepajih ustrezata gostoti električnega pretoka **D** in magnetni poljski jakosti **H**, kar da:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{prosti}}, \tag{23}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{prosti}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{24}$$

Fiziki navajajo Maxwellov sistem z enačbami (2, 3, 19, 20), kot npr. Feynman v [8], nam elektrotehnikom pa so bližje enačbe (2, 3, 21, 22), kot jih navaja npr. Stratton v [13]. Sprememba odmika, ki jo omenja uvodni citat, se v resnici nanaša na drugi sumand, na $\partial \mathbf{D} / \partial t$, oziroma na gostoto premikalnega toka, ki je vsota dveh,

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \tag{25}$$

vsota gostote toka odmika v vakuumu (z že omenjenimi pridržki) in gostote polarizacijskega toka v dielektriku. Tu lahko vidimo, da se Maxwellovemu razumevanju premikalnega toka v celoti približa tok vezanih nabojev, za katerega ruski fizik A. Eichenwald leta 1903 ugotovi, da je z vidika generiranja magnetnega polja povsem enakovreden toku prostih nabojev. V tej luči omenimo še razširitev četrte enačbe v sistemu s počasi gibajočim se dielektrikom, ki jo najdemo v delu [14] ruskih avtorjev Meeroviča in Mejeroviča:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J}_{\text{prosti}} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} - \nabla \times \left(\mathbf{v} \times \mathbf{P} \right) + \nabla \times \mathbf{M} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right). \tag{12}$$

Pozornost zbudi dodatni člen, ki po obliki spominja na gostoto Amperovih tokov v magnetikih.

6 Sklep

Preveč bi se oddaljili od namena sestavka, če bi zašli v teme, ki se navezujejo na relativno gibanje, kot v [14, 15, 16] ali podobnih temeljnih delih. Opozoriti smo želeli zgolj na nekatere vidike in na nazorno možnost, ki jo ponuja sam Biot-Savartov zakon, da skozi svoje lastnosti osvetli vsebino razširitve Amperovega zakona in pomaga pri razumevanju Maxwellovih enačb oziroma celotnega matematičnega modela elektromagnetizma. Nezanemarljiva je pri tem tudi izvirna Koželjeva ideja, da obširneje razmišlja o magnetnem polju tokovnega elementa in odseka toka v luči električnega polja med točkama, ki sta krajišči obravnavane tokovne strukture.

7 Literatura

[1] J. C. Maxwell: A treatise on electricity and magnetism, 1873, DoverPublications, 1954.

[2] L. Marc: Maxwellov tok odmika, Diploma naloga, Fakulteta za elektrotehniko, Ljubljana, 1994.

[3] I. E. Tamm: Osnovy tjeorii električestva, Gostehizdat, Moskva 1949.

[4] F. T. Ulaby: Fundamentals of applied electromagnetics 2004 Media Edition, Pearson Prentice Hall, London, 2004.

[5] E. M. Purcell: Electricity and magnetism, Udžbenik sveučilišta u Berkleyu, svezak 2, Tehnička knjiga, Zagreb, 1988.

[6] V. A. Koželj: Amperov zakon in nekaj elektromagnetnih »paradoksov« I in II, Elektrotehniški vestnik, 4-5, 101-108 in 6-7, 165-170, letnik 19, Ljubljana, 1951.

[7] L. S. Polak: Maksvell i razvitije fiziki XIX – XX vekov, Akasdemija nauk SSSR, Nauka, Moskva, 1985.

[8] R.P. Faynman, R. B. Leighton, M. Sands: The Faynman lectures on Physics, Addison- Wesley, 1972.

[9] O. D. Jefimenko: Causality electromagnetic induction and gravitation, Electret Scientific Company, Star City, 2000.

[10] A. R. Sinigoj: Osnove elektromagnetike, Založba FE-FRI, Ljubljana, 1996.

[11] A. R. Sinigoj: ELMG polje, Založba FE-FRI, Ljubljana, 1996.

[12] B. D. Popović: Elektromagnetika, Građevinska knjiga, Beograd, 1986.

[13] J. A. Stratton: Electromagnetic theory, McGraw-Hill, New York, 1941.

[14] E. A. Meerovič, B. E. Mejerovič: Metody reljativistskoj elektrodinamiki v elektrotehnike in elektrofizike, Energoatomizdat, Moskva, 1987.

[15] A. Einstein: Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Ann. Der Physil, vol. 17, S. 891-921, 1905.

[16] R. S. Elliot: Relativity and Electricity, IEEE Spectrum, No. 3, pp. 140-152, 1966.

Anton Rafael Sinigoj je diplomiral, magistriral in doktoriral na Fakulteti za elektrotehniko Univerze v Ljubljani. Na tej fakulteti predava predmete Osnove elektrotehnike I in II ter Elektromagnetiko. Področji njegovega dela sta teorija elektromagnetike in uporaba numeričnih metod v elektromagnetiki.