PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **4** (1976/1977)
Številka 1
Strani 8–13

Alojzij Vadnal:

LINEARNO PROGRAMIRANJE, Naloga o najcenejšem prevozu

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/4/4-1-Vadnal.pdf

LINEARNO PROGRAMIRANJE

Naloga o najcenejšem prevozu

Iz dveh tovarn A in B moramo prepeljati izdelano blago v mesti P in R. Iz tovarne A odpeljemo 16 t, iz tovarne B pa 23 t blaga. V mesto P moramo pripeljati 18 t, v mesto R pa 21 t blaga. Pri prevozu blaga plačamo prevozne stroške; prevoz 1 t blaga stane pri prevozu od A do P 9 din, od A do R 6 din, od B do P 7 din in od B do R 8 din. Ti podatki so pregledno vpisani v tabeli 1. Pri teh podatkih rešimo nalogo:

Kako naj usmerimo prevoz blaga iz tovarn v obe mesti, da bodo skupni prevozni stroški najmanjši?

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">Mesto</td><td rowspan="2">Količina odpeljanega blaga</td></tr>
<tr><td>P</td><td>R</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tovarna</td><td>A</td><td>9</td><td>6</td><td>16</td></tr>
<tr><td>B</td><td>7</td><td>8</td><td>23</td></tr>
<tr><td colspan="2">Količina pripeljanega blaga</td><td>18</td><td>21</td><td>39</td></tr>
</table>

Tabela 1. Podatki naloge o najcenejšem prevozu

REŠEVANJE NALOGE PO METODI STOPALNIKOV

Pri reševanju naloge po tej metodi si pomagamo s tabeli 1. prirejeno pomožno tabelo 2. Izmislimo si kakšen sistem prevoza, ki ustreza pogojem obeh tovarn in obeh mest. V ta namen vzamemo, da prepeljemo od A do P kar največ blaga; ker ga lahko odpeljemo iz A največ 16 t in ker ga moramo pripeljati v P 18 t, prepeljemo iz A v P 16 t blaga; to količino vpišemo v pomožni tabeli v sredino predalčka (A,P). Zdaj lahko določimo količine na vseh drugih poteh prepeljanega blaga. Iz A ne moremo prepeljati v R nič več blaga, ker smo že izčrpali zalogo blaga v A; iz B lahko prepeljemo v P samo še 2 t blaga; končno prepeljemo še iz B v R 21 t blaga; ta števila vpišemo v tabeli 2. v sredino ustreznih predalčkov. Tako dobimo prevozni sistem, ki mu ustreza četverica števil

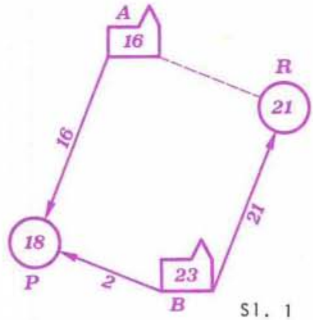
$$\begin{matrix} 16 & 0 \\ 2 & 21 \end{matrix}$$

in ki ga ponazarja slika 1. Temu prevoznemu sistemu ustrezajo skupni prevozni stroški, ki jih izračunamo takole:

$$S_1 = 16.9 + 0.6 + 2.7 + 21.8 = 326 \text{ din}$$

	P	R	
A	16^{9}	0^{6}	16
B	2^{7}	21^{8}	23
	18	21	

Tabela 2



Sl. 1

Vsako četverico števil, ki zadošča vsem pogojem za tovarni in mesti, imenujemo *možno rešitev* naloge. Izračunano možno rešitev podaja tabela 2. in ponazarja slika 1. Razmislimo, ali moremo to rešitev izboljšati. Hitro se prepričamo, da je to možno, če sklepamo takole: Pri izračunani rešitvi ostaja pot od A do R neizkoriščena. Zato je edino mogoča sprememba te rešitve taka, da usmerimo na to pot nekaj blaga, recimo 1 tono. Da ne prekršimo pogojev, moramo zato prepeljano količino blaga od A do P zmanjšati za 1 t, od B do P zvečati za 1 t in od B do R zmanjšati za 1 t. Izračunajmo, za koliko se pri tej spremembi spremenijo skupni prevozni stroški. Ker dodamo na poti od A do R 1 t, se stroški zvečajo za 6 din; ker odvzamemo s poti od A do P 1 t, se stroški zmanjšajo za 9 din; ker dodamo na poti od B do P 1 t, se stroški povečajo za 7 din; ker odvzamemo s poti od B do R 1 t, se stroški zmanjšajo za 8 din. Skupno se torej spremenijo stroški za

$$6 - 9 + 7 - 8 = -4 \text{ din}$$

Pri takem računanju spremembe stroškov smo najprej "stopili" v predalček (A,R) nato pa preko predalčkov (A,P), (B,P) in (B,R) nazaj v (A,R); odtod izraz *metoda stopalnikov*.

Stroške torej lahko zmanjšamo! Skupni prevozni stroški se znižajo za 4 din, če prepeljemo na poti od A do R 1 tono blaga več. Zato ravnamo najbolj gospodarno, če usmerimo na pot od A do R kar največ blaga. Toda več kot 16 t ga ne moremo prepeljati po tej poti, ker ga tovarna A nima več na zalogi; zato usmerimo na pot od A do R 16 t blaga in skladno s pogoji spremenimo količine prepeljanega blaga še na drugih treh poteh. Tako dobimo kot drugo možno rešitev četverico števil

$$\begin{matrix} 0 & 16 \\ 18 & 5 \end{matrix}$$

Tej rešitvi ustrezajo skupni prevozni stroški

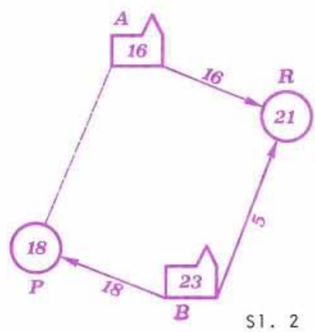
$$S_2 = 0 \cdot 9 + 16 \cdot 6 + 18 \cdot 7 + 5 \cdot 8 = 262 \text{ din}$$

Drugo možno rešitev podaja tabela 3. in ponazarja slika 2.

Na podoben način, kakor smo se pri prvi možni rešitvi mogli prepričati z metodo stopalnikov, da lahko rešitev izboljšamo, se pri drugi možni rešitvi lahko prepričamo, da te ne moremo izboljšati. Prepričaj se sam! Zato je ta rešitev optimalna in naloga je rešena; blago prepeljemo najbolj poceni, če prepeljemo iz A v P 16 t, iz B v P 18 t in iz B v R 5 t; tak prevoz stane 262 dinarjev.

	P	R	
A	0^{9}	16^{6}	16
B	18^{7}	5^{8}	23
	18	21	

Tabela 3



Sl. 2

Naloga. Postavi si sam kakšno nalogo o najcenejšem prevozu in jo reši.

Naloga. Reši nalogo o najcenejšem prevozu, ki jo podaja tabela:

	P	R	
A	2	5	9
B	4	3	16
	9	16	

Rešitev: 9 0
0 16 ; Ta naloga je zanimiva zato, ker razpade optimalni prevozni sistem v dva med seboj nepovezana sistema.

Naloga. Reši nalogo o najcenejšem prevozu, ki jo podaja tabela:

	P	R	
A	1	2	9
B	3	4	16
	6	19	

Ta naloga je zanimiva zato, ker so vse rešitve enako "dobre".

ANALITIČNO REŠEVANJE NALOGE

	P	R	
A	9 x	6 $16-x$	16
B	7 $18-x$	8 $5+x$	23
	18	21	

Tabela 3.

Rešimo nalogo o najcenejšem prevozu, ki smo jo že rešili po metodi stopalnikov, še analitično. V ta namen vzamemo, kakor vidimo v tabeli 3, da prepeljemo od A do P neznano količino x ton blaga. Nato določimo ob upoštevanju proizvodnje tovarn in potreb mest še na drugih treh poteh prepeljane količine blaga; te znašajo $16-x$, $18-x$ in $5+x$ ton. Vsa ta števila vpišemo v tabelo 3. v sredino ustreznih predalčkov. Jasno je, da ne sme biti nobena od vpisanih količin blaga negativna. Od tod sledi, da zadošča spremenljivka x neenačbam:

$$x \geqq 0, \quad x \leqq 16, \quad x \leqq 18, \quad 5+x \geqq 0$$

Četrta neenačba je izpolnjena, brž ko je izpolnjena prva; zato jo lahko opustimo. Tretja neenačba je izpolnjena, brž ko je izpolnjena druga; zato tudi to lahko opustimo. Potemtakem mora ustrezati spremenljivka x neenačbama:

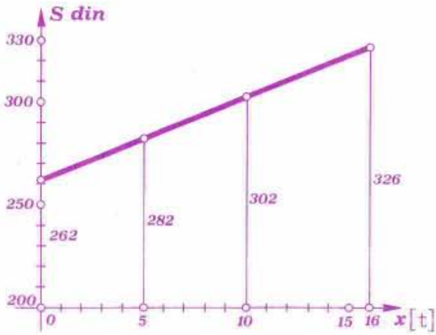
$$0 \leqq x \leqq 16$$

Izračunajmo še skupne prevozne stroške pri v tabeli 3. zapisanem prevoznem sistemu; ti znašajo:

$$S(x) = 9x + 6(16 - x) + 7(18 - x) + 8(5 + x) =$$
$$= (262 + 4x) \text{ din}$$

Vidimo, da so prevozni stroški S odvisni od spremenljivke x. To odvisnost ponazarja diagram na sliki 3.

Zdaj lahko formuliramo nalogo o najcenejšem prevozu takole: Določiti moramo vrednost spremenljivke x, ki zadošča neenačbama $0 \leqq x \leqq 16$ tako, da postanejo skupni prevozni stroški $S(x) =$



Slika 3

$= 262 + 4x$ najmanjši. Ti stroški so najmanjši in znašajo 262 din, če je vrednost spremenljivke x kolikor mogoče majhna; to se zgodi, ko je $x = 0$. To vidimo iz izraza $262 + 4x$, pa tudi iz diagrama na sliki 3. Če vstavimo v tabelo 3. namesto x to vrednost, dobimo optimalno rešitev $\begin{matrix} 0 & 16 \\ 18 & 5 \end{matrix}$ za katero so skupni prevozni stroški najmanjši in znašajo 262 din.

Naloga. V organizaciji združenega dela je zaposlenih 20 enako delovnih strugarjev in 10 enako delovnih varilcev. Za struženje potrebuje organizacija 17, za varjenje pa 13 delavcev. Če strugar struži, ustvari svoji organizaciji na dan 1 000 din dohodka, če vari, pa samo 600 din; če varilec struži, ustvari 800 din, če vari, pa 1 100 din dohodka. Kako naj razporedi organizacija delavce na delovna mesta, da bodo ustvarili vsi skupaj največji dohodek? Nalogi ustreza tabela:

	Stružnice	Varilni aparati	Število delavcev
Strugarji	1000	600	20
Varilci	800	1100	10
Število strojev	17	13	

Optimalna rešitev: $\begin{matrix} 17 & 3 \\ 0 & 10 \end{matrix}$; 29 800 din

Naloga. Pri tej nalogi presodi, koliko lahko pripomore kapetan k uspehu šahovskega moštva. Domače moštvo šahovskega kluba "Milan Vidmar" ima 3 enako močne mojstre (M) in 7 enako močnih mojstrskih kandidatov (K). Gostujoče moštvo šahovskega kluba "Vasja Pirc" ima 6 enako močnih mojstrov in 4 enako močne mojstrske kandidate. Domač mojster se lahko nadeja, da bo dobil povprečno v partiji z gostujočim mojstrom po 0,4 točke, v partiji z gostujočim mojstrskim kandidatom pa 0,9 točke; domač mojstrski kandidat lahko upa, da bo dobil povprečno v partiji z gostujočim mojstrom po 0,3 točke, v partiji z gostujočim mojstrskim kandidatom pa 0,5 točke. Ti podatki so zbrani v tabeli:

		"Vasja Pirc"		Število igralcev
		Mojstri	Mojstrski kandidati	
"Milan Vidmar"	Mojstri	0,4	0,9	3
	Mojstrski kandidati	0,3	0,5	7
Število igralcev		4	6	

Kapetan domačega moštva ve, da bo razvrstil nasprotni kapetan svoje moštvo po moči igralcev in sicer na prve štiri deske mojstre in na zadnjih šest desk mojstrske kandidate. Kako naj razporedi kapetan domače moštvo, da bodo dosegli kar največ točk, če sme razporejati igralce po deskah ne glede na šahovsko kategorijo? Katera razporeditev je najbolj "nesrečna"?

Rešitev. Najbolj ugodno in najbolj neugodno razporeditev podaja tabela:

	Najbolj "srečna" razporeditev		Najbolj "nesrečna" razporeditev	
Deska	M. Vidmar	V. Pirc	M. Vidmar	V. Pirc
1	*K*	*M*	*M*	*M*
2	*K*	*M*	*M*	*M*
3	*K*	*M*	*M*	*M*
4	*K*	*M*	*K*	*M*
5	*K*	*K*	*K*	*K*
6	*K*.	*K*	*K*	*K*
7	*K*	*K*	*K*	*K*
8	*M*	*K*	*K*	*K*
9	*M*	*K*	*K*	*K*
10	*M*	*K*	*K*	*K*
Pričakovano število točk	5,4	4,6	4,5	5,5

Alojzij Vadnal