PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **11** (1983/1984)
Številka 1
Strani 4–16

Vladimir Batagelj:

HAMILTONOVA NALOGA ZA GRAFE

Ključne besede: matematika, teorija grafov, rekreacijska matematika, šah, grafi, Hamiltonova naloga.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/11/639-Batagelj.pdf

MATEMATIKA

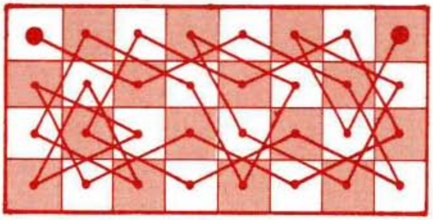
HAMILTONOVA NALOGA ZA GRAFE

Hamiltonova naloga za grafe, s katero se bomo seznanili v tem sestavku, je ena izmed "klasičnih" nalog teorije grafov. Kakor vrsta drugih področij teorije grafov in matematike nasploh, je tudi ta naloga pognala in črpala svoje osnovne zamisli in spoznanja iz bogate zakladnice kratkočasne matematike. Poglejmo si najprej tri kratkočasne naloge, ki predstavljajo nekakšne "korenine" Hamiltonove naloge:

NALOGA O POŽREŠNEM ŠAHOVSKEM KONJIČKU: V pariški Biblioteki hranijo pod številko 10287 pergament iz XIV. stoletja, v katerem je v latinščini zapisan najstarejši znani primer *naloge o požrešnem konjičku:*

Na zgornjo polovico šahovnice razmestimo vseh 32 šahovskih figur. Pri tem enega od konjev postavimo v zgornji levi vogal. Ali lahko ta konj v enointridesetih zaporednih skokih "požre" vse ostale figure?

Odgovor na zastavljeno vprašanje je pritrdilen. Eno izmed rešitev prikazuje slika 1.



Slika 1

Od tu je le korak do današnje oblike naloge o požrešnem konjičku - zastavljene za celo šahovnico. V tej obliki se je naloga razširila po Evropi nekje na začetku XVIII. stoletja. Od tedaj že ves čas privlači ljubitelje kratkočasnih nalog. Z njo se je ubadala in prispevala svoj delež k njenemu reševanju vrsta znanih matematikov: *A. de Moivre* (1667-1754), *L. Euler* (1707-1783), *A.T. Vandermonde* (1735-1796), *K.F. Gauss* (1777-1855), *H.E. Dudeney* (1857-1930), *J. Kürschak* (1864-1933), ... pa tudi drugih, ki sta jih privlačila šahovnica in "trenje orehov": *Collini* (18. stol.), *Warnsdorf* (prva polovica 19. stol.), *Jaenisch* (sredina 19. stol.), francoski general *Parmentier*, *Frost* (druga polovica 19. stol.), ...

Naloga o požrešnem konjičku ne manjka v nobeni pregledni knjigi po zabavni matematiki [1,6,7,9,10].* Najdemo jo tudi v [13], kjer jo je *N. Wirth* uporabil za ilustracijo metode drevesnega prebora (backtracking).

Zaradi izredno velikega števila možnih skakljanj je nesistematično iskanje rešitve ponavadi obsojeno na neuspeh. Posamezni, bolj ali manj uspešni načini reševanja naloge običajno postavijo dodatna pravila, ki naj jim skakljanja zadoščajo.

Nekaj rešitev je prikazanih na sliki 2: a) *A. de Moivre*, b) *A. Pongracz*, c-d) *E. Falkner* (druga polovica 19. stol.), e-f) *T. Parmentier*, g) *C. Collini*, h) *A.H. Frost*, i-k) *L. Euler*, l-p) *A. Cretaine* (sredina 19. stol.), r-s) *A.T. Vandermonde* .

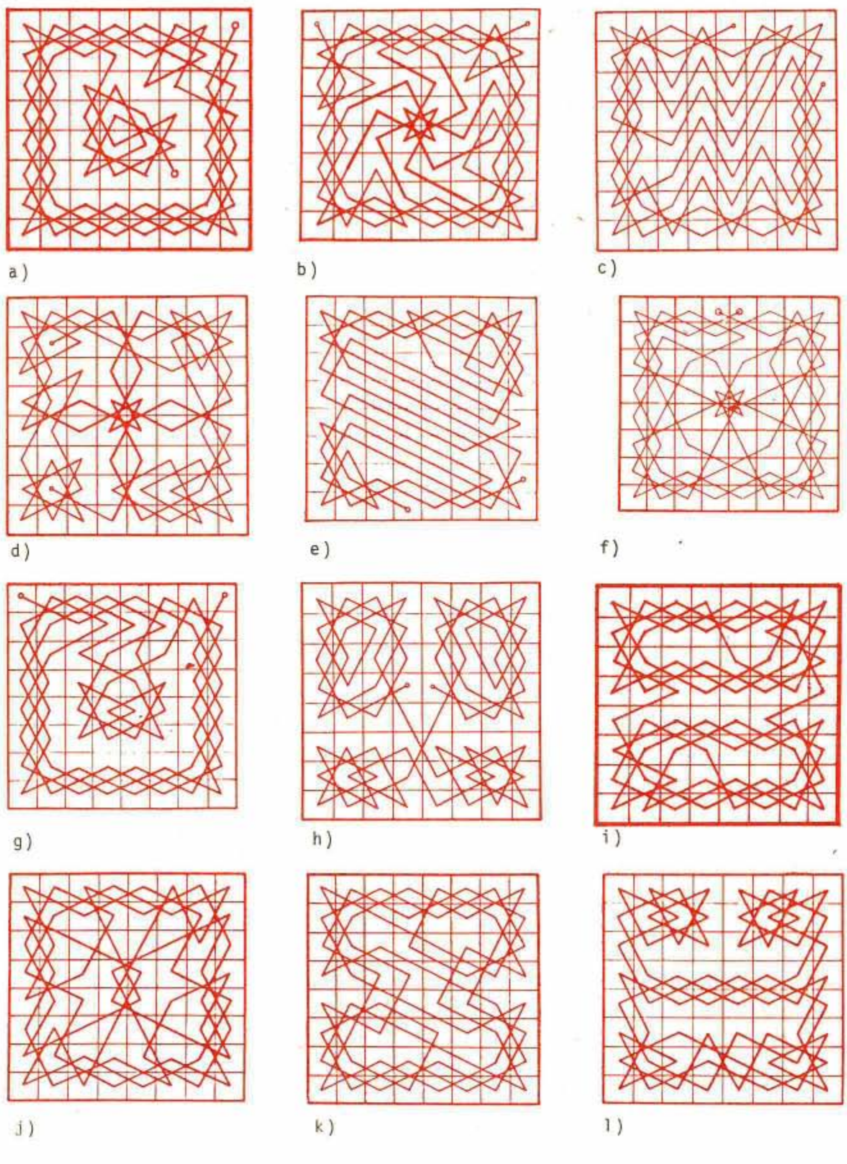
Rešitve i-s imajo še dodatno lepo lastnost, da so sklenjene - s polja, na katerem konjiček svoje skaklanje konča, lahko skoči na začetno polje.

na kateremkoli polju šahovnice. Prvo znano sklenjeno rešitev zasledimo v Eulerjevem pismu (26. april 1757) Goldbachu.

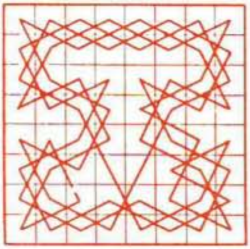
Rešitev naloge lahko podamo tudi tako, da na posamezno polje šahovnice zapišemo zaporedno številko koraka (od 1 do 64). Ta-

---

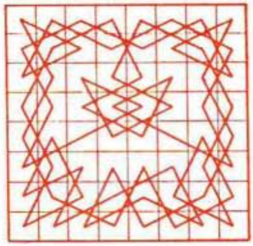
* števila v oglatem oklepaju označujejo literaturo, zbrano na koncu sestavka.



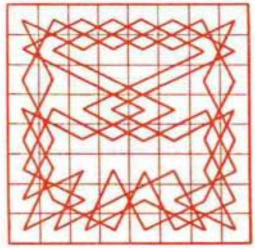
Slika 2.1



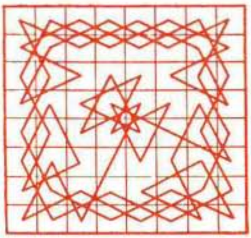
m)



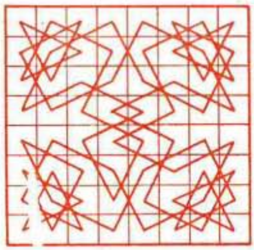
n)



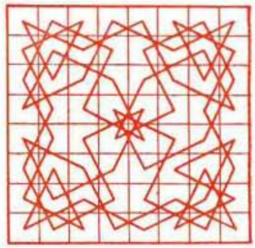
o)



p)



r)



s)

Slika 2.2.

ko dobimo kvadratno tabelo 8 x 8. *W. Baverlyju* (1848, slika 3.a) in *C.F. Jaenischu* (1852, slika 3.b) je uspelo najti rešitvi, za kateri pripadajoči tabeli predstavljata magična kvadra-

1	30	47	52	5	28	43	54	260
48	51	2	29	44	53	6	27	260
31	46	49	4	25	8	55	42	260
50	3	32	45	56	41	26	7	260
33	62	15	20	9	24	39	58	260
16	19	34	61	40	57	10	23	260
63	14	17	36	21	12	59	38	260
18	35	64	13	60	37	22	11	260
260	260	260	260	260	260	260	260	

a)

58	11	24	63	14	37	26	35	260
23	62	51	12	25	34	15	38	260
10	49	64	21	40	13	36	27	260
61	22	9	52	33	28	50	16	260
48	7	60	1	20	41	54	29	260
53	4	45	8	52	32	17	42	260
6	47	2	57	44	19	30	55	260
3	50	1	46	31	56	40	18	260
260	260	260	260	260	260	260	260	

b)

Slika 3

(Opomba: v magičnem kvadratu je vsota števil v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu vedno ista.)

ta s konstanto $(1 + 2 + 3 + \ldots + 64)/8 = 260$.

Nalogo o požrešnem konjičku so poskušali reševati tudi na "šahovnicah" drugih oblik in velikosti. Tako na primer obstaja sklenjena rešitev za kocko $4 \times 4 \times 4$, pri čemer enotne kocke predstavljajo polja, pa tudi za "šahovnico" na površini kocke $4 \times 4 \times 4$. Več trditev o obstoju rešitev na posameznih neobičajnih šahovnicah je postavil že *Euler*.

Za pravokotne šahovnice velikosti $p \times q$, pri čemer sta $p,q \geq 3$, se je izkazalo:

- naloga ni rešljiva samo za naslednje šahovnice: 3×3, 3×5, 3×6 in 4×4;
- na šahovnicah: 3×4, $3 \times n$, $n \geq 7$, 4×5, 4×6, 4×7, 4×8 in $(2n+1) \times (2m+1)$ (ter morda še katerih) obstajajo le nesklenjene rešitve.

Več o požrešnem konjičku lahko bralec prebere v knjigi [1], iz katere je povzeta tudi večina povedanega.

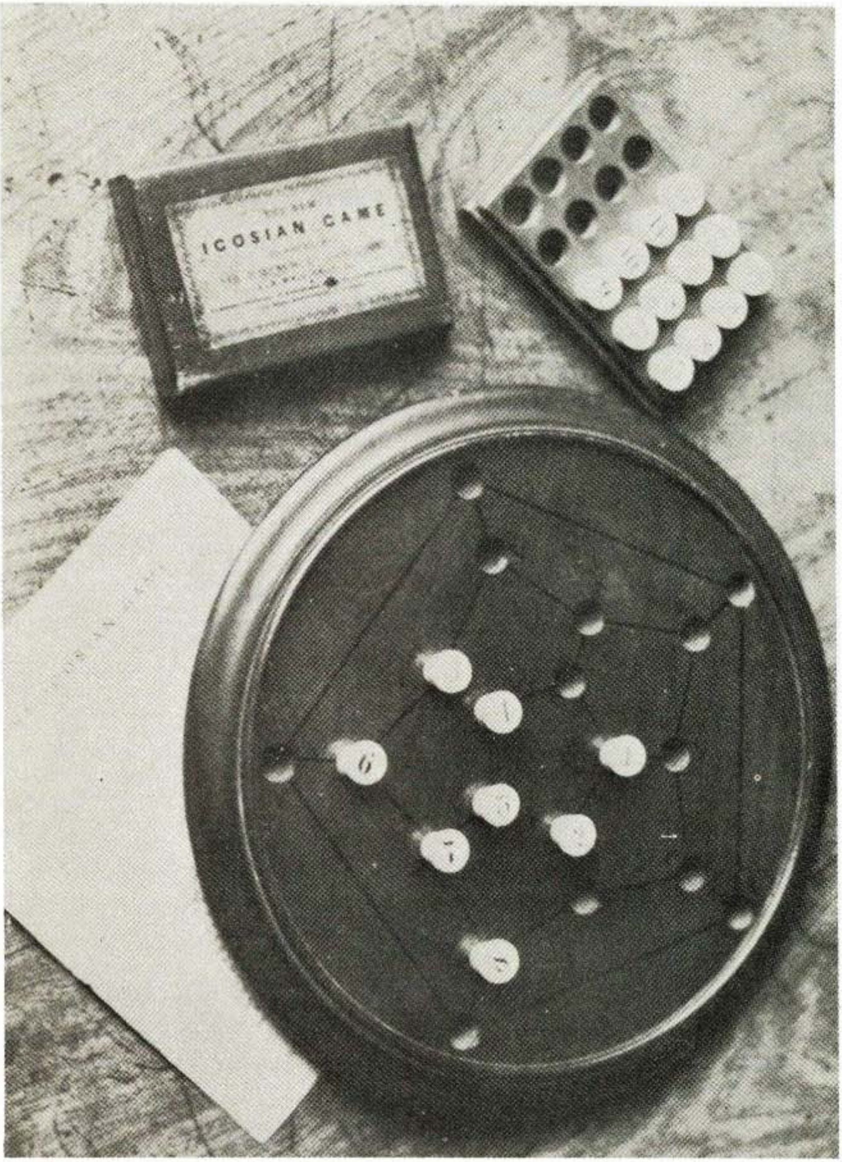
POLIEDRI IN "POPOTOVANJE OKROG SVETA" [4]: V sestavku, ki ga je *Kraljevska družba (Royal Society)* prejela 6. avgusta 1855, je *T.P. Kirkman*(1806-1895) zastavil in poskušal rešiti naslednji problem:

Ali se lahko sprehodimo po robovih poliedra*, tako da gremo skozi vsako oglišče (natanko) enkrat, in nato sprehod končamo v začetnem oglišču?

No, izkazalo se je, da je v njegovi glavni trditvi napaka. Tako je edini prispevek omenjenega sestavka zastavitev problema in dokaz, da obstaja dovolj obsežen razred poliedrov, za katere naloga ni rešljiva.

Malo zatem, 7. oktobra 1856, je znani matematik in astronom *W.R. Hamilton* (1805-1865) objavil svoj *"dvajseterski račun"* (Icosian Calculus) - primer nekomutativne operacije, ki mu je

*O poliedrih je Presek že pisal, na primer v VIII.letniku, strani 134-142.

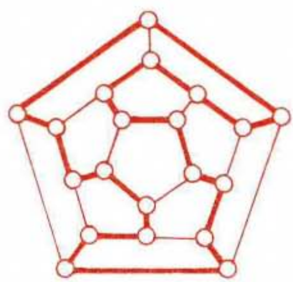


Slika 4 prikazuje komplet za dvajsetersko igro (isosian game).

našel predstavitev v sprehajanjih po mreži dodekaedra (dvanajsterec = pravilno telo z 12 (dodeka-) mejnimi peterokotniki in 20 (ikoza-, gr. eikosi) oglišči). To predstavitev je tudi uporabil kot osnovo za *"Dvajseterško igro"* (Icosian Game, glej sliko 4), ki zahteva od reševalca, da po zemljevidu, ki ga sestavlja mreža dodekaedra, obide 20 mest - vozlišča mreže, vsakega po enkrat.

Iz vozlišča, v katerega smo prišli, lahko nadaljujemo sprehod po dodekaedrski mreži le na levo (L) ali desno (D). Torej je vsak sprehod mogoče popisati z zaporedjem Ljev in Djev. Zaradi pravilnosti dodekaedra pri tem začetna točka in smer nista pomembni. Stikanje takih zaporedij je asociativna operacija; ki pa ni komutativna, saj $LD \neq DL$. Veljajo pa naslednje zveze:

$$D^5 = L^5 = 1$$
$$DL^2D = LDL$$
$$LD^2L = DLD$$
$$DL^3D = L^2$$
$$LD^3L = D^2$$



Zahtevo igre lahko sedaj povemo takole: poišči zaporedje Ljev in Djev dolžine 20, ki ima vrednost 1 in ne vsebuje nobenega podzaporedja z vrednostjo 1. Z nazornim razmislekom je kaj lahko sprevideti, da zaporedje, ki je rešitev, ne more vsebovati podzaporedij LD^2L, DL^2D, $(LD)^3L$, $(DL)^3D$, D^4 in L^4 .

Naštete zveze nam omogočajo, da "izračunamo" možne rešitve. Poglejmo si primer:

$$1 = L^3 L^2 = L^3DL^3D = (L^3D)^2 = (LDL^3D^2)^2 = (LDLDL^3D^3)^2 =$$
$$= LDLDLLLDDDLDLDLLLDDD$$

Dobljeni obhod je prikazan z debelejšo črto na sliki 5.

OMIZJE KRALJA ARTURJA: Še kot gimnazijec sem se, najbrž ob kakem od matematičnih tekmovanj, srečal z naslednjo nalogo:

Na dvoru kralja Arturja se je zbralo $2n$ vitezov. Za vsakega iz med njih velja, da si ni (vzajemno) sovražen z več kot n-1 od prisotnih vitezov. Pokaži, da Merlin (svetovalec kralja Arturja) lahko posede viteze okrog okrogle mize, tako da ne bo nihče sedel ob svojem sovražniku!

Kasneje sem to nalogo zasledil tudi v nekaj zbirkah nalog za srednješolce [5, 11] .

Za vse tri opisane naloge lahko najdemo skupni imenovalec v teoriji grafov. V nadaljevanju bomo uporabljali terminologijo iz [3]; o teoriji grafov glej še [12, 2]. Vsaki nalogi lahko priredimo graf, in sicer takole:

- *Naloga o požrešnem konjičku* : vsakemu polju šahovnice ustreza točka grafa. Točki sta povezani natanko takrat, ko sta ustrezni polji šahovnice "povezani" s konjičkovim skokom. Tako dobimo, na primer, za šahovnico 4 x 4 graf, ki je prikazan na sliki 6.

- *poliedri in popotovanje okrog sveta*: točke so oglišča poliedra, povezave so robovi poliedra, graf (pravilneje slika grafa) pa je kar mreža poliedra.

- *omizje kralja Arturja*: vsakemu vitezu ustreza točka grafa. Točki sta povezani natanko takrat, ko si pripadajoča viteza nista sovražna.

Če prevedemo zahteve vseh treh nalog v besednjak teorije grafov, spregledamo, da vse zahtevajo isto:

V danem grafu določi, če obstaja, pot (cikel), ki gre skozi vsako točko grafa natanko enkrat.

Takim ciklom (potem) pravimo *Hamiltonovi* cikli(poti)*.Če v grafu obstaja Hamiltonov cikel (pot), pravimo, da je graf *Hamiltonov (šibko Hamiltonov)*.
Brez škode za splošnost lahko v nadaljevanju predpostavimo, da so grafi, s katerimi imamo opravka, brez zank in med poljubnima točkama vodi kvečjemu ena (neusmerjena) povezava.

Osnovno vprašanje, ki si ga je teorija grafov zastavila v zvezi s Hamiltonovimi grafi, je: Kako ugotoviti, ali je dani graf (šibko) Hamiltonov? Seveda je zaželeno, da je pri tem "način ugotavljanja" kar se da splošen. Zato zastavimo *Hamiltonovo nalogo za grafe* takole:

Poišči potrebne in zadostne pogoje (postopek), ki za vsak dani graf "učinkovito" odločijo, ali je (šibko) Hamiltonov ali ni!

Žal nam teoretični dosežki, sposojeni iz računalništva, o zahtevnosti postopkov (*Karp*, 1972) kažejo na to, da najbrž (večina strokovnjakov je v to prepričana, čeprav še ni dokazano) taki pogoji (postopek) za Hamiltonovo in njej podobne naloge ne obstajajo.

Čeprav take "negativne" ugotovitve po svoje pokvarijo lepoto in miren tek teorije, pa po drugi strani zagotavljajo "neizčrpnost" ustrezne problematike. V svojih prizadevanjih, da bi ugnali Hamiltonovo nalogo, so jo matematiki "grizli" z dveh strani: *zadostni pogoji za neobstoj* (negativni pogoji) in *zadostni pogoji za obstoj* (pozitivni pogoji) Hamiltonove poti (cikla) v danem grafu. Negativni pogoji niso negacija zadostnih pogojev za obstoj (pozitivnih pogojev), ampak so negacija potrebnih pogojev za obstoj.

Do negativnih pogojev pridemo ponavadi tako, da pokažemo, da ima vsak (šibko) Hamiltonov graf neko lastnost P. Če dani graf nima lastnosti P, potem ni (šibko) Hamiltonov.

Običajno zadostuje že naslednja lastnost (šibko) Hamiltonovih grafov: če iz danega Hamiltonovega grafa odstranimo k točk, dani graf razpade na največ k povezanih delov - *komponent*; in na

* čeprav bi bilo, kakor vemo, bolj pošteno, da bi mu rekli Kirkmanov

največ $k+1$ komponent, če je graf šibko Hamiltonov. Iz te lastnosti izhaja:

IZREK 1: Če iz grafa G odstranimo k točk in tako dobimo graf z več kot k komponentami, potem graf G ni Hamiltonov; če je komponent več kot $k+1$, potem ni niti šibko Hamiltonov.

Izrek 1 je posplošitev ideje, s katero dokažemo, da za šahovnice z lihim številom polj ne obstaja sklenjena rešitev naloge o požrešnem konjičku. Namreč: če bi obstajala, bi, ker konjiček skače ...belo, črno, belo, črno,... vsebovala enako število belih kot črnih polj. To pa pomeni, da ima šahovnica sodo število polj.

Z izrekom 1 pokažemo tudi, da za šahovnico 4×4 ne obstaja za nalogo o požrešnem konjičku niti nesklenjena rešitev. V ta namen zadostuje, da odstranimo iz pripadajočega grafa (glej sliko 6) točke 6, 7, 10 in 11. Dobimo 6 komponent.

Tudi pozitivnih pogojev je cel kup. Večina jih temelji na spoznanju, da je graf (šibko) Hamiltonov, če je le dovolj močno povezan (in ima morda še kako drugo lepo lastnost). Najznačilnejše za pozitivne pogoje je zaporedje pogojev, ki so sorodni trditvi iz naloge o omizju kralja Arturja. Prvi korak v tem zaporedju je *Diracov* izrek (1952), med zadnjimi pa *Chvátalov* izrek (1971). Slednjega navajam brez dokaza. Še prej pa povejmo, kaj je to *stopnja točke*: to je število (različnih) točk, ki so s povezavo povezane z dano točko. Stopnjo točke u označimo z $d(u)$. Tako, pripravljeni smo:

IZREK 2. Naj bo $d_1 \leq d_2 \leq d_3 \ldots \leq d_n$ zaporedje stopenj točk grafa G na $n \geq 3$ točkah. Če je za vsako naravno število k, tako da je $1 \leq k < n/2$, velja

$$d_k \leq k \Longrightarrow d_{n-k} \geq n-k$$

potem je graf G Hamiltonov.

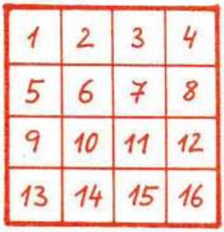
Nekaj nadaljnjih rezultatov o Hamiltonovi nalogi je pomešanih še med naslednjimi nalogami:

NALOGE

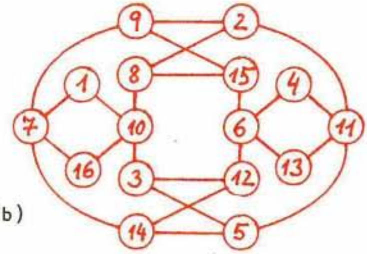
1. Pokaži, da naloga o požrešnem konjičku ni rešljiva za šahovnice: 3×3, 3×5 in 3×6 !
2. Poišči (nesklenjeno) rešitev naloge o požrešnem konjičku za šahovnice: 3×4, 4×5, 4×6 in 5×5 !
3. Poišči sklenjene rešitve naloge o požrešnem konjičku za šahovnico 6×6, za "šahovnici" na sliki 7 in za "šahovnici" (prostorsko in površinsko) v (na) kocki $4 \times 4 \times 4$!
4. Na šahovnico postavimo na polja, ki vsebujejo črno piko (slika 8), črne figure. Ali lahko postavimo na šahovnico belega konja tako, da bo v 16 skokih "požrl" vse črne figure?
5. Ali velja v "Dvajseterski igri" zveza: $DL = LD^2$?
6. Določi vse rešitve "Dvajseterske igre", ki se začenjajo z $DDDL$... oziroma $LDDDLL$... !
7. Ali v grafih na sliki 9 obstaja Hamiltonov cikel (pot)? Če pot (cikel) obstaja, jo (ga) nariši!
8. Iz Chvátalovega izreka izpelji:
   a) *Orejev izrek* (1960): Naj v grafu G na $n \geqq 3$ točkah za vsak par točk u in v, ki nista krajišči skupne povezave, velja:

   $$d(u) + d(v) \geqq n$$

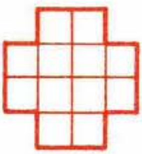
   potem je graf G Hamiltonov.
   b) *Diracov izrek*: Naj v grafu G na $n \geqq 3$ točkah za vsako točko u velja $d(u) \geqq n/2$, potem je graf G Hamiltonov.
9. Iz pozitivnih pogojev za obstoj Hamiltonovih ciklov dobimo običajno pozitivne pogoje za obstoj Hamiltonovih poti, tako da grafu dodamo novo točko, ki jo povežemo z vsemi točkami originalnega grafa. Izpelji pogoje za obstoj Hamiltonovih poti, ki izhajajo iz Chvátalovega, Orejevega in Diracovega izreka!



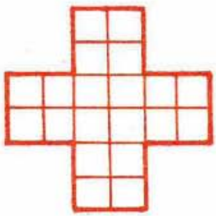
Slika 6a)



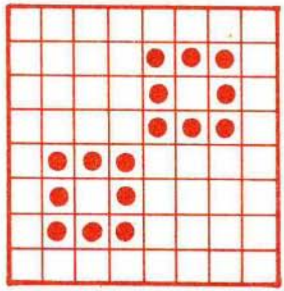
Slika 6b)



Slika 7a)

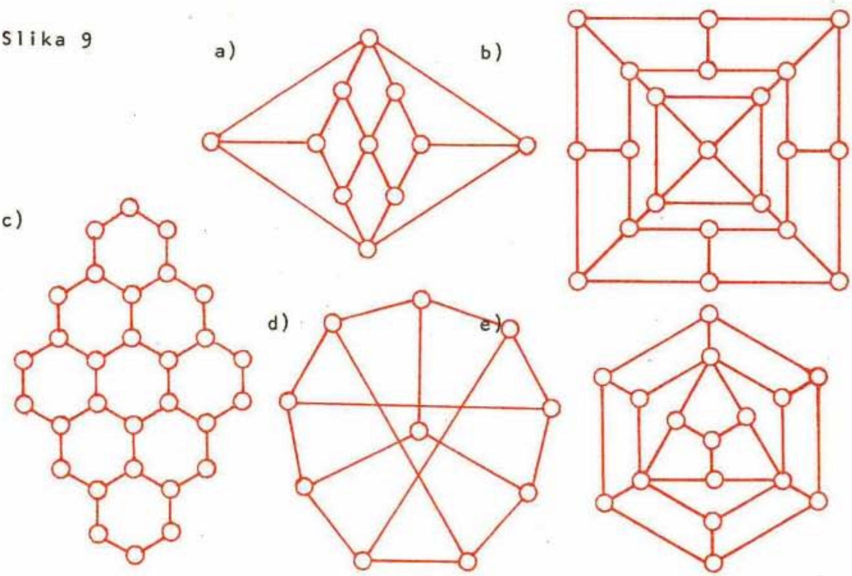


Slika 7b)



Slika 8

Slika 9



10. n deklet in n fantov je prišlo na ples. Izkazalo se je, da se vsako dekle pozna z vsaj polovico fantov, in da se vsak fant pozna vsaj s polovico deklet.

a) Dokaži, da lahko vsi skupaj zaplešejo kolo tako, da bo vsako dekle med znanima fantoma in vsak fant med znanima dekletoma!

   Nasvet: V pripadajočem grafu lahko med seboj (vsakega z vsakim) povežemo s povezavami vse fante; ravno tako tudi dekleta. Zakaj!?

b) Dokaži, da lahko vsi hkrati zaplešejo tako, da bosta vsak par sestavljala znanca!

Vladimir Batagelj

LITERATURA

[1] W. Ahrens, *Matematische unterhaltungen und spiele*. B.G. Teubner, Leipzig, Berlin, 1. del 1910 / 2. del 1918

[2] B. Andrásfai, *Introductory graph theory*. Akadémiai Kiadó, Budapest 1977

[3] D. Bezek, V. Batagelj, *Nekaj o grafih in njihovi uporabi*. Presek 6 (1978/79) 1, 24-31

[4] N.L. Biggs, E.K. Lloyd, R.J. Wilson, *Graph theory 1736-1936*. Clarendon Press, Oxford 1976

[5] C. Budurov, V. Florov, *Sbornik ot zadači za matematičeski olimpiadi*. Narodna prosveta, Sofija 1966

[6] H.E. Dudeney, *Amusements in mathematics*. Dover, New York 1970 (ruski prevod v: *Kenterberijskie golovolomki*. Mir, Moskva 1979)

[7] M. Gardner, *Matematičeskie dosugi*. (Prevod iz angleščine) Mir, Moskva 1972

[8] M. Gardner, *Matematičeskie golovolomki i razvlečenija*. (Prevod iz angleščine) Mir, Moskva 1972

[9] E.I. Ignatiev , *V carstve smekalki*. Nauka, Moskva 1978

[10] Ž. Kostić, *Med igro in matematiko*. DZS, Ljubljana 1963

[11] D.O. Škljarskij, N.N. Čencov, I.M. Jaglom, *Izbranye zadači i teoremy elementarnoj matematiki*. Nauka, Moskva 1976

[12] J. Vrabec, *Prikaz teorije grafov*. Obzornik Mat. Fiz. 14 (1967) 58-71, 107-120

[13] N. Wirth, *Računalniško programiranje*. (Prevod iz angleščine) DMFA SRS, Ljubljana 1979