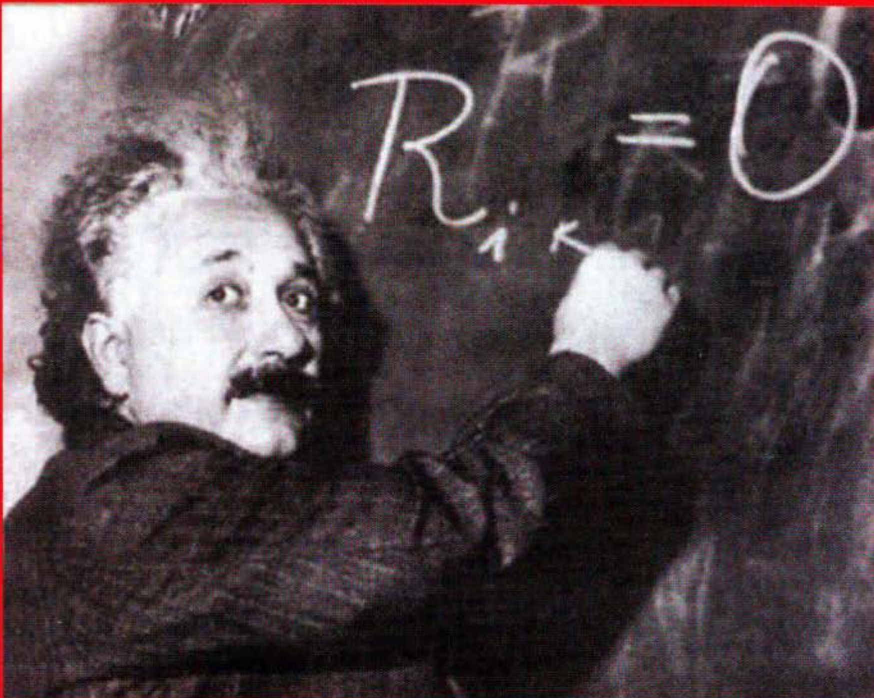
PRESEK

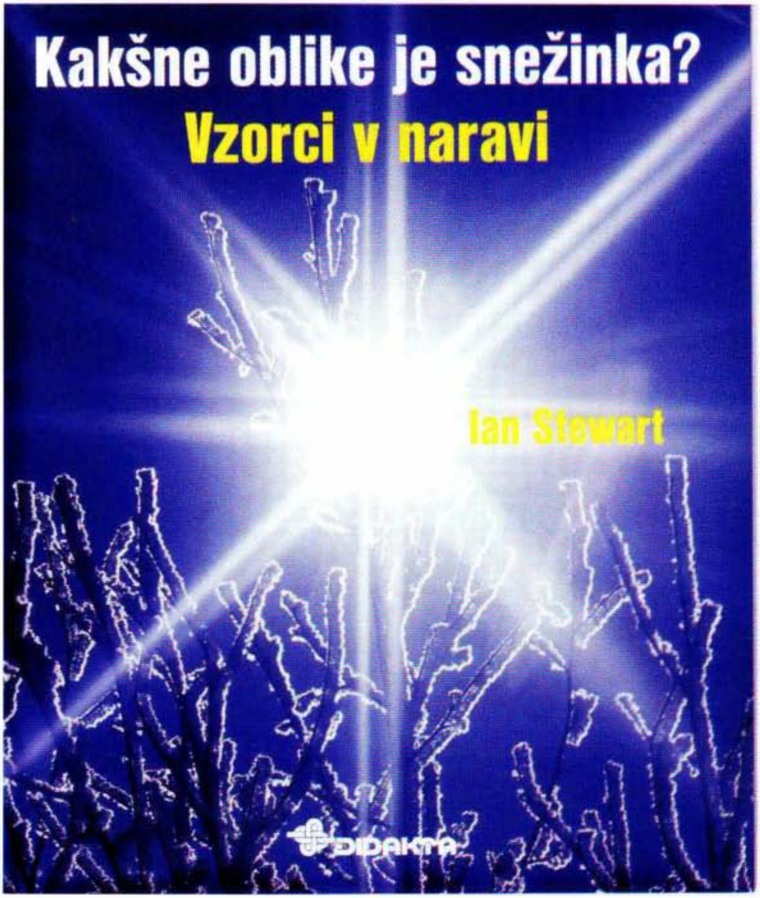
31 (2003 – 04) 6



ISSN 0351-6652
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

Ian Stewart: KAKŠNE OBLIKE JE SNEŽINKA? Vzorci v naravi

Pri založbi Didakta je izšla lepa in izjemno zanimiva knjiga *Kakšne oblike je snežinka?* s podnaslovom *Vzorci v naravi*, ki jo je napisal angleški matematik Ian Stewart. Gre za eno najnovejših del tega znanega pisca poljudnih matematičnih knjig in člankov ter hkrati za prvo Stewartovo delo, ki je izšlo v slovenščini, v prevodu Sete Oblak.



Nadaljevanje na III. strani ovitka.

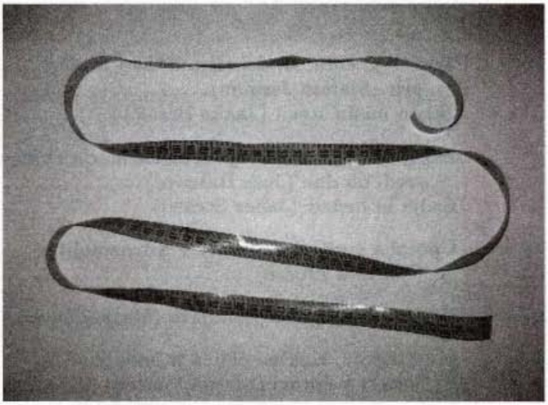
PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
31. letnik, leto 2003/04, številka 6, strani 321–384

VSEBINA

LINEARNA SPIRALA

Bralci Preseka gotovo poznate šiviljski meter (glej sliko 1), saj ste ga verjetno že zvijali v kolut, kot kaže slika 2.



Slika 1.

Slika 2.

Naloga, ki vam jo Presek tokrat nalaga, je dvojna:

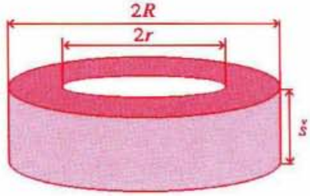
a) Z domačega (maminega ali babičinega) šiviljskega metra odčitaj njegovo dolžino, s pomičnim merilom izmeri njegovo debelino, lahko pa izmeriš tudi širino metra (čeprav ta podatek v bistvu ni potreben). Poišči svinčnik in izmeri njegov premer. Šiviljski meter navij na svinčnik, da nastane kolut (slika 2), in preštej, kolikokrat se meter ovije okoli svinčnika.

b) Dobljeni eksperimentalni podatek poskusi potrditi računsko. V pomoč naj ti bodo naslednja navodila:

1. način.

Ko meter zvijamo, se njegov volumen (tako rekoč) ne spreminja; torej je volumen kvadra (ko je meter popolnoma raven – slika 3) enaka volumnu kolobarja (razlika dveh valjev – slika 4). Če primerjamo samo tlorisa teles na slikah 3 in 4, lahko podobno sklepamo tudi za ploščini pravokotnika in kolobarja.

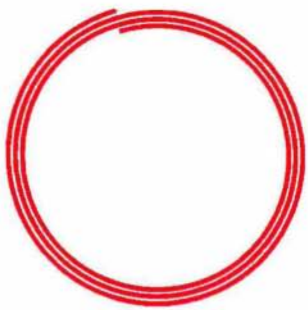
Slika 3. Kvader



Slika 4. Izrezani valj

2. način.

Ko meter zvijamo, se njegova dolžina (tako rekoč) ne spreminja. Spiralno krivuljo lahko zaradi lažjega računanja približno opišemo s koncentričnimi krogi (glej sliki 5 in 6).



Slika 5. Spirala

Slika 6. Koncentrične krožnice

Če se računski rezultat od eksperimentalnega ne razlikuje za več kot dva zavoja, si (verjetno) pravilno računal (in meril).

Izračunaj še, koliko navojev bi približno prišlo v spiralo, če bi 10 meterski trak debeline $\frac{1}{2}$ milimetra navili na kolut premera 3 centimetre.

Andreja Pečovnik Mencinger

Rešitve so na strani 362.

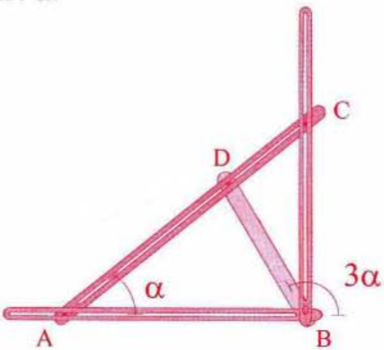
TRISEKCIJA KOTA, II. del

V prejšnji številki Preseka smo zapisali nekaj o zgodovini problema trisekcije kota in povedali, da konstrukcija samo z ravnilom in šestilom v splošnem ni mogoča. V tem delu pa bomo opisali mehanični napravi, s katerima je konstrukcija možna.

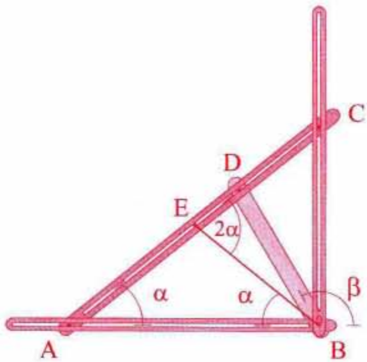
Ena od naprav, ki sem jih skonstruiral, je prikazana na sliki 1.

Sestavljena je iz ravnil AB in BC, ki oklepata pravi kot, ter ravnil AC in BD. Ravnilo BD ima os v točki B, točke A, C in D pa so igle, ki lahko drsijo zaporedoma po ravnilih AB, BC in AC. Pri tem velja še $AC = 2\,BD$.

Trisekcijo kota 3α izvršimo takole: Napravo postavimo tako, da se točka B ujema z vrhom kota, ravnilo AB pa leži na enem od njegovih krakov. Potem iglo D premikamo toliko časa, dokler se ravnilo BD ne pokrije z drugim krakom kota. Tedaj ravnilo AC oklepa z ravnilom AB kot α.



Slika 1. Prva naprava za trisekcijo kota.



Slika 2. Zakaj prva naprava deluje?

Konstrukcijo utemeljimo s sliko 2. Naj bo E razpolovišče stranice AC. Ker je trikotnik ABC polovica pravokotnika, v katerem se diagonali razpolavljata, je $BD = BE$. Zato je $\sphericalangle BED = \sphericalangle DEB$ in trikotnik ABE je zaradi izbire točke E enakokrak. Upoštevajmo, da je zunanji kot enak vsoti notranjih nepriležnih:

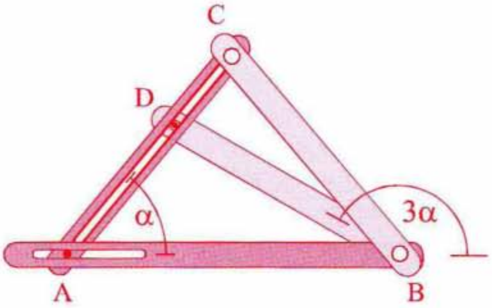
$$\sphericalangle EBD = 180^\circ - \sphericalangle BED - \sphericalangle BDE = 180^\circ - \sphericalangle ABE - \sphericalangle CBD\,,$$

zato je

$$180^\circ - 2\alpha - 2\alpha = 180^\circ - \alpha - \beta$$

in $\beta = 3\alpha$.

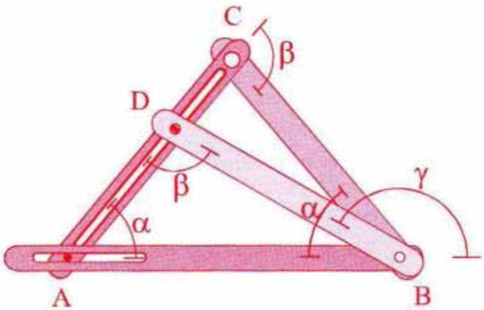
Druga naprava je predstavljena na sliki 3. Sestavljena je iz štirih ravnil, od katerih so tri iste dolžine, $AC = CB = BD$, in so povezana v oseh B in C. Točki A in D sta igli, ki lahko drsita po ravnilih AB in AC.



Slika 3. Druga naprava za trisekcijo kota.

Trisekcija tokrat poteka takole: Ravnilo AB postavimo na en krak kota, pri čemer je B njegov vrh. Točko D premikamo toliko časa, da ravnilo BD pokrije drugi krak kota 3α. Tedaj ravnilo AC oklepa z ravnilom AB kot α.

Tokrat utemeljimo konstrukcijo s sliko 4.



Slika 4. Zakaj deluje druga naprava.

V trikotniku ABC je $\beta = \alpha + \alpha$, v trikotniku ABD pa velja $\gamma = \alpha + \beta$. Obakrat smo spet upoštevali dejstvo, da je zunanji kot v trikotniku enak vsoti notranjih nepriležnih. Od tod dobimo $\gamma = 3\alpha$.

Branislav Čabrić

priredil Marjan Jerman

ZAKAJ SE V SKODELICI ČAJA ZRNA SLADKORJA ZBIRAJO NA SREDI OB DNU

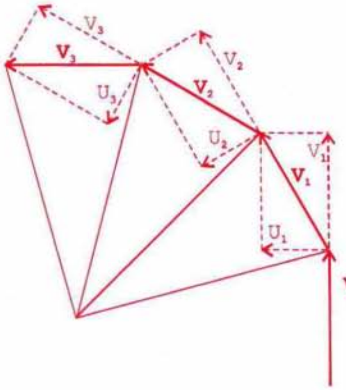
Ko čaj sladkamo in ga pomešamo, se neraztopljena zrnca sladkorja ter delci čajnih lističev zberejo ob dnu na sredi skodelice. Na dno potonejo seveda zato, ker so težji od tekočine. Toda zakaj jih vrtenje čaja ne potisne ob obod skodelice, kot bi pričakovali za relativno težje delce? Podobno tudi vrtinci zraka, ki včasih nastajajo za vogali hiš, zbirajo smeti v svojem središču. Zakaj teh smeti vrtenje ne razmeče naokrog, ko pa so vendar težje od zraka? To je "prastaro" vprašanje. Menda naj bi (tako pravi `http://www.clarkson.edu/~space/teacup.html`) že Empedokles iz Akragasa (po latinsko: Agrigenta) na Siciliji v 5. stol. pr. Kr. uporabil prispodobo s čajem, ko je razlagal, da vrtenje razdvaja snovi različnih lastnosti. Danes razdvajanje z vrtenjem tudi praktično uporabljamo v centrifugah. Kjer se v industriji praši, npr. v lesnih tovarnah, imajo pokončne, ponekod tudi več metrov visoke valjaste čistilne naprave s stožčastim podaljškom na dnu. Vanje vpihavajo zrak z žaganjem in lesnim prahom, ga močno zavrtinčijo in med vrtenjem se nabirata žaganje in lesni prah ob stenah valja ter se usedata navzdol skozi stožčasti podaljšek, očiščeni zrak pa izstopa iz čistilne naprave na sredini ob vrhu. In spet se vprašamo, zakaj tudi tu vrtenje poriva žaganje in prah proti stenam, v čaju pa se na dnu zrnca sladkorja in listki čaja zbirajo na sredi in ne ob stenah.

Spremembe hitrosti in pospeški pri kroženju

Pri enakomernem kroženju je velikost hitrosti ves čas enaka, spreminja se le smer. Ves čas enaka pa je tudi sprememba smeri, ves čas je tudi pravokotna, t.j. normalna na trenutno hitrost $\mathbf{V}$; povzroča jo *normalni pospešek* a_n. Velikost tega pospeška je ves čas enaka, njegova smer pa je proti središču kroženja: $\mathbf{a_n} = -\Omega^2\mathbf{r}$. Negativni znak minus pove, da pospešek ne deluje navzven, v smeri naraščajočega polmera r, temveč v nasprotno smer, vedno proti središču kroženja. *Krožna hitrost* $\Omega = \Delta\varphi/\Delta t = 2\pi/T = |\mathbf{V}|/r$ je pri enakomernem kroženju konstantna.

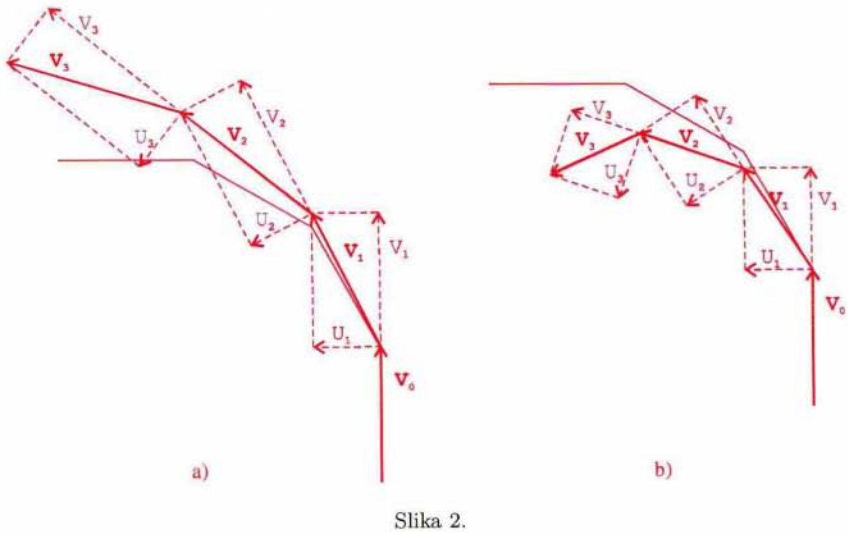
V mislih razstavimo kroženje na posamezne premike v kratkih časovnih intervalih Δt, v katerih se hitrost vsakič znova spremeni. Smer hitrosti $\mathbf{V}$ je *smer tangente* na krog. *Pravokotno v levo* od nje naj kaže *normala* na trenutno smer. Ob začetkih takih intervalov Δt seveda hitrost nima komponente "v levo, vstran". Ob koncih teh intervalov, čez čas Δt, pa se pojavljajo vsakič enako velike normalne komponente hitrosti $U = a_n\Delta t$. Kadar je normalni pospešek pozitiven, so pozitivne tudi

U_1, U_2, $U_3\ldots$ in njihove smeri so, glede na prvotno hitrost, v levo (ker smo privzeli za smer normale "pravokotno v levo glede na dosedanjo smer"). Pri enakomernem kroženju so tudi velikosti tangencialnih komponet V_1, V_2, $V_3\ldots$ vzdolž dosedanje smeri ves čas enake (slika 1).



Slika 1.

Kaj pa tedaj, ko se spreminja oboje, smer gibanja, pa tudi velikost hitrosti? Da bo naša obravnava preprosta, naj bo normalni pospešek, tako kot pri enakomernem kroženju, konstanten in pozitiven. Zato so tudi spremembe smeri "v levo od prejšnje smeri" vsakič enake $U = a_n \Delta t$. Najprej obravnavajmo primer, ko se velikost hitrosti V povečuje, npr. v vsakem časovnem koraku za deset odstotkov: $V_1 = 1{,}10 V_0$, $V_2 = 1{,}10 V_1 = 1{,}21 V_0$, $V_3 = 1{,}10 V_2 = 1{,}33 V_0$, itn. Slika 2a nas prepriča, da se tedaj pot glede na prejšnji primer enakomernega kroženja spiralasto oddaljuje *navzven*. Kadar se velikost hitrosti zmanjšuje (npr. spet za deset odstotkov v vsakem časovnem intervalu – slika 2b), pa imamo gibanje spiralasto *navznoter*.



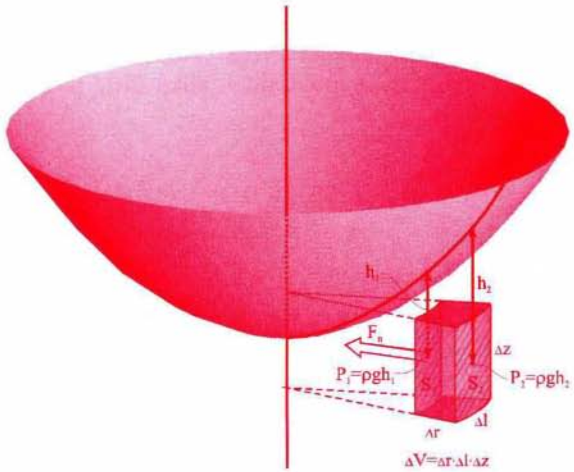
Slika 2.

Sila, zaradi katere čaj kroži v skodelici

Ko čaj pomešamo, ga zavrtimo v kroženje. Pri tem se posameznim delom čaja smer hitrosti ves čas spreminja; gibanje je pospešeno z normalnim pospeškom a_n. Kot nas je naučil 2. Newtonov zakon, so pospeški (t.j. spremembe hitrosti v času) posledica delovanja sil. Zato lahko spremembo hitrosti prečno na prvotno smer, torej kroženje, povzroči samo sila F_n, ki deluje v prečni smeri. Katera je ta sila?

Za začetek povejmo, da tlak v tekočini z globino narašča. To dobro občutimo npr. ob potapljanju: v čim večjo globino h se potopimo, tem večja je masa vode nad nami. Če je nad površino A volumen vode $V = Ah$, je masa te vode $m = \rho V = rAh$ in njena teža $F_t = mg$ je $F_t = \rho Ahg$ (ρ je gostota vode). Posledica je torej tlak, $p = F_t/A = mg/A = \rho hg$.

Sedaj se lotimo obravnave gibanja dela čaja v volumnu V, ki ga omejujejo robovi Δr, Δz in Δl: $V = \Delta r \Delta z \Delta l = \Delta r S$ ($S = \Delta z \Delta l$). V tem volumnu je masa čaja $m = \rho V = \rho \Delta r S$ (ρ je gostota čaja, skoraj enaka gostoti vode). Ko čaj pomešamo, se prej ravna gladina čaja usloči; ob robovih se dvigne, na sredi pa zniža (slika 3).



Slika 3.

Zato je na sredi v skodelici, kjer je čaja manj, tlak p_1 nižji, na večji oddaljenosti od središča, kjer je čaja več, pa je na isti globini tlak p_2 višji. Tlak p_1 ob notranji ploskvi S_1 je torej nižji, tlak p_2 ob zunanji ploskvi S_2 pa višji. To je vzrok za silo $F_n = p_1 S_1 - p_2 S_2$. Ker sta S_1 in S_2 skoraj enaki, $S_1 \approx S_2 = S$, je zato sila $F_n \approx S(p_1 - p_2) = -\rho g \Delta h S$. Negativni znak pomeni, da kaže sila v nasprotno smer kot narašča oddaljenost r od središča skodelice; imamo torej silo proti središču skodelice. Sila na masno enoto je

$$F_n/m = (-\rho g \Delta h S)/(\rho \Delta r S) = -g\Delta h/\Delta r\,.$$

Posledica te sile je (po 2. Newtonovem zakonu $a = F/m$) pospešek a_n "navznoter", poprek na smer obodne hitrosti:

$$a_n = \Delta U/\Delta t = F/m = -g\Delta h/\Delta r\,.$$

Ali lahko določimo tudi obliko gladine čaja v skodelici? Ker velja enakost med pospeškom $a_n - r\Omega^2$ in specifično silo $F_n/m = -g\Delta h/\Delta r$, ki povzroča ta pospešek

$$-r\Omega^2 = -g\Delta h/\Delta r\,,$$

lahko od tod določimo strmino $\Delta h/\Delta r$ gladine čaja:

$$\Delta h/\Delta r = \frac{\Omega^2}{g} r\,.$$

Čim dlje je od središča skodelice (večji r), tem bolj strma je gladina. Krivulja, katere strmina linearno narašča v odvisnosti od oddaljenosti od izhodišča, je parabola:

$$h(r) = h_0 + \frac{\Omega^2}{2g} r^2\,.$$

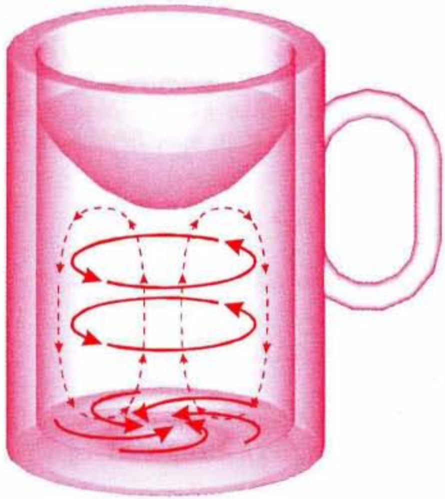
Oblika gladine čaja v skodelici je torej parabolična.

Zakaj se sladkor zbira na sredini

Če krožnega gibanja čaja v skodelici nič ne zavira ali pospešuje, deli čaja krožijo enakomerno po krožnicah. To velja povsod v skodelici, razen ob njenih stenah.

Ob dnu skodelice pa gibanje zavira trenje. (Trenje se sicer pojavlja tudi ob stranskih stenah skodelice, toda to za našo obravnavo ni zelo pomembno.) Trenje zmanjšuje hitrost, to pa pomeni, da se bo (v skladu s sliko 2b) čaj pri dnu gibal spiralasto proti sredini skodelice. S tem smo že pojasnili, zakaj se zrnca sladkorja in lističi čaja zbirajo ob dnu na sredini: ko zaradi večje teže potonejo k dnu posode, jih v plasti trenja ob dnu spiralast tok nosi proti sredini.

Kam pa gre tekočina, ki se ob dnu steka proti sredini? Seveda mora nekam odtekati; v sredini se čaj dviga. Trenje ob dnu torej povzroči, da se poleg horizontalnega kroženja naokrog po skodelici pojavi tudi dviganje na sredini navzgor, in seveda ob robovih skodelice potem spuščanje navzdol. To sekundarno kroženje je precej počasnejše od osnovnega horizontalnega kroženja, je tako rahlo, da ne more odnesti navzgor težjih zrnc sladkorja in lističev čaja, ta ostanejo na sredi ob dnu (slika 4).



Slika 4.

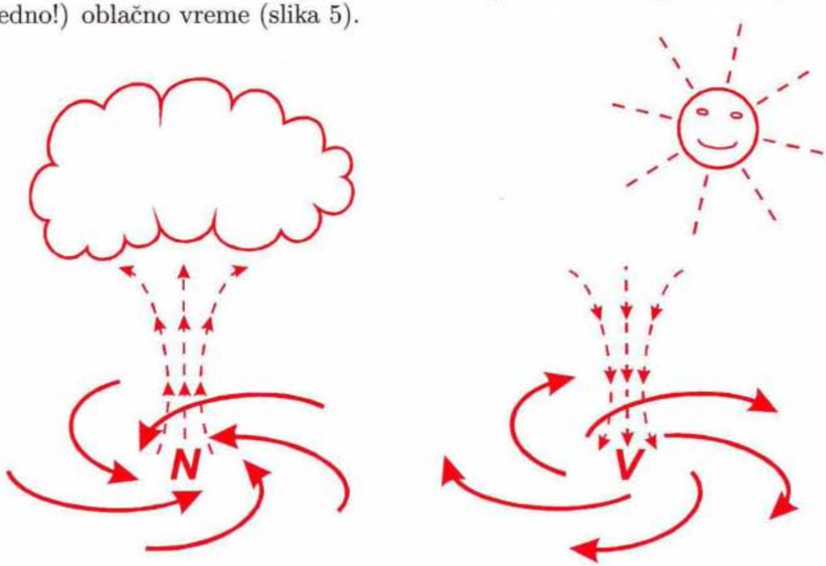
In kaj ima čaj opraviti z vremenom

Krožna gibanja so marsikje, ne le v skodelici čaja. V ozračju imamo krožne vrtince zraka; okrog velikih območij z veliko nakopičenega zraka, torej v *anticiklonih* z visokim zračnim tlakom, zrak kroži (na severni polobli) v smeri kazalcev na uri. Okrog območij, kjer je zraka manj in je zato zračni tlak nizek, torej v *ciklonih*, pa (na severni polobli) v smeri, nasprotni gibanju kazalcev na uri. (Na južni polobli sta smeri kroženja ravno obratni.) Ti vrtinci so veliki, imajo premer nekaj tisoč kilometrov.

Območja nizkega zračnega tlaka (cikloni) spominjajo na vrteči se čaj v skodelici; kot je v skodelici na sredi manj čaja in je zato tam tlak nižji, je v sredi ciklonov manj zraka in tam je zračni tlak nižji. Zato tja pospešuje sila zaradi tlačnih razlik.

Zrak v višinah ne občuti kaj dosti trenja. Pri tleh pa na gibanje zraka kar precej vpliva trenje ob tla. Ta plast, v kateri je trenje pomembno, je razmeroma debela, nad ravno pokrajino sega nekako do višine kakih 1000 do 2000 km nad tlemi. V tej plasti se zrak spiralasto steka proti središču ciklona. Na sredi ciklonov se raje dviga, kot da bi se stisnil, tam imamo torej zaradi trenja pri tleh rahlo dviganje zraka, s hitrostjo med 0.01 in 0.1 m/s. V anticiklonih pa imamo podobno močno spuščanje zraka. In zakaj je to pomembno?

Zrak, ki se spušča iz višin, prihaja navzdol med zračne mase, v katerih je tlak višji. Zato ga okolica toliko stisne, da se tlaki izravnajo. Pri stiskanju pa se zrak segreva; saj veste, kadar polnite zračnico svojega kolesa, se zračna tlačilka segreje zaradi stiskanja zraka (kompresorji za stisnjen zrak imajo rebraste hladilne lamele, da se hladijo, ko se ob stiskanju zrak v njih segreva). Ob dviganju pa le-ta pride v redkejšo okolico, zato se razpne. Ob dviganju in razpenjanju se torej zrak ohlaja. V ciklonih, kjer se zrak dviga, se ob tem ohlaja, v anticiklonih pa se ob spuščanju segreva. Tudi če bi bili v anticiklonih v višinah oblaki, bi ob spuščanju in hkratnem segrevanju zraka kapljice v njem ob potovanju navzdol izhlapele. Zato je v anticiklonih največkrat (a ne vedno!) jasno vreme. V ciklonih pa se zrak dviga, ob tem se ohlaja in morebitna ohladitev pod rosišče pomeni nastanek kapljic – nastajajo oblaki. Zato je v ciklonih ponavadi (a ne vedno!) oblačno vreme (slika 5).



Slika 5.

Na tem mestu je potrebno opozoriti še na eno pomembno stvar: čim močnejše je dviganje, tem močnejše je ohlajanje, tem močnejša je tvorba oblakov. Ker trenje pri tleh povzroča le dviganje s hitrostjo okrog 0.01 do 0.1 m/s, je to le manj pomemben vzrok za oblačnost. Zrak se pogosto dviga precej močneje; zaradi dviganja ob pobočjih obsežnih gorskih masivov ali pa če se toplejši lažji zrak nariva nad gmoto težjega hladnega zraka, so vertikalne hitrosti lahko tudi 1 ali morda 10 m/s. Tam je oblačnost še posebej gosta in padavine močne. V nevihtnih oblakih pa neuravnoteženi vzgon včasih požene zrak navzgor tudi s hitrostjo nekaj deset metrov na sekundo. Takrat pa res dežuje, kot bi "padale ošpičene prekle".

Drugače kot pri čaju je za velike vremenske tvorbe – ciklone in anticiklone – pomemben tudi vpliv vrtenja Zemlje. Ne kroži samo zrak v ozračju, temveč se vrti tudi Zemlja sama. Iz tega sledi pospešek, *Coriolisov pospešek*, katerega velikost je premo sorazmerna hitrosti in ki na severni polobli kaže v desno od smeri hitrosti, na južni pa v levo. Zato se poruši simetrija glede smeri vrtenja. Čaj bi lahko zavrteli v eno ali drugo stran, zrak v ciklonih pa na severni polobli vedno kroži v smeri, nasprotni gibanju kazalcev na uri (v anticiklonih pa v smeri kazalcev na uri). V ciklonih ta pospešek na severni polobli zaradi tlačnih razlik deluje nasproti sili in njene učinke torej nekoliko zmanjšuje. Zrak kroži nekoliko počasneje, kot da bi bila strmina $\Delta h/\Delta r$ nekoliko manjša, kot je v resnici (v anticiklonih pa obratno, nekoliko hitreje, kot da bi bila strmina nekoliko večja). Ob upoštevanju take "navidezno manjše" strmine pa imamo torej skoraj popolno podobnost med ciklonom in čajem.

Jože Rakovec

ŠTEVILO HIŠ V CERKNEM LETA 1486

Konec avgusta leta 1486, skoraj natanko šest let pred Kolumbovim odkritjem Amerike, je prečastiti škof Peter kot vizitator oglejskega patriarha potoval po nekaterih naših deželah. S svojim spremstvom, v katerem je bil tudi tajnik Pavel Santonino, je potoval iz Tolmina skozi Cerkno v Škofjo Loko. Santonino je o tem potovanju pisal tudi dnevnik, ki je dragocen vir podatkov o življenju naših krajev v tistih časih.

Za Cerkno, kjer se je dobrih 300 let kasneje rodil matematik dr. Franc Močnik (1814–1892), znan predvsem kot pisec številnih matematičnih učbenikov, navaja Santonino tudi število hiš. To število pa dobite, če rešite naslednjo nalogo.

Naloga. Če bi leta 1486 v Cerknem šest hiš do tal porušili, ali pa če bi dozidali sedem novih, potem bi lahko za tako prenovljeno vas sestavili popoln kvadratni seznam vseh hiš. Koliko hiš je bilo takrat v Cerknem?

Marko Razpet

Rešitev je na strani 351.

UVOD V PROGRAMSKI JEZIK JAVA

V prejšnjem Preseku smo si ogledali, kako poteka delo s programskim jezikom java. Sestavili smo ogrodje preprostega programa v javi, pa tudi ogrodje programa, ki ga lahko vključimo na spletno stran (takemu programu pravimo *applet*). V tem članku se bomo lotili osnov programiranja v javi, predpostavili pa bomo, da bralec že pozna osnove programiranja v jeziku C ali C++, saj je med javo in tema dvema programskima jezikoma kar precej podobnosti.

Osnovni podatkovni tipi

Osnovni podatkovni tipi v javi so cela števila, realna števila in logične vrednosti. Nekateri med osnovne podatkovne tipe uvrščajo še znake, v resnici pa so to samo poseben primer celih števil.

Celoštevilski podatkovni tipi v javi imajo natanko določeno velikost. Tip `byte` zavzame 8 bitov, `short` 16 bitov, `int` 32 bitov in `long` 64 bitov. Spomnimo se, da standard za C ne predpisuje, kako velik mora biti posamezen tip, predpisuje samo njihov vrstni red (najmanjši je `short`, sledi `int`, temu `long`, v zadnji izdaji standarda pa se jim je pridružil še `long long`). V javi je torej veliko več reda. Medtem ko so v C-ju celoštevilski tipi lahko predznačeni ali nepredznačeni, java nepredznačenih celoštevilskih tipov ne pozna.

Tudi pri znakih (tip `char`) je pomembna razlika. V C-ju so znaki 8-bitni (lahko so predznačeni ali nepredznačeni), v javi pa so 16-bitni (vedno nepredznačeni). Seveda pa lahko z znaki računamo kot s celimi števili.

Podobno kot C in C++ tudi java pozna realna tipa `float` in `double`, ne pozna pa tipa `long double`.

Java pozna še logični tip `boolean`. Edini vrednosti tega tipa sta `true` in `false`. Programski jezik C nima logičnega tipa, v jeziku C++ pa obstaja tip `bool`.

Kontrolne strukture

Pogojne stavke in zanke se v javi uporablja na enak način kot v C-ju. Obstaja samo drobna razlika pri pisanju pogojev. V C-ju so pogoji lahko poljubni izrazi. Če je vrednost tega izraza enaka 0, pogoj ni izpolnjen, katerakoli druga vrednost pa pomeni, da je pogoj izpolnjen. V javi pa je pogoj lahko samo izraz, katerega vrednost je logičnega tipa.

Tabele

Tabela je v C-ju predstavljena s kazalcem na njen prvi element, v javi pa je tabela referenca na dinamično dodeljen pomnilnik, kjer je poleg elementov tabele zapisana še njena velikost. Podobno kot v C-ju so tudi v javi elementi tabele oštevilčeni od 0 naprej. Poglejmo si nekaj primerov definicij tabel celih števil v javi:

```
int[] t1 = {1, 5, 0, -3, 1, 0};
int[] t2 = new int[6];
int[] t3 = t1;
int[] t4 = null;
```

Tabelo `t1` smo ustvarili tako, da smo našteli vse njene elemente. To možnost poznamo že iz C-ja, samo oglate oklepaje moramo v C-ju pisati za imenom tabele. Tabelo `t2` smo ustvarili s pomočjo operatorja `new`, pri čemer smo določili samo njeno dolžino, vsi njeni elementi pa se nastavijo na vrednost 0, 0.0, `false` ali `null`, odvisno od tipa elementov (v zgornjem primeru dobimo cela števila 0). Dolžina tabele, ki jo zapišemo v oglatih oklepajih, je lahko poljuben izraz, katerega vrednost je nenegativno celo število. V C-ju bi nekaj podobnega lahko naredili na dva načina.

```
int t2[6];
int *t2 = malloc(6 * sizeof(int));
```

Prvi način bi uporabili, če je dolžina tabele znana že ob prevajanju programa, drugega pa, če lahko dolžino naračunamo ali omejimo šele med izvajanjem programa. Začetne vrednosti elementov teh dveh tabel niso določene (lahko so poljubne).

Tabela `t3` je enaka tabeli `t1`. To ni kopija tabele `t1`, pač pa sta `t1` in `t3` referenci na isto tabelo (različni imeni za isto tabelo). Pri deklaraciji tabele `t4` smo določili samo tip njenih elementov, tabela sama pa še ne obstaja.

V C-ju moramo vsako tabelo, ki jo ustvarimo s klicem funkcije `malloc`, sprostiti s klicem funkcije `free`, ko je ne potrebujemo več. V javi nam za to ni treba skrbeti. Za sproščanje tabel in objektov, ki jih ne potrebujemo več, poskrbi poseben mehanizem (angleško mu pravimo *garbage collector*).

V C-ju moramo biti še posebej pazljivi, če tabelo prenašamo kot parameter pri klicu funkcije. V funkciji namreč ne moremo več izračunati njene dolžine, zato moramo dolžino v večini primerov prenašati kot dodaten parameter. V javi takih težav nimamo. Za vsako tabelo (če tabela obstaja) lahko ugotovimo njeno dolžino. Dolžino tabele `tab` nam vrne izraz `tab.length`.

Objekti

Objekt je posebna podatkovna struktura, v kateri lahko poleg različnih vrst podatkov (komponente) hranimo tudi metode za delo s temi podatki. V programskem jeziku C objektov nimamo, imamo pa strukture, v katerih lahko hranimo samo komponente, brez metod. Opis objektov iste vrste imenujemo *razred*. Pri programiranju opišemo, kakšne komponente in metode bo vseboval posamezen razred, potem pa z operatorjem `new` ustvarimo nov objekt tega razreda. Objektov nam ni treba sproščati, ko jih ne potrebujemo več. Java vsebuje obsežne knjižnice, v katerih je že definiranih preko 2500 razredov, ki jih lahko uporabljamo v svojih programih.

Nizi

V C-ju je niz tabela znakov, pri čemer je zadnji znak v nizu vedno znak s kodo 0. Za delo z nizi imamo na razpolago več funkcij iz knjižnice `<string.h>`. V javi pa je niz objekt razreda `String`. Podrobnosti o načinu predstavitve niza nam ni treba poznati, saj imamo za vse, kar potrebujemo, na razpolago več metod. Najpomembnejši sta `length` in `charAt`, spisek vseh ostalih pa dobite v dokumentaciji razreda `String`.

```
String niz = "abcdefgh";      // definicija niza
int dolzina = niz.length();   // dolžina niza
char znak = niz.charAt(2);    // znak na mestu z indeksom 2
```

V javi lahko nize tudi seštevamo. Vsota dveh nizov je stik teh nizov, torej nov niz, ki ga dobimo tako, da na konec prvega niza dodamo drugi niz. Vsota `"abc"` + `"xy"` je tako `"abcxy"`. Pravzaprav lahko nizu prištejemo karkoli, čeprav je učinek včasih težko vnaprej napovedati. Sumand, ki ni niz, bo program predelal v niz in naredil običajen stik nizov. Tako je `"abc"` + `5` enako `"abc5"` in `"abc"` + `2.5` enako `"abc2.5"`.

Branje in izpis podatkov

Za izpis podatkov na standardni izhod ima java metodi `print` in `println` objekta `System.out`. Obe metodi izpišeta dani podatek, edina razlika je ta, da metoda `println` na koncu naredi še skok v novo vrsto. Spodnja stavka izpišeta račun in rezultat, vse skupaj v eni sami vrstici.

```
System.out.print("1 + 2 = ");
System.out.println(1 + 2);
```

Enak izpis lahko dosežemo tudi samo z enim stavkom, če uporabimo stik niza `"1 + 2 = "` in vsote `1` + `2`. Pri tem moramo vsoto zapisati v oklepajih, sicer bo program naredil dva stika (najprej bo dodal enko, potem pa še dvojko).

```
System.out.println("1 + 2 = " + (1 + 2));
```

Branje s standardnega vhoda je bolj zapleteno. Java sicer pozna metodo `read` objekta `System.in`, ki pa ni nič kaj uporabna, saj lahko z njo beremo samo enega ali več znakov. Zato običajno ustvarimo drugačen objekt, ki nam omogoča branje celih vrstic.

```
BufferedReader vhod =
   new BufferedReader(new InputStreamReader(System.in));
```

Uporabljena razreda `BufferedReader` in `InputStreamReader` pripadata paketu `java.io`, zato ga moramo na vrhu datoteke vključiti z ukazom `import`. Ker lahko pri branju podatkov pride do najrazličnejših napak, s katerimi se zaenkrat ne želimo ukvarjati, pa moramo pri definiciji metode `main` na koncu vrstice (za parametri) napisati še `throws IOException`.

Z metodo `readLine` objekta `vhod` lahko zdaj beremo cele vrstice s standardnega vhoda. Tako vpisane podatke preberemo v obliki niza. Če je podatek v resnici število, ga moramo ustrezno predelati. Celo število dobimo iz niza s pomočjo metode `Integer.parseInt`, realno število pa s pomočjo metode `Double.parseDouble`.

```
String niz = vhod.readLine();
int celo = Integer.parseInt(vhod.readLine());
double realno = Double.parseDouble(vhod.readLine());
```

V zgornjem primeru preberemo tri vrstice. Prvo shranimo v niz, drugo predelamo v celo število, tretjo pa v realno število. Če števila ne vpišemo v pravilni obliki, lahko pri pretvorbi pride do napake, ki prekine izvajanje programa.

Zaključek

Videli smo, da obstajajo določene razlike med jezikoma java in C/C++, vendar niso tako strašne, da se ne bi mogli navaditi nanje. Pravzaprav je razlik še več. Tu smo našteli samo tiste najbolj pomembne, s katerimi se nov programer v javi sreča takoj na začetku.

Da bi se privadili na razlike med jezikoma, je potrebno samo nekaj vaje in sedenja za računalnikom. Pobrskajte torej po starih številkah Preseka, poiščite kakšen program, napisan v C-ju, in ga poskusite prepisati v javo. V eni od prihodnjih številk bomo kakšen primer naredili tudi pri Preseku.

Matjaž Zaveršnik

UPORABA VERIŽNIH ULOMKOV V ASTRONOMIJI

V astronomiji pogosto računajo s približki (npr. pri koledarju). Zelo primerno sredstvo za ugotavljanje približkov pa so verižni ulomki. Navedli bomo tri zanimive primere.

1. Že davno so mezopotamski opazovalci neba opazili, da se Lunini in Sončevi mrki ponavljajo vsakih 18 let in 10 dni. To periodo so imenovali *saros*. Po njej so napovedovali nastop mrkov, čeprav niso vedeli, kje je vzrok za to periodo in zakaj ima le-ta takšno številčno vrednost. To so ugotovili dosti pozneje, šele po natančnem proučevanju gibanja Lune.

Vprašajmo se, kolikšen je obhodni čas Lune okrog Zemlje. Odgovor je lahko različen, pač glede na to, za kateri obhodni čas gre. Astronomi razlikujejo najmanj pet takih obhodnih časov, imenovanih mesec, od katerih pa nas zdaj zanimata le dva.

- *Sinodski mesec*, to je obhodni čas Lune okrog Zemlje glede na Sonce oz. čas med dvema zaporednima enakima Luninima menama (npr. od ščipa do prvega naslednjega ščipa). Ta čas traja 29,5306 dni.
- *Vozelski mesec*, to je čas, v katerem se Luna vrača k istemu vozlu svojega tira (dvižnemu ali pa padnemu; vozel je presek Lunega tira z ravnino Zemljinega tira). Ta mesec traja 27,2122 dni.

Mrki nastopajo le ob ščipu (polni luni) in mlaju (prazni luni) zelo blizu enega od vozlov, ko ležijo Zemlja, Sonce in Luna na isti premici. Če je npr. danes mrk, bo takšen mrk nastopil ponovno čez toliko časa, da bo celo število x vozelskih mesecev enako celemu številu y sinodskih mesecev. Ta čas dobimo, če rešimo enačbo $27{,}2122x = 29{,}5306y$, ki jo preoblikujemo v sorazmerje $\frac{x}{y} = \frac{295306}{272122}$. Natančna rešitev te enačbe je npr. $x = 295306$ in $y = 272122$.

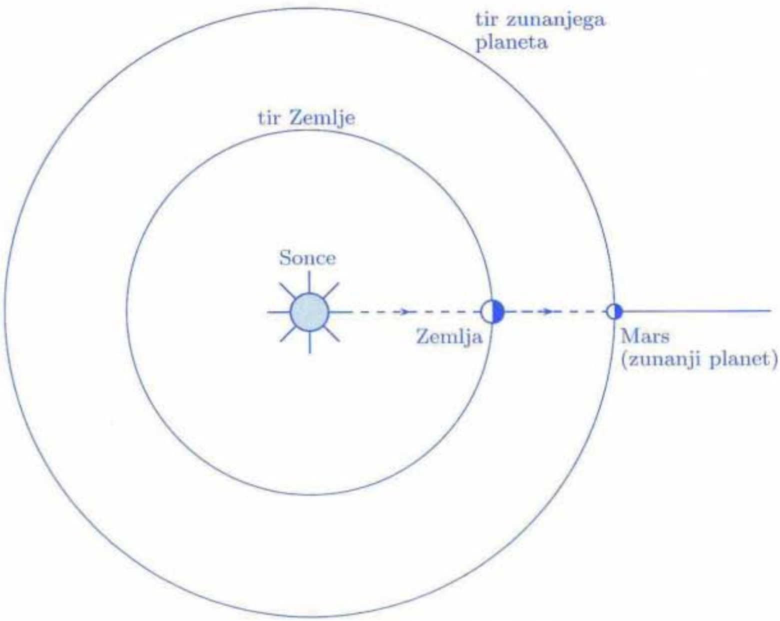
Zapisano enačbo pa lahko rešimo tudi približno. Ulomek $\frac{295306}{272122}$ razvijemo v verižni ulomek. Najprej je

$$\frac{295306}{272122} = 1 + \frac{23184}{272122} = 1 + \frac{1}{11 + \frac{17098}{23184}}\,.$$

Če bi tako nadaljevali, bi na koncu dobili

$$\frac{295306}{272122} = 1 + \cfrac{1}{11 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{17 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{7}}}}}}}}}$$

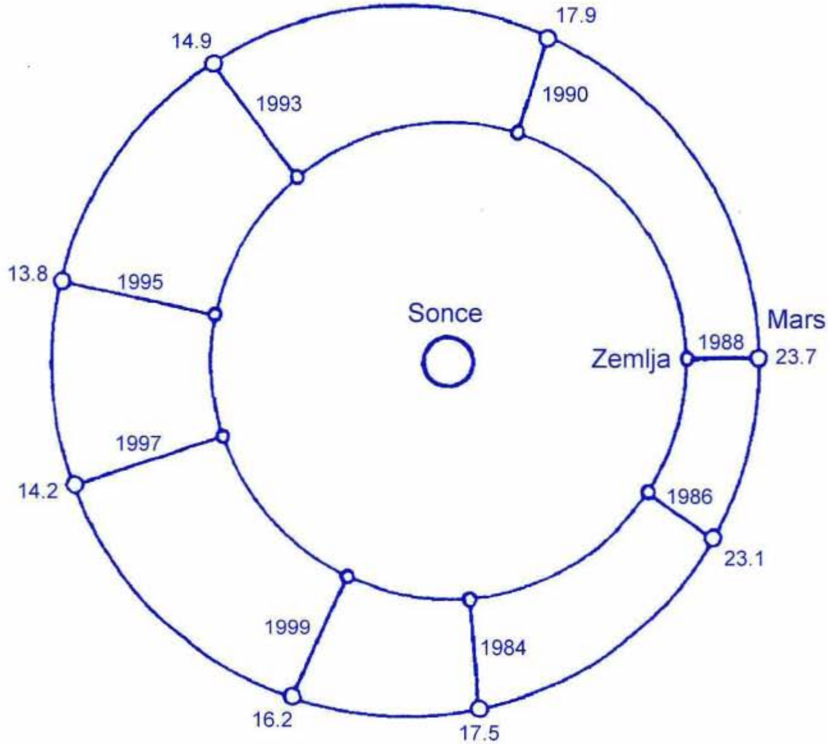
Iz tega verižnega ulomka dobimo naslednje približke: $\frac{12}{11}$, $\frac{13}{12}$, $\frac{38}{35}$, $\frac{51}{47}$, $\frac{242}{223}$, $\frac{1019}{939}$,... Peti ulomek v vrsti je že dovolj dober približek, saj daje zadovoljivo natančnost. Zadržimo se pri njem. Torej vzamemo $x = 242$ in $y = 223$. Perioda, ko se mrki ponovijo, je enaka 223 sinodskim ali 242 vozelskim mesecem. Preračunano je to $6585\frac{1}{3}$ dni ali 18 let in 11,3 dni oz. 10,3 dni glede na to, ali pride v saros štiri ali pet prestopnih let.



Slika 1. Lega zunanjega planeta ob opoziciji s Soncem.

2. Planet Mars je bil konec avgusta 2003 v opoziciji s Soncem. To pomeni, da je bil, gledano z Zemlje, na nasprotni strani kot Sonce. Kadar je planet v opoziciji s Soncem, je viden vso noč, saj vzhaja, ko Sonce zahaja. Planet je takrat tudi najbližje Zemlji in ga lahko dobro opazujemo. Mars je približno vsaki dve leti v opoziciji s Soncem. To so navadne opozicije. Približno vsakih 15 let pa pride do tako imenovanih velikih opozicij, ko se Mars dosti bolj približa Zemlji kot ob navadnih opozicijah. Velike opozicije rdečega planeta so bile npr. 1939, 1956, 1971, 1985.

Malokdo ve, zakaj se ta dogodek ponavlja vsakih 15 let. Takole je s to stvarjo. Obhodni čas Zemlje okrog Sonca je $365\frac{1}{4}$ dneva, obhodni čas Marsa pa 687 dni. Vzemimo, da sta danes oba planeta v najmanjši medsebojni oddaljenosti ob veliki opoziciji. V takšni oddaljenosti bosta



Slika 2. Opozicije Marsa do leta 1999. Zaradi nazornosti je ekscentričnost Marsovega tira pretirana. Številke ob Marsu povedo navidezni premer planeta ob opoziciji.

spet čez toliko časa, ko bo celo število zemeljskih let x enako celemu številu marsovskih let y. Rešiti je treba enačbo (v celih številih) $365\frac{1}{4}x = 687y$ ali $\frac{x}{y} \doteq 1{,}88 = \frac{47}{25}$. Ulomek razvijemo v verižni ulomek

$$\frac{47}{25} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{3}}}\,.$$

Če vzamemo prve tri člene, dobimo že dober približek

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7}} = \frac{15}{8}\,.$$

To je čez 15 zemeljskih ali 8 marsovskih let. Torej se velike Marsove opozicije ponavljajo vsakih 15 let (zaradi poenostavitve naloge smo vzeli 1,88 namesto 1,8809).

3. Tako lahko ugotovimo tudi periodičnost največjih približevanj Jupitra. Jupitersko leto je 11,86 (točneje 11,8622) zemeljskih let. Razvijmo to v verižni ulomek:

$$11{,}86 = 11\,\frac{43}{50} = 11 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{7}}}\,.$$

Prvi trije členi dajo približek $\frac{83}{7}$. Velike opozicije Jupitra se torej ponavljajo vsakih 83 zemeljskih ali 7 jupiterskih let. Zadnja velika opozicija Jupitra s Soncem je bila leta 1951.

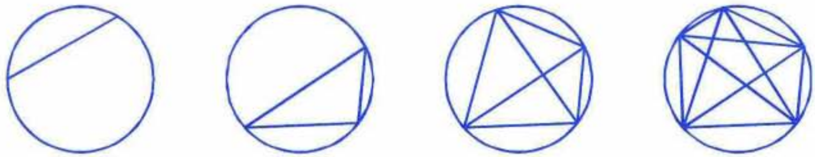
Na koncu pa še dve kratki vaji, katerih rezultat ugotovimo neposredno iz vsebine članka, pri prvi vaji od zadnje velike opozicije odštejemo 15 let, pri drugi pa prištejemo 83 let:

1. Kdaj je bila zadnja velika opozicija Marsa s Soncem?
2. Kdaj bo prva velika opozicija Jupitra s Soncem?

Marijan Prosen

ZAKON MALIH ŠTEVIL

Narišimo krožnico in na njej izberimo dve različni točki. Na koliko delov razdeli tetiva, ki povezuje ti dve točki, krog? Izberimo zdaj na krožnici tri različne točke, narišimo vse tri tetive in se ponovno vprašajmo, na koliko delov so te tetive razdelile krog. Nadaljujmo s štirimi točkami na krožnici. Na koliko delov šest tetiv, ki povezujejo štiri različne točke na krožnici, razdeli krog? Poglejmo še primer petih različnih točk na krožnici. Pet točk na krožnici izberimo tako, da se nobene tri tetive, ki jih povezujejo, ne sekajo v isti točki - pravimo, da morajo biti izbrane točke v splošni legi. Tetiv, ki povezuje pet točk v splošni legi na krožnici, je 10. Na koliko delov razdelijo te tetive krog?



Slika 1. Na koliko delov so razdeljeni krogi?

Odgovore na zastavljena vprašanja najdemo na sliki 1. Prvi krog je razdeljen na 2 dela, drugi krog na $4 = 2^2$ dele, tretji krog na $8 = 2^3$ delov in četrti krog na $16 = 2^4$ delov. Pomislite na pravilo: Če je na krožnici n točk v splošni legi, potem vse tetive, ki imajo krajišča v izbranih točkah, razdelijo krog na 2^{n-1} delov. Ali ta trditev res velja? Naj vam še povem, da v primeru desetih točk na krožnici, ki so v splošni legi, pripadajoče tetive razdelijo krog na $256 = 2^8$ delov. Če se še vedno ne morete odločiti glede veljavnosti trditve, narišite krožnico, izberite na njej šest točk v splošni legi, narišite vse tetive in preštejte, na koliko delov so tetive razdelile krog.

Naravno število p je praštevilo, če ima natanko dva delitelja: 1 in p. Prvih pet praštevil je $2, 3, 5, 7, 11$. Ni se težko prepričati, da je tudi število 31 praštevilo. Nekoliko več truda je potrebno za ugotovitev, da so vsa števila v nizu

$$331,\ 3\,331,\ 33\,331,\ 333\,331,\ 3\,333\,331$$

praštevila. Ali na splošno velja, da so števila, ki imajo desetiški zapis $33\ldots31$, praštevila? Bi vam bilo lažje odgovoriti, če vam povem, da je naslednje število v omenjenem zaporedju, to je 33 333 331, praštevilo? Da boste izvedeli pravilni odgovor na zastavljeno vprašanje, poiščite ostanek pri deljenju števila 333 333 331 s 17.

Matematiki pri svojem delu pogosto naletijo na podobne primere: prvih nekaj členov kakšnega zaporedja se pokorava pravilu, ki za kasnejše člene zaporedja ne velja. Krivec, da takšni primeri obstajajo, je *zakon malih števil*. Matematik Richard K. Guy ga je formuliral takole:

Malih števil je premalo, da bi lahko zadostila vsem potrebam.

Če že govorimo o malih številih, je umestno vprašanje, katera števila so *mala*. Lahko bi rekli, da vsa tista, ki jih je mogoče zapisati z vsemi števkami (recimo v desetiškem sestavu) in jih torej lahko *vidimo*. Zgledi malih števil so: 1 000 000, 1 234 567 890 pa tudi 9 999 999 999 999 999 999. Za število $((((10^{100})!)^{100})!)^{100}$ bi lahko rekli, da ni malo, saj ga praktično ne moremo zapisati z vsemi števkami in ga torej tudi *videti* ne moremo.

Iz zakona malih števil sledi *zakon okroglih števil*. V vsakdanjem življenju rečemo, da je število *okroglo*, če je deljivo z 10, 100, 1000 itd. (spomnite se okroglih obletnic). V matematiki okrogla števila definiramo malce drugače. Za natančno definicijo potrebujemo pojem *desetiškega logaritma*. Nekoliko poenostavljeno bi lahko rekli, da je desetiški logaritem naravnega števila n približno za 1 manj, kot je število števk v desetiškem zapisu števila n. Ustaljena oznaka za desetiški logaritem naravnega števila n je $\log n$. V spodnji tabeli so dane vrednosti desetiškega logaritma za nekatera naravna števila.

n	$\log n$
1	0,000...
2	0,301...
5	0,698...
10	1,000...
15	1,176...
100	2,000...
150	2,176...
1 000	3,000...

Označimo z $d(n)$ število deliteljev naravnega števila n. Očitno je $d(1) = 1$ in $d(p) = 2$, če je p praštevilo. Za majhna števila n vrednosti $d(n)$ ni težko določiti: $d(10) = 4$, $d(100) = 9$, $d(1000) = 16$ itd. V splošnem pa si pomagamo z naslednjim dejstvom. Naj bo

$$n = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k} ,$$

razcep števila n na produkt potenc različnih praštevil, potem je

$$d(n) = (e_1 + 1) \dots (e_k + 1) .$$

Okroglost naravnega števila n določimo tako, da pogledamo, kakšno je razmerje med številom deliteljev števila n in velikostjo desetiškega logaritma števila n. Bolj natančno, naravno število n je tem bolj okroglo, čim večja je njegova *mera okroglosti*

$$o(n) = \frac{d(n)}{\log n}\,.$$

V naslednji tabeli je nekaj zgledov.

n	$d(n)$	$o(n)$
10	4	1
100	9	4,5
1 000	16	5,333...
5 316	12	5,220...
4 525	6	1,641...
2 112	28	8,421...

Število 2112 je zelo okroglo, celo bolj kot število 100 000, saj je $o(100\,000) = 7,2$. Še bolj okroglo je število 43 200 z mero okroglosti $o(43\,200) = 18{,}121\ldots$.

Jasno, ker je malih števil premalo, tudi okroglih števil ni dovolj – velja zakon okroglih števil:

Okroglih števil je premalo, da bi lahko zadostila vsem potrebam.

V vsakdanjem življenju nas zakona malih in okroglih števil lahko zavedeta, da vidimo skrite zakonitosti in povezave tam, kjer jih mogoče ni. Kot zgled navedimo Josepha Campbella (1904-1987), priznanega angleškega profesorja literature, specialista za mite. V eni od svojih raziskav je ugotovil naslednje:

1. V indijski mitologiji traja obdobje enega eona 4 320 000 let.
2. Po prepričanju ljudstev v Mezopotamiji okrog leta 290 pred našim štetjem je od kronanja prvega zemeljskega kralja do vesoljnega potopa minilo 432 000 let.
3. V islandski Eddi je zapisano, da je v dvorani bojevnikov boga Othina 540 vrat in skozi vsaka od njih na dan bitke pride 800 vojščakov (pripomnimo, da je $540 \times 800 = 432\,000$).

Campbell je sklepal, da takšno sovpadanje ne more biti naključje. No, mi smo lahko vsaj malce skeptični in se vprašamo, ali so stara ljudstva imela skrivno skupno znanje, katerega del je bilo število 432 000, ali pa je bil na delu zakon okroglih števil.

Janko Bračič

ODKRITO NOVO NAJVEČJE (MERSENNOVO) PRAŠTEVILO

Števila, s katerimi štejemo, imenujemo *naravna števila*. Števila, ki imajo natanko dva različna delitelja, samega sebe in število 1, so *praštevila*. Že pred več kot 2300 leti je Evklid dokazal, da je praštevil neskončno mnogo.

Število oblike $2^n - 1$ imenujemo *Mersennovo število* in ga označujemo z M_n. Če je M_n praštevilo, ga imenujemo *Mersennovo praštevilo*. Poglejmo, kakšno število je M_n, če je n sestavljeno število. Recimo, da je n enak zmnožku rs, potem lahko Mersennovo število $M_n = M_{rs}$ zapišemo takole:

$$M_n = 2^{rs} - 1 = (2^r - 1)(2^{r(s-1)} + 2^{r(s-2)} + \cdots + 2^r + 1)\,.$$

Vidimo, da je v tem primeru M_n produkt dveh števil, zato ni praštevilo. Torej velja, da če je M_n praštevilo, mora biti tudi n praštevilo. Mnogi so domnevali, da so vsa Mersennova števila M_n, kjer je n praštevilo, tudi praštevila. Leta 1536 je Hudalricus Regius pokazal, da $2^{11} - 1$ ni praštevilo (saj je enako zmnožku 23 in 89). Zgodovina iskanja naslednjih Mersennovih praštevil in velikih praštevil nasploh je pisana, o čemer smo v Preseku že pisali v članku P. Potočnik: *Največja znana praštevila – nekoč in danes*, Presek **28** (2000/2001), 349–351. Domneva, da je tudi Mersennovih praštevil neskončno, ni dokazana.

17. novembra 2003 je računalnik študenta Michaela Shaferja na ekran zapisal sporočilo o najdbi novega, največjega znanega Mersennovega praštevila

$$2^{20996011} - 1,$$

ki je tudi največje znano praštevilo. Sestavlja ga kar 6 320 430 desetiških števk, v celoti pa si lahko to ogromno število ogledamo na medmrežnem naslovu

`http://mersenne.org/prime6.txt.`

Na Michaelovem računalniku je tekel program, ki ga dobimo na naslovu

`http://www.mersenne.org`

in je izhodiščna stran tako imenovanega velikega medmrežnega iskanja Mersennovih praštevil (GIMPS – **G**reat **I**nternet **M**ersenne **P**rime **S**earch).

Program za iskanje Mersennovih praštevil je napisal ustanovitelj GIMPS George Woltman. Jedro programa predstavlja algoritem za hitro množenje velikih števil, ki ga je odkril matematik Richard Crandall, strojno in programsko opremo za porazdeljeno obdelovanje pa je dalo na razpolago podjetje Entropia Inc. Vseh zadnjih šest največjih Mersennovih praštevil je bilo najdenih s pomočjo projekta GIMPS, ki traja že od januarja 1996. Vsako od njih je v času odkritja predstavljalo tudi največje znano praštevilo.

Najditelj 38. Mersennovega praštevila je dobil od organizacije *Electronic Frontier Foundation* (`http://www.eff.org`) nagrado 50 000 ameriških dolarjev za odkritje praštevila z vsaj 1 000 000 števkami. Za odkritje praštevila z najmanj 10 000 000 števkami je razpisana nagrada v višini 100 000 ameriških dolarjev. Sedaj poznamo 40 Mersennovih praštevil z naslednjimi potencami dvojke: 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213, 19937, 21701, 23209, 44497, 86243, 110503, 132049, 216091, 756839, 859433, 1257787, 1398269, 2976221, 3021377, 6972593, 13466917 in 20996011. Ali sta števili $M_{13466917}$ in $M_{20996011}$ tudi 39. in 40. Mersennovi praštevili, še ni ugotovljeno. Do sedaj so bile preverjene vse potence do 12 441 900, torej je še veliko kandidatov za nova Mersennova praštevila do zadnjega odkritega praštevila.

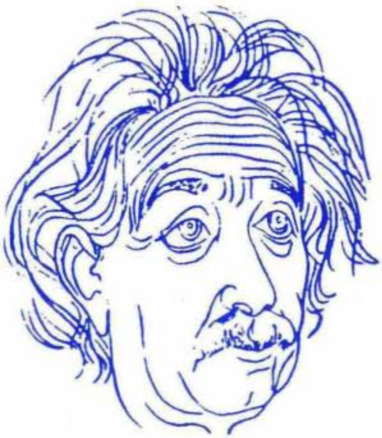
Za 10 000 000 števk bi morala biti potenca dvojke večja od 33 219 280. Projekt GIMPS se nadaljuje in sedaj čakamo na naslednje rekordno Mersennovo praštevilo. Ga bo našel kdo izmed vas?

Ciril Petr

Pred oddajo Preseka v tiskarno smo prejeli novico, da je bilo 15. maja 2004 odkrito novo največje (Marsennovo) praštevilo $M_{24036583}$, ki ga sestavlja 7 235 733 desetiških števk. O tem najnovejšem odkritju bomo še poročali v eni od naslednjih številk Preseka.

OB 125-LETNICI EINSTEINOVEGA ROJSTVA

14. marca je minilo stoletje in četrt od rojstva Alberta Einsteina. V spomin na njegovo "čudežno leto" 1905, v katerem je šestindvajsetleten s petimi deli pretresel fiziko in ves svet, so razglasili *svetovno leto fizike 2005.* Zato bo naslednje leto mogoče veliko prebrati in slišati tudi o Einsteinovem delu in o njem. Na tem mestu zgolj nakažimo, kaj je dosegel leta 1905 in kako vsestranski je bil njegov prispevek fiziki.



Albert Einstein (1879–1955, risba J. Scharla iz leta 1946) je bil rojen v Ulmu, osnovno šolo in gimnazijo je obiskoval v Münchnu. Sprejemnega izpita na Državno tehnično visoko šolo ETH v Zürichu pa ni opravil. Potem ko je naredil zadnje leto srednje šole in opravil maturo, je na ETH študiral matematiko in fiziko in postal profesor matematike in fizike. Na lastno pobudo je osamljen raziskoval v teoretični fiziki, najprej brez stalnega delovnega mesta in potem kot uradnik na švicarskem patentnem uradu. Delal je ob omejenem dostopu do strokovne literature, ločen od univerzitetnega okolja, le ob pogovorih s prijatelji in s prvo ženo, Vojvodinko Milevo Marić. Leta 1909 je zapustil patentni urad in postal profesor v Zürichu, Pragi in zopet v Zürichu. Nato je dobil v Berlinu mesto, na katerem mu ni bilo treba predavati študentom. Leta 1933 se je preselil v Princeton v Združenih državah. Tam je umrl leta 1955.

V prvih člankih se je Einstein ukvarjal z vprašanjem, ali obstajajo molekule in kakšne sile delujejo med njimi. V naslednjih se je lotil osnov statistične mehanike, veje fizike, ki lastnosti snovi pojasni z lastnostmi njenih gradnikov, na primer molekul. To je bila dobra priprava na pet del v "čudežnem letu", ki so med seboj povezala mehaniko, termodinamiko in elektrodinamiko. "Precej varno je reči, da ne bo, dokler bo obstajala fizika, nihče več dosegel treh večjih prebojev v enem letu."

Najprej je Einstein dopolnil zamisel Maxa Plancka, da svetloba v votlini s steno votline izmenjuje energijo v obrokih, energijskih kvantih. Trdil je, da v svetlobi energija tudi potuje v obrokih, ki jim danes rečemo fotoni. Pri fotoefektu elektron prevzame energijo fotona in je del porabi, da zapusti kristal. Pojav izkoriščajo med drugim televizijske snemalne cevi. Za razlago, ki so jo z merjenjem podprli leta 1915, je Albert Einstein leta 1922 dobil Nobelovo nagrado.

Pojasnil je tudi neurejeno gibanje drobnih smolnih kroglic, ki jih vidimo z mikroskopom. V zraku ali v vodi se zdaj s te, zdaj z druge strani v kroglico zaleti več molekul. Enačbe so bile pomembne, ker tedaj nekateri fiziki in kemiki še niso sprejeli misli, da obstajajo molekule z določeno maso in velikostjo. Šest let zatem so Jean Perrin in sodelavci Einsteinove enačbe podprli z merjenji in s tem odpravili dvome o obstoju molekul (Presek **29**, str. 204 in 274).

Einstein je nadalje razvil teorijo relativnosti. Svetloba po praznem prostoru potuje s hitrostjo, ki ni odvisna od hitrosti opazovalca glede na svetilo. Dva dogodka, ki sta sočasna za kakega opazovalca, v splošnem nista sočasna za drugega opazovalca, če se ta giblje glede na prvega. Gibajoča se ura teče drugače kot mirujoča in gibajoča se telesa se skrčijo v smeri gibanja. Te ugotovitve so spremenile pogled na prostor in čas ter pripeljale do zakonov za gibanje, ki se pri veliki hitrosti razlikujejo od Newtonovih zakonov. Hitrost svetlobe v praznem prostoru je zgornja meja za hitrost delcev, energije in sporočil. V kratkem dopolnilu je Einstein izpeljal "najbolj razvpito enačbo vseh časov", $E = mc^2$, po kateri masi ustreza energija.

V tem letu je veliki znanstvenik sestavil še doktorsko delo o novi določitvi velikosti molekul. V njem je gradil na ugotovitvi, da se molekule raztopljene snovi, na primer sladkorja, v razredčeni vodni raztopini vedejo kot molekule plina v posodi. Poleg tega je napisal več poročil o novih knjigah.

Leta 1907 je Einstein zamisel o kvantih uporabil za gradnike, ki v kristalih nihajo okoli ravnovesnih leg. Ugotovil je, kako povprečna energija nihanja narašča z naraščajočo temperaturo. Gram snovi segrejemo za stopinjo s toploto, ki je tem manjša, čim bliže smo absolutni ničli. Ugotovitev te prve uporabe zamisli o kvantih za delce snovi so fiziki laže sprejeli kot zamisel o fotonih.

Einstein je spoznal, da teorija relativnosti ne zajame teže ali na splošno gravitacije. Potem ga je prešinila "najsrečnejša misel", da nekdo, ki prosto pada, ne čuti teže in zanj velja teorija relativnosti. Leta 1916 je rešil vprašanje gravitacije v okviru nove teorije relativnosti, ki je dobila ime *splošna*, medtem ko je prejšnja postala *posebna*. Na poti do tega je, ob pomoči svojega nekdanjega študentskega tovariša in tedanjega matematika Marcela, obvladal matematične težave. Enačbe posebne teorije relativnosti je mogoče pregledno zapisati, če obravnavamo čas na enaki podlagi kot tri krajevne koordinate. Dobljeni štirirazsežni prostor je raven, kar naj pomeni, da ima v vsaki točki – točka ustreza dogodku – enake lastnosti. V splošni teoriji relativnosti pa postane štirirazsežni prostor *ukrivljen*, kar pomeni, da v vsaki točki nima enakih lastnosti. Masa teles in energija v okolici točke določata te lastnosti, ki jih izrazimo z ukrivljenostjo, ukrivljenost pa določa to, kako se telo tam giblje.

V splošni teoriji relativnosti je hitrost svetlobe v praznem prostoru odvisna od gravitacije. Ura na večji nadmorski višini teče hitreje kot ura na manjši (A. Likar, *Ali natančne cezijeve ure vedno tečejo enako hitro?*, Presek **31**, str. 294). Splošna teorija relativnosti je napovedala tudi to, da privlačna sila Sonca odkloni svetlobo z oddaljene zvezde pri prehodu mimo Sonca. Leta 1919 so napovedani pojav ob sončnem mrku podprli z merjenji. V času, ko so ljudje po prvi svetovni vojni iskali trdnosti, je ta uspeh Einsteinu prinesel svetovno slavo.

Leta 1917 je napovedal, da obstajajo gravitacijski valovi, ki potujejo po praznem prostoru s hitrostjo svetlobe. (Neposredno jih še ni uspelo zaznati, posredno pa so se prepričali, da obstajajo. Izmerili so energijo, ki jo zaradi valov izgubljata gosti vesoljski telesi, krožeči okoli skupnega težišča.) Istega leta je s splošno teorijo relativnosti Einstein poskusil opisati vesolje. Podobno kot Newton pred njim je naletel na težavo, da ni bilo rešitve, ki ne bi bila odvisna od časa. Tedaj so mislili, da se vesolje ne spreminja s časom, zato je tako rešitev izsilil. Enačbi je dodal člen s *kozmološko konstanto*, ki ga je teorija dopuščala. Pozneje je člen umaknil in ga imenoval "največjo zablodo". Če ga ne bi vpeljal, bi lahko napovedal, da se vesolje širi, kar so pozneje razkrila merjenja. Mogoče bi ga potolažilo, če bi vedel, da raziskovalci vesolja te dni zopet vneto razpravljajo o kozmološki konstanti.

V letih 1916 in 1917 se je Einstein ukvarjal s sevanjem svetlobe. Pri tem je ugotovil, da sam sebi prepuščen atom izseva foton in odda energijo ter jo dobi, ko absorbira foton s pravo energijo. Poleg tega pa atom izseva tak foton, če se znajde v svetlobi, katere fotoni imajo pravo energijo. Ta tretji pojav, *stimulirano sevanje*, je bil novost, ki je po letu 1960 pripeljala do prvih laserjev. Danes izkoriščamo posebnosti svetlobe laserjev v raziskovanju, tehniki in zdravstvu.

Einstein je tudi posredno prispeval k razvoju kvantne mehanike. Leta 1924 je podprl zamisel Louisa de Brogliea, da je treba gibajočemu se elektronu prirediti nekakšno valovanje. Istega leta je zamisel Satyendranatha Boseja uporabil pri poskusu, da bi plin opisal v kvantnem duhu. Pri tem je napovedal nenavaden pojav, da se pri zelo nizki temperaturi molekule plina združujejo in se začnejo vesti kot ena sama velika tvorba. To je Bose-Einsteinova kondenzacija, ki se je tedaj zdela nekoristen računski zaplet, danes pa z njo opišemo superprevodnost, supertekočnost in nekatere druge pojave.

Čeprav je Einstein najprej vzpodbudil razvoj kvantne mehanike, se je nazadnje od nje odvrnil. Poenostavljeno rečemo, prizadeval si je opisati gibanje elektronov v prostoru in času, podobno kot gibanje velikih teles. Vztrajno je ugovarjal prijatelju Nielsu Bohru in – čeprav ni imel prav – s tem veliko prispeval k razjasnitvi osnov kvantne mehanike.

Leta 1935 je z Borisom Podolskim in Nathanom Rosenom poskušal pokazati, da je kvantni opis nepopoln. Pri tem so izhajali od namišljenega poskusa, ki ga ponazorimo s prispodobo. Nekdo vrže eno copato na levo in drugo na desno. V trenutku, ko ugotovimo, da je na levo vrgel levo copato, vemo, da je na desno vrgel desno, čeprav je desna copata zelo daleč in je ne opazujemo neposredno. Ta *pojav Einsteina-Podolskega-Rosena* je zanimiv in danes posvečajo veliko pozornost *prepletenim stanjem*, v naši prispodobi parom copat. Na eni strani pri tem pojavu ne prenašamo sporočil, na drugi pa ga je mogoče izkoristiti za šifriranje, ki ga ni mogoče nepooblaščeno razvozlati.

Že v starih časih so se pojavile domneve, da obstajajo telesa, ki jih zaradi velike gravitacije svetloba ne more zapustiti. Splošna teorija relativnosti je napovedala obstoj takih zelo gostih teles, ki so dobila ime črne luknje. Einstein je leta 1939 v članku poskušal dokazati, da črne luknje ne morejo obstajati. Danes prevladuje mnenje, da so črne luknje neizogibna razvojna stopnja zvezd z veliko maso.

Einstein si je dolgo časa prizadeval, da bi se dokopal do teorije, ki bi na enotni osnovi zajela elektromagnetizem in gravitacijo. Mislil je že, da je uspel, pa se je motil. Še danes fiziki tega cilja niso dosegli, a okvirno so prepričani, da vodi pot preko kvantne teorije polja.

Einstein se ni ukvarjal samo s teorijo. S sodelavci je izvedel tudi nekaj pomembnih poskusov in je celo sestavil gospodinjski hladilnik, za katerega je patent odkupila znana evropska tovarna.

Stran Einsteinovega dela, ki smo jo osvetlili, je za fiziko najpomembnejša. K laskavemu naslovu osebnosti 20. stoletja pa so prispevale še druge njegove dejavnosti.

Einstein je gradil na dosežkih drugih fizikov. Sam je skromno rekel, da bi drugi prej ali slej odkrili to, kar je on, na primer posebno teorijo relativnosti. Le pri splošni teoriji relativnosti, je pripomnil, bi brez njega trajalo dlje in bi morda šlo na drug način. Na poti do praktične uporabe odkritij, ki smo jih omenili, na primer televizijskih snemalnih cevi, laserjev, superprevodnosti, so sodelovali številni fiziki in inženirji. Čeprav je svetovno leto fizike vezano na njegove uspehe iz leta 1905, se je fizika po Einsteinu razvijala z velikimi koraki. "Einstein je do konca v določenem smislu verjel v dejanskost in prvobitnost neposredno zaznanega sveta in v prostor in čas, kot ju je videl. [...] Rezultat 'stoletja napredka' v fiziki je, da se noben teoretični fizik ne more jemati resno, če tako misli na koncu [20.] stoletja."

Janez Strnad

ŠTEVILO HIŠ V CERKNEM LETA 1486 – Rešitev s str. 333

Označimo z x število hiš v Cerknem leta 1486. Če bi jih od teh porušili šest, bi jih bilo še $x-6$, kar pa mora biti kvadrat nekega naravnega števila, denimo m. Če pa bi sedem hiš na novo dozidali, bi Cerkno štelo $x+7$ hiš, kar pa mora spet biti kvadrat nekega naravnega števila, recimo n. Tako imamo enačbi

$$x-6=m^2\,,\qquad x+7=n^2\,.$$

Če od druge enačbe odštejemo prvo, dobimo

$$n^2-m^2=13\,.$$

Če levo stran dobljene enačbe razstavimo, imamo

$$(n-m)(n+m)=13\,.$$

Ker je očitno $n>m$ in ker je 13 praštevilo, deljivo le z 1 in 13, ne gre drugače, kot da je

$$n-m=1\,,\qquad n+m=13\,.$$

Če sedaj enačbi med seboj najprej seštejemo, nato pa še odštejemo, dobimo

$$2n=14\,,\qquad 2m=12\,.$$

Torej je $n=7$ in $m=6$. Nazadnje izračunamo $x=m^2+6=n^2-7=42$. Cerkno je torej leta 1486 štelo 42 hiš. Po hipotetični spremembi pa bi jih lahko razvrstili v seznam razsežnosti 6×6 oziroma 7×7.

Marko Razpet

KRIŽANKA

AVTOR MARKO BOKALIČ

DUŠEVNA OTOPELOST BREZVOLJNOST

TLAKOVAN PROSTOR NA DELU STAVBE

ZNANSTVENA USTANOVA

MLADI PEVEC KOSMAČ

STARA MERA ZA OBDELOVALNO ZEMLJO

POGOSTA MATEMATIČNA KONSTANTA

LAHEK, BEL IZOLACIJSKI MATERIAL

PEVEC Z VISOKIM GLASOM

NAJLEPŠA LJUBLJANČANKA IZ POVODNEGA MOŽA

5. IN 3. SAMOGLASNIK

OBLOGA IZ DESK

POSEBEN POLOŽAJ PRI ŠAHU

SOSEDNJI ČRKI

EMAJL

IZUMRLI ČLOVEČNJAK

ČRKA P

ŽLEZE, KI ODDAJAJO NEPRIJETEN VONJ

MORSKI ROPARJI

NEMŠKI AVTO

GOR. REŠEV. PRIPRAVA

GOTOVČEV OPERNI JUNAK

ANGLEŠKI FIZIK, KI JE RAZISKOVAL IONOSFERO

SAMICA MANJŠE GOZDNE ZVERI

LUČAJ, VRŽEK

TEHTALNA PRIPRAVA

BOLEZEN. RDEČINA KOŽE

NAPRAVA ZA MERJENJE JAKOSTI TOKA

OBDOBJE ZEMELJ. PRAVEKA

JACK LONDON

PREDSEDNIK VLADE

HRIB NAD BEVKOVO VASJO

NEROJEN ČLOVEK

SVETA DEŽELA NA BLIŽJEM VZHODU

BOLGAR. DENARNA ENOTA

LOVSKA DRUŽINA

PEVSKI ZLOG

HLAPLJIVA ORGANSKA TEKOČINA

BARVA KOŽE, POLT

IGRALKA TAYLOR

TERENSKI AVTO, DŽIP

GLAVNI JUNAK VERGILOVEGA EPA

ŽIVILO, KI GA PRIDELUJEJO ČEBELE

NEMŠKA SMUČARKA (MARTINA)

LIKOVNICA VOGELNIK

NAREČNI IZRAZ ZA TELICO

PESNICA ŠKERL

RIMSKI CESAR, KI JE RAZDEJAL JERUZALEM

SPOMINSKO TEKMOVANJE

MILNEJEV MEDVEDEK

OKLEŠČEK, KREPELCE

NEJASNA MISEL, DA JE KAJ RESNIČNO, DOZDEVA

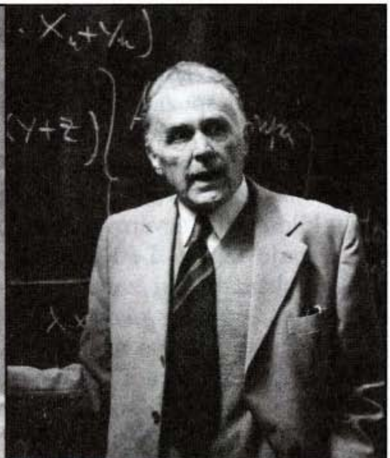
ČILSKI PESNIK IN DIPLOMAT, NOBELOVEC (PABLO)

ALJAŽ PEGAN

DEKLA IZ FINŽGARJEVE POVESTI

ZGUBA AGE PRI ISKLA-ŠČENIH ŽIVILIH

DEBELI JE PRI ANKARANU



KAMNINA IZ ZLEPLJENIH JAJČASTIH SKUPKOV OOLIT

FRANZ KAFKA

ERNEST HEMINGWAY

TUJA IN NAŠA ČRKA

SOSEDI ČRKE O

JUNAŠKA PRIPOVED V VERZIH

NEMOREAL-NOST, GREŠNOST (V KRŠČAN. OKOLJU)

POKOJNI PIANIST BERTONCELJ

PREDS. NDIDAT JOHN)

LSKI PLIN

FLAVTISTKA GRAFENAUER

MAJHEN KIP

POKOJNI LUTKAR SIMONČIČ

NADA ŽGUR

AFR. PTIČ TEKAČ

PRIPRAVA ZA TOLČENJE PO PERILU

GLAS JEREBICE

NAŠ SLIKAR (MATEVŽ)

PONOČENA CUNJA

VEČJI KRAJ PRI CERKNICI

NEKDANJI AMERIŠKI BOKSAR

OBRAT TELESA V ZRAKU, PREMET PROSTO

NEKD. SOVJ. TISKOVNA AGENCIJA

ŠP. SLIKAR (SALVADOR)

POLITIČNO GIBANJE V ITALIJI

DESNI PRI-TOK VOLGE

MANJŠE GOSTIŠČE V GORAH

VLADIMIR ČADEŽ

ZVEZDA V OZVEZDJU PERZEJA

EDDIE MURPHY

GIBLJIVA OBRAZNA KOST

STAREJŠI CITROENOV AVTO

ŠTEVILO PROCENTOV, KI TVORI CELOTO

LADJA IN MEHUR

Zapis *Ladja in mehurčki* v lanski 4. številki Preseka je poročal o poskusih, ki so pokazali, da lahko ladja potone v dovolj močnem enakomernem toku dvigajočih se mehurčkov. Vprašanje je zraslo iz mornarskih pripovedi o izginulih ladjah in spoznanja, da z morskega dna pogosto uhaja metan. Medtem je morski geolog pri raziskovanju morskega dna s sonarjem naletel na domnevno razbitino ladje. Zelo neravno območje v premeru kakih sto metrov na sicer ravnem dnu je znano kot Čarovničina luknja. Leži kakih 150 kilometrov severovzhodno od Aberdeena na škotski obali, kjer v okolici črpajo nafto. Leta 2000 so s podmornico brez posadke v 150 metrov globokem morju zares našli razbitino 25 metrov dolge ladje z jekleno lupino, zgrejene okoli leta 1900. Razbitina je ležala na dnu v naravni legi in se verjetno ni potopila zaradi trka z oviro ali vdora vode. Lahko bi se potopila zaradi izbruha metana.

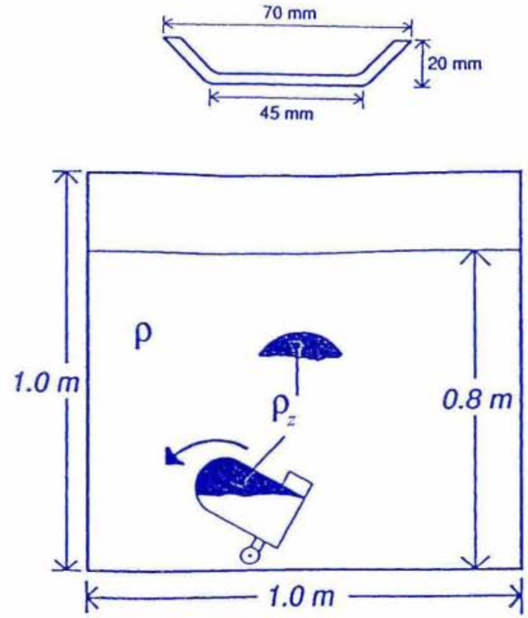
Ob gnitju organskih snovi v skladih pod morskim dnom se razvija metan. Ponekod neposredno uhaja v morje, ponekod pa ga zadržijo neprepustni skladi. Metan se kopiči in tlak povečuje, dokler metan ne izbruhne. Nobenega izbruha še niso neposredno opazovali. Izkušnje pa so pokazale, da izbruh lahko resno poškoduje naftno ploščad, če ob vrtanju naletijo na metan pod visokim tlakom.

Poskusi, ki jih je opisal Presek, so podprli misel, da se ladja utegne potopiti, če zaide v enakomeren gost tok mehurčkov. Ob izbruhu se verjetno pojavi en sam velik mehur plina. Ali lahko tak mehur potopi ladjo, ki po nesreči zaide v mehur? Na vprašanje so poskusili odgovoriti z merjenji in računi.

Medtem ko je za obliko mehurčkov odločilna površinska napetost, je za obliko velikih mehurjev odločilen tlak. Mehurčki imajo obliko kroglic, veliki dvigajoči se mehurji pa so ploščati z vrhnjo ploskvijo, ki se prilega delu krogelnega površja. Spodnja mejna ploskev ni gladka in se neurejeno spreminja zaradi dveh nasprotno usmerjenih vrtincev, ki se pojavita pod njo. Razmere so veliko bolj zapletene kot v enakomernem toku mehurčkov. Gibanja mehurja ni mogoče opisati s splošno enačbo. V neki drugi zvezi so zasledovali dviganje mehurjev samo z računalniško simulacijo. Nihče pa še ni raziskal, kako mehur deluje na telo s podobno velikostjo.

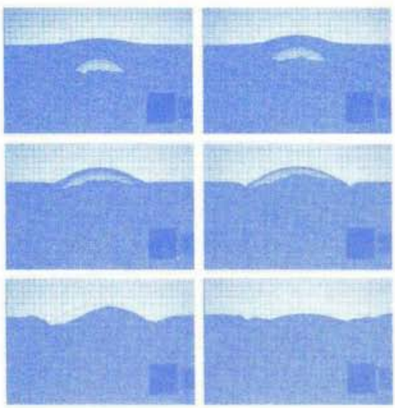
Naloge sta se lotila D. A. May in J. J. Monaghan z univerze Monash v Claytonu v Avstraliji in o tem poročala v American Journal of Physics. V splošnem je treba v prostoru upoštevati odvisnost treh koordinat od časa. Da bi bil opis preprostejši, sta si zamislila primer, pri katerem ni bilo treba upoštevati odvisnosti od tretje koordinate. Poskuse sta delala v ploski posodi, ki sta jo sestavila iz dveh šip z velikostjo $1\ \mathrm{m} \cdot 1\ \mathrm{m}$ v razmiku 9 mm. Privzeti je bilo mogoče, da razmere v plasti pravokotno na sprednjo in zadnjo stekleno mejo niso odvisne od razdalje od meja. Tako sta trirazsežni primer prevedla na dverazsežnega in ga s tem precej poenostavila. Po izidu poskusov v dveh razsežnostih je mogoče vsaj okvirno sklepati na izid ustreznih poskusov v treh razsežnostih. Na gladino 80 cm globoke vode sta postavila 7 cm dolg in 2 cm globok dverazsežni model ladje. Mehurje sta dobila tako, da sta po cevki uvedla zrak v obrnjeno ploščato posodico v obliki črke U. Model ladje in posodico sta na sprednji in zadnji strani omejevala prozorna filma (slika 1). Z magnetom sta zasukala posodico, da je nastal mehur, ki se je začel dvigati. Velikost mehurja je bila odvisna od tega, kako hitro sta zasukala posodico.

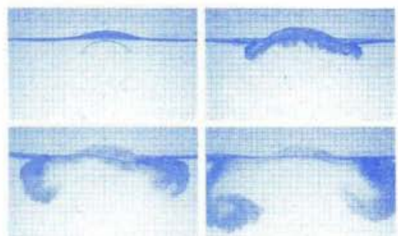
Na zadnjo ploskev posode sta narisala koordinatno mrežo 2 cm $\cdot$ 2 cm in poskuse posnela s televizijsko kamero. Podatke sta izluščila s televizijskih slik. Za mehur je bil značilen polmer vrhnje gladke krogelne ploskve,



Slika 1. Ploska posoda iz steklenih šip, naprava za dobivanje mehurjev in model ladje (ni v merilu). Gostota vode ρ je približno tisočkrat večja od gostote zraka ρ_z, ki jo lahko v primeri z njo zanemarimo. Metan je 1,8-krat lažji od zraka. Slike so z ljubeznivim dovoljenjem avtorjev in uredništva povzete po članku D. A. May, J. J. Monaghan, *Can a single bubble sink a ship?*, American Journal of Physics **71** (2003) 842.

za katerega sta namerila od 4 cm do 9 cm. Mehur se je zaradi manjšanja tlaka med dviganjem večal, vendar se je hitrost dviganja le malo povečala. Preden je vrhnja krogelna ploskev dosegla gladino, se je gladina dvignila v krogelno ploskev in na njenem robu sta nastali dolini. Modela ladje v srednji točki med obema dolinama mehur ni prizadel. Model ladje, ki ni bil postavljen simetrično glede na dolini, pa je potegnilo v eno od njiju in je potonil. Mehur se je nato razpočil in pri tem sta se na mestu dolin pojavila curka vode v smeri navpično navzdol. To so opazili, ko so v vodi raztopili sol in s tem povečali gostoto vode. Na gladino so previdno nalili tanko plast barvila z manjšo gostoto. Na sliki sta se pojavila tokova barvila navzdol, ko je mehur predrl gladino (slika 2).

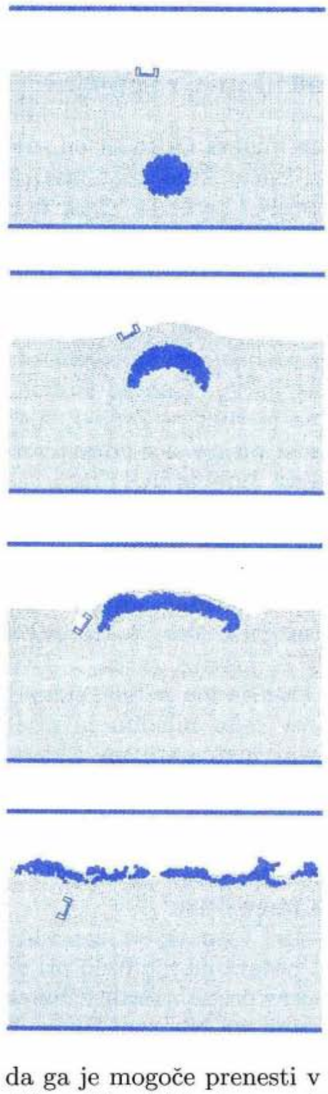




Slika 2. Pri poskusu je mogoče dobro videti, kako se gladina vode dvigne, ko se ji približa mehur, in kako se na obeh straneh izbokline oblikujeta dolini (levo). Barvilo na gladini pokaže, da se deli vode ob dolinah dokaj izrazito gibljejo navzdol (desno).

Poskusom so sledile še računalniške simulacije. Pri tem so privzeli, da so po navpični ploskvi razmeščeni delci, ki delujejo drug na drugega. Postopek, ki je pripraven za delo z računalnikom, poznajo kot "zglajeno delčno hidrodinamiko". Dobljeni izid se je okvirno ujemal z izidom pri poskusu (slika 3). Poskusi in računalniške simulacije so pokazale, da bi se v dveh razsežnostih ladja lahko potopila, če bi jo po naključju zajel dvigajoči se dovolj velik mehur metana. Mehur pa ne bi smel biti dosti

Slika 3. Računalniška simmulacija dvigajočega se mehurja da približno enake izide kot poskus.



manjši kot ladja. Sklep je dovolj okviren, da ga je mogoče prenesti v tri razsežnosti, čeprav se pojavijo v podrobnostih razlike. Tako je na primer tlak v globini 150 m 16-krat večji kot na gladini in bi se polmer mehurja, ki bi se dvignil z dna, na gladini dvakrat povečal, če plin v mehurju ne bi sprejel toplote in je ne bi oddal.

Janez Strnad

GABRIEL CRAMER (1704 – 1752)
Cramerjevo pravilo, Cramerjev paradoks, Castillon-Cramerjev problem, satanova krivulja

Letos mineva tristo let od rojstva švicarskega matematika Gabriela Cramerja, čigar ime nosi pravilo za zapis rešitve sistema linearnih enačb z uporabo determinant.

Cramerjeva družina izhaja iz avstrijskega Holsteina pri Strasbourgu, Gabriel Cramer pa se je rodil v Ženevi, kjer je imel njegov oče zdravniško prakso. Imel je dva brata, od katerih je bil eden zdravnik in drugi profesor prava.

Gabriel je s šolanjem opravil po bližnjici, saj je že pri osemnajstih letih doktoriral s tezo iz teorije zvoka. Dve leti kasneje mu je bila, skupaj s prav tako mladim in obetavnim matematikom Calandrinijem, dodeljena katedra za matematiko na Calvinovi akademiji v Ženevi. Calandrini je predaval algebro in astronomijo, Cramer geometrijo in mehaniko. Cramerju gre zasluga, da so na Calvinovi akademiji poleg latinščine, tradicionalnega šolskega jezika tistega časa, začeli uporabljati tudi francoščino[1].

Del Cramerjeve zaposlitve na Calvinovi akademiji so predstavljala tudi potovanja in obiski pri vodilnih evropskih matematikih. Tako je pet mesecev prebil v Baslu z Johannom Bernoullijem in njegovimi učenci, med katerimi sta bila tudi Daniel Bernoulli in Leonhard Euler. Nato ga je pot vodila v Anglijo k Halleyu, Moivreu in Stirlingu ter v Pariz, kjer je delal skupaj z Fontenellom, Maupetuisom, Clairautom in drugimi.

Leta 1730 se je potegoval za nagrado francoske akademije znanosti. Njegovo delo je bilo ocenjeno kot drugo najboljše med prispelimi na natečaj, nagrado pa je prejel Johann Bernoulli. Ta dogodek je morda

[1] Ženeva leži v francoskem jezikovnem območju Švice.

tipičen za Cramerjev položaj v zgodovini matematike. Ostajal je v senci svojih slavnih sodobnikov in soustvarjalcev matematike. Tako je najbolj znan po Cramerjevem pravilu, ki pravzaprav ni njegovo originalno delo, in po Cramerjevem paradoksu, ki ga ni v celoti pojasnil.

Cramerjevo življenje je bilo izjemno delavno. Predavanja na univerzi, dopisovanje s številnimi matematiki, pisanje odmevnih člankov iz geometrije, zgodovine matematike, filozofije, astronomije in verjetnosti. Njegovo najpomembnejše delo je monografija *Introduction à l'analyse de lignes courbes algébriques* (Uvod v analizo algebraičnih krivulj), ki ga je izdal leta 1750. Nekoliko presenetljivo je, da v knjigi ni uporabil infinitezimalnega računa (ne v Newtonovi ne v Leibnizovi obliki, ki sta bili tedaj že na voljo), čeprav v njej obravnava tudi teme, kot so tangenta, maksimum, minimum in ukrivljenost.

Cramer je slovel kot vešč založnik. Med drugim je izdal zbrana dela Johanna in Jakoba Bernoullija ter, skupaj z italijanskim matematikom Castillonom, korespondenco med Johannom Bernoullijem in Leibnizem. Deloval je tudi v lokalni upravi, kjer je bil kot matematik in znanstvenik zadolžen za artilerijo, utrdbe, obnovo poslopij, predore in arhiv.

Prekomerno delo in padec s kočije sta načela njegovo zdravje in ga za dva meseca priklenila na posteljo. Zdravnik mu je zato predpisal počitek v južni Franciji. Cramer je odpotoval iz Ženeve in na poti v Francijo umrl na začetku leta 1752.

Cramerjevo pravilo

Gre za znano pravilo, ki podaja pregleden zapis rešitve linearnega sistema z determinantami. Študentje študijskih smeri, ki imajo vsaj minimalen program matematike, ga spoznajo že v prvem letniku fakultete. Danes ga povemo takole:

Naj bo dan sistem n linearnih enačb z n neznankami. Če je determinanta koeficientov sistema različna od nič, je sistem enolično rešljiv. Vrednost posamezne neznanke je kvocient dveh determinant. V imenovalcu je vedno determinanta koeficientov, v števcu pa determinanta, ki jo dobimo tako, da stolpec koeficientov pri iskani neznanki nadomestimo s stolpcem desnih strani enačb sistema.

V dodatku k tretjemu poglavju Uvoda v analizo algebraičnih krivulj je Cramer pravilo splošno opisal in ilustriral s primerom sistema petih linearnih enačb. Podoben način reševanja sistemov linearnih enačb je sicer že leta 1693 omenil Leibniz v svojem pismu L'Hospitalu, vendar so priznali Cramerju prvenstvo pri objavi pravila.

Kasneje je sicer znani matematični zgodovinar Boyer odkril, da je že leta 1748, torej dve leti pred izidom Cramerjeve knjige, ekvivalentno pravilo v svoji knjigi Treatise of Algebra opisal Newtonov učenec, škotski matematik Maclaurin. Boyer je mnenja, da so Maclaurinov opis pravila prezrli, ker je uporabljal veliko bolj zapletene oznake kot Cramer. Gotovo je k poimenovanju pravila po Cramerju pripomoglo tudi Eulerjevo mnenje, da je Cramer oblikoval 'très belle règle' – zelo lepo pravilo.

Cramerjev paradoks

Med znana Cramerjeva 'dela' sodi tudi Cramerjev paradoks, ki ga je Cramer oblikoval v zvezi s teorijo algebraičnih krivulj.

Zaradi enostavnosti se bomo pri opisu paradoksa omejili na algebraične krivulje tretje stopnje, čeprav 'velja' tudi za višje stopnje.

Algebraična ravninska krivulja tretje stopnje je množica točk, katerih pravokotni koordinati x, y ustrezata enačbi

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + fx^2 + gxy + hy^2 + px + qy + r = 0\,,$$

v kateri so a, b, $\ldots$, r številski koeficienti. Polinom na levi ima deset členov, zato v njem nastopa deset koeficientov. Vendar dobimo isto krivuljo, če enačbo delimo s poljubnim neničelnim koeficientom, kar število prostih koeficientov v splošni enačbi zmanjša na devet.

Če v ravnini izberemo poljubnih devet točk in vstavimo njihove koordinate v splošno enačbo algebraične krivulje tretje stopnje, dobimo sistem devetih linearnih enačb za devet neznanih koeficientov. Rešitev sistema je v večini primerov (t.j. izborov devetih točk) ena sama. To pa pomeni, da devet poljubno izbranih točk v večini primerov enolično določa algebraično krivuljo tretjega reda, ki poteka skoznje.

Po drugi strani pa velja, da imata dve algebraični krivulji toliko skupnih točk, kolikor je produkt njunih stopenj (upoštevaje večkratnost, kompleksna presečišča in neskončno točko). Dve krivulji tretje stopnje imata torej devet skupnih točk. Pa smo pri Cramerjevem paradoksu: *Devet poljubnih točk praviloma enolično določa krivuljo tretje stopnje in dve poljubni krivulji tretje stopnje se sekata v devetih točkah.*

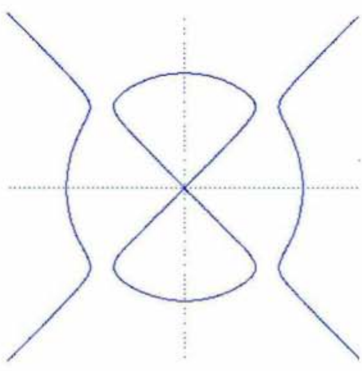
Cramerjeva razlaga paradoksa je bila pomanjkljiva. Natančno ga je pojasnil šele Plüker več kot 70 let po Cramerjevi smrti. Skrivnost je v tem, da je z osmimi presečišči dveh krivulj tretje stopnje deveto presečišče že enolično določeno. Množica poljubno izbranih devetih točk v ravnini je torej le v izjemnih primerih tudi množica presečišč dveh krivulj tretje stopnje.

Castillon-Cramerjev problem

To je zanimiva geometrijska naloga, ki jo je Cramer zastavil Castillonu. *Dan je krog in tri točke v njegovi notranjosti. V krog je treba včrtati trikotnik tako, da bo skozi vsako od danih točk potekala po ena od trikotnikovih stranic.* Nalogo je Castillon rešil šele 24 let po Cramerjevi smrti. Nalogo je moč rešiti na različne načine, med drugim analitično ali z uporabo trigonometrije. Zelo lepa je elementarno-geometrijska konstrukcija iskanega trikotnika z ravnilom in šestilom, ki jo lahko razširimo na konstrukcijo tetivnega večkotnika z dano očrtano krožnico, katerega nosilke stranic potekajo skozi dane točke. Zelo preprosto in elegantno lahko nalogo rešimo s sredstvi projektivne geometrije. Projektivna rešitev vodi do rešitve različnih oblik problema – v stožnico včrtati večkotnik ali ji ga očrtati.

Satanova krivulja

Zaključimo z nenavadno krivuljo, s katero se je Cramer ukvarjal in o njej pisal, kasneje pa jo je obravnaval tudi francoski matematik Lacroix. Poimenovali so jo *Satanova krivulja*, njena splošna implicitna enačba v pravokotnem koordinatnem sistemu (x, y) je $y^4 - x^4 + ax^2 + by^2 = 0$, enega od možnih grafov pa prikazuje slika 1.



Slika 1. Satanova krivulja.

Marija Vencelj

LINEARNA SPIRALA – Rešitev s str. 322

Šiviljski meter, ki je na sliki 1, meri 150 cm, njegova debelina je 0.6 mm, njegova širina pa je 1 cm. Na svinčnik premera $2r = 7.7$ mm ga lahko ovijemo $n = 22$ krat. Upoštevajoč navodila iz prejšnje številke Preseka bomo ta "eksperiment" računsko potrdili na dva načina:

1. način

Volumen kvadra je enak $V = l \cdot \Delta \cdot š$, volumen izrezanega valja pa je enak $V = \pi\left(R^2 - r^2\right) \cdot š$. Po enačenju obeh volumnov dobimo

$$l\Delta = \pi\left(R^2 - r^2\right) ,$$

od koder sledi

$$R = \sqrt{\frac{l\Delta}{\pi} + r^2} .$$

Število zavojev n v spirali je tako približno enako kvocientu debeline navitja in debeline merskega traku

$$n = \frac{R - r}{\Delta} = \frac{\sqrt{\frac{l\Delta}{\pi} + r^2} - r}{\Delta} \approx 22.5 .$$

2. način.

Spiralo lahko približno opišemo z n koncentričnimi krožnicami. Polmer prve krožnice je enak $r + \Delta$, polmer vsake naslednje krožnice pa je od prejšnjega večji za Δ, tako da polmeri tvorijo *aritmetično zaporedje* z začetnim členom $a_0 = r + \Delta$ in diferenco $d = \Delta$. V tem primeru enačimo vsoto obsegov n koncentričnih krožnic in dolžino šiviljskega traku l:

$$2\pi(r + \Delta) + 2\pi(r + 2\Delta) + \cdots + 2\pi(r + [n-1]\Delta) = l .$$

Če zgornjo enačbo okrajšamo z 2π in upoštevamo, da je vsota prvih $n - 1$ naravnih števil enaka $\frac{1}{2}(n-1)n$, dobimo

$$\begin{aligned} nr + \Delta(1 + 2 + \cdots + n - 1) &= \frac{l}{2\pi} \\ nr + \frac{(n-1)n}{2}\Delta &= \frac{l}{2\pi} , \end{aligned}$$

od koder sledi za n kvadratna enačba:

$$n^2\Delta + (2r - \Delta)\, n - \frac{l}{\pi} = 0\,.$$

Ena rešitev je negativna, druga pa je enaka

$$n = \frac{\sqrt{4r^2 - 4r\Delta + \Delta^2 + \frac{4\Delta l}{\pi}} - 2r + \Delta}{2\Delta} \approx 22.9\,.$$

Za radovedne bralce na koncu omenimo, da z obema zgornjima načinoma dobimo približek. Točno vrednost je malo težje izračunati. Uporabiti je treba formulo za ločno dolžino parametrično podane krivulje. Če je namreč $(x\,(\phi)\,, y\,(\phi))$ parametrično podana krivulja (s parametrom ϕ), je dolžina loka med točkama $A\,(x\,(\phi_A)\,, y\,(\phi_A))$ in $B\,(x\,(\phi_B)\,, y\,(\phi_B))$ enaka

$$l = \int_{\phi_A}^{\phi_B} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2}\, d\phi\,. \tag{1}$$

Tako dobimo še tretji način.

3. način.

Spirala, ki relativno dobro opisuje sredinsko črto zvitega traku, ima enačbo

$$(x\,(\phi)\,, y\,(\phi)) = A\,(\phi)\,(\cos\phi, \sin\phi)\ ,$$

kjer je $A\,(\phi) = r + \frac{\Delta}{2} + \frac{\Delta}{2\pi}\phi$. Integral (1) je v tem primeru preveč zapleten, da bi ga natančno računali. Zadovoljili se bomo z numeričnimi rezultati: za $n = 22$ je $l = 1.486$ m, za $n = 23$ pa je $l = 1.596$ m, za $n = 22.128$ pa dobimo $l = 1.5000$ m.

Kaže, da je natančnejši prvi način, ki je tudi enostavnejši.

Rešitev zastavljene naloge s strani 322 je:

a) po prvem načinu: $R = 42.\,621$ in $n = 55.\,242$,
b) po drugem načinu: $n = 55.\,567$.

Andreja Pečovnik Mencinger

EVROPSKI MATEMATIČNI KENGURU 2004

Naloge za 6. in 7. razred devetletne in za 5. in 6. razred osemletne osnovne šole

Naloge, vredne 3 točke

1. Vrednost izraza $1000 - 100 + 10 - 1$ je:

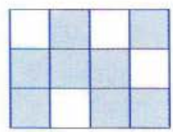
(**A**) 111 (**B**) 900 (**C**) 909 (**D**) 990 (**E**) 999

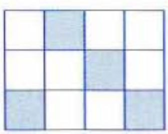
2. Maruša ima 16 kart, in sicer 4 pike, 4 križe, 4 kare in 4 srca. Karte bi rada položila na preglednico tako, da bo v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu 1 karta vsake vrste. Na sliki je prikazano, kako je začela polagati karte. Katero karto mora položiti na mesto, označeno z x?

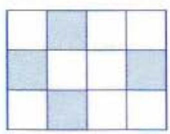
♠		x	♡
♣	♠		
	♢		
	♡		

(**A**) ♠ (**B**) ♣ (**C**) ♢ (**D**) ♡
(**E**) Nemogoče je določiti.

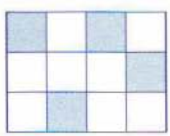
3. Katerega izmed spodnjih pravokotnikov dobimo, če v pravokotniku na desni zamenjamo sivo in belo barvo?

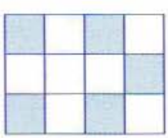


(**A**) 

(**B**) 

(**C**) 

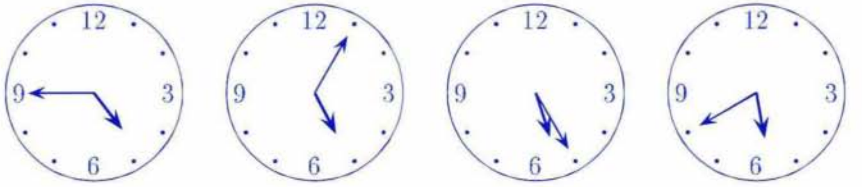
(**D**) 

(**E**) 

4. Katero izmed naštetih števil ne deli števila 2004?

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 6 (**D**) 8 (**E**) 12

5. Erik ima doma 4 ure: 1 je točna, 1 zaostaja za 20 min, 1 prehiteva za 20 min, 1 pa stoji. Erik je včeraj zjutraj pogledal hkrati na vse 4 ure. Koliko je bila takrat ura?

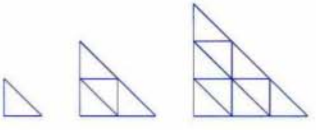


(**A**) 4.45 (**B**) 5.05 (**C**) 5.25
(**D**) 5.40 (**E**) Nemogoče je določiti.

6. Koliko ur je 360000 s?

(**A**) 3 (**B**) 6 (**C**) 8.5 (**D**) 10
(**E**) več kot 10

7. Miran je iz majhnih trikotnih ploščic sestavljal vedno večje trikotnike. Za 1. trikotnik je potreboval 1 ploščico, za 2. trikotnik 4 ploščice in za 3. trikotnik 9 ploščic (glej sliko). Koliko ploščic je potreboval za 5. trikotnik?



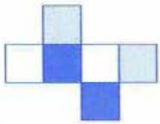
(**A**) 15 (**B**) 20 (**C**) 25 (**D**) 30 (**E**) 50

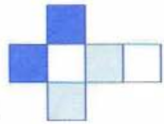
8. Edi je nabral 2004 smrekove storže. Odločil se je, da jih bo zlagal na kupčke po 5. Največ koliko takih kupčkov lahko naredi?

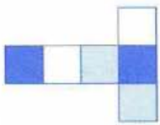
(**A**) 5 (**B**) 400 (**C**) 401 (**D**) 402 (**E**) 404

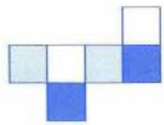
Naloge, vredne 4 točke

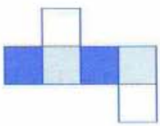
9. Nasprotni mejni ploskvi kocke na desni sta enake barve. Na kateri sliki je mreža te kocke?

(**A**) 

(**B**) 

(**C**) 

(**D**) 

(**E**) 

10. Tričlanska zajčja družina je za kosilo pojedla 73 korenčkov. Oče je pojedel 5 korenčkov več kot mama, sin pa je pojedel 12 korenčkov. Koliko korenčkov je pojedla mama?

(**A**) 27 (**B**) 28 (**C**) 31 (**D**) 33 (**E**) 56

11. V Barvni ulici je 5 hiš: modra, rdeča, rumena, roza in zelena. Hiše imajo hišne številke od 1 do 5 (glej sliko).

Modra in rumena hiša imata sodi hišni številki. Poleg rdeče hiše je samo modra hiša. Modra hiša ima za sosedi zeleno in rdečo hišo. Kakšne barve je hiša s hišno številko 3?

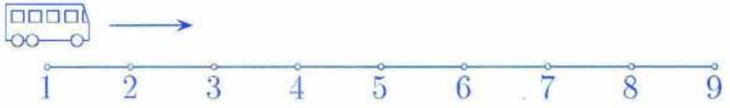
(**A**) modre (**B**) rdeče (**C**) rumene (**D**) roza (**E**) zelene

12. Vsota števk desetmestnega števila je 9. Koliko je zmnožek števk tega števila?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 45

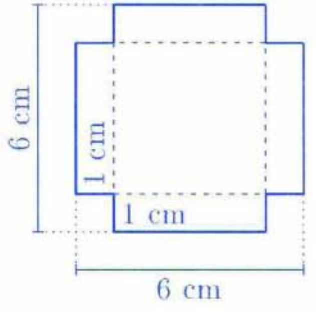
(**D**) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$ (**E**) Nemogoče je določiti.

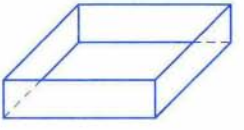
13. Avtobusna proga ima 9 postaj. Razdalje med sosednjima postajama so enake, razdalja med 1. in 3. postajo pa meri 600 m. Koliko metrov meri razdalja med 1. in zadnjo postajo?



(**A**) 1200 (**B**) 1500 (**C**) 1800 (**D**) 2400 (**E**) 2700

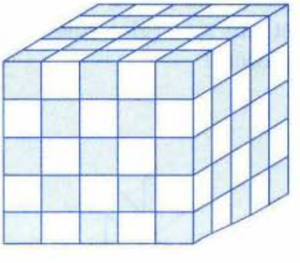
14. Iz kartona naredimo škatlo (glej sliko). Koliko kubičnih centimetrov meri prostornina dobljene škatle?





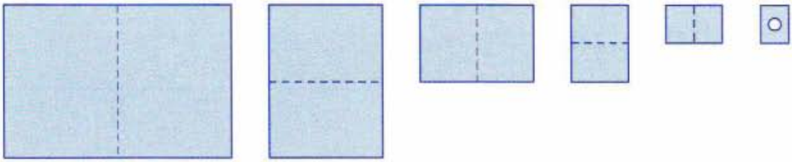
(**A**) 16 (**B**) 24 (**C**) 25 (**D**) 30 (**E**) 36

15. Kaja je iz belih in sivih kock z dolžino roba 1 sestavila kocko z dolžino roba 5. Poljubni sosednji kocki sta bili različnih barv, vse kocke v ogliščih velike kocke pa so bile sive (glej sliko). Koliko belih kock je uporabila Kaja?



(**A**) 62 (**B**) 63
(**C**) 64 (**D**) 65
(**E**) 68

16. Sašo je 5-krat prepognil kos papirja, v prepognjeni kos papirja naredil luknjo in nato papir ponovno razgrnil. Koliko lukenj je imel razgrnjeni kos papirja?

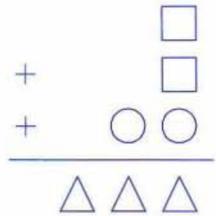


(**A**) 6 (**B**) 10 (**C**) 16 (**D**) 20 (**E**) 32

Naloge, vredne 5 točk

17. Različni liki predstavljajo različne števke. Katero števko predstavlja kvadrat?

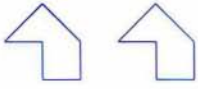
(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 9

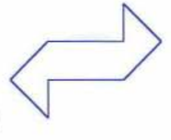


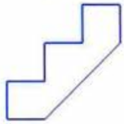
18. Jana je ugotovila, da 2 hruški in 3 jabolka skupaj tehtajo 255 g, 3 hruške in 2 jabolki pa 285 g. Vsa jabolka so enako težka in vse hruške so enako težke. Koliko gramov tehtata skupaj 1 jabolko in 1 hruška?

(**A**) 102 (**B**) 104 (**C**) 105 (**D**) 108 (**E**) 110

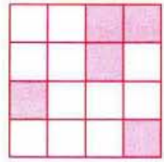
19. Tina ima 2 enaki ploščici, ki sta na zgornji strani beli in na spodnji strani sivi (glej sliko). Katerega belega lika ne more sestaviti iz teh 2 ploščic?



(**A**)  (**B**)  (**C**) 

(**D**)  (**E**) 

20. Najmanj koliko belih kvadratkov moramo osenčiti, da bo imela slika vsaj 1 os simetrije?

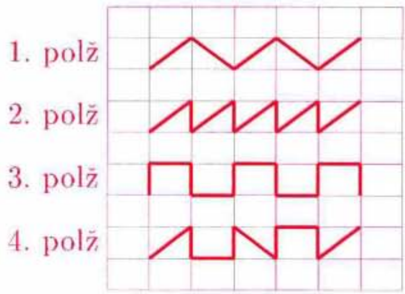


(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3
(**D**) 4 (**E**) 5

21. Nogometno moštvo dobi za zmago 3 točke, za neodločen izid 1 točko in za poraz 0 točk. V 3 tekmah je nogometno moštvo Hitre noge dalo 3 gole in prejelo 1 gol. Koliko točk ne morejo imeti po teh 3 tekmah?

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

22. Po sobi, tlakovani z enakimi pravokotnimi ploščicami, so lezli 4 polži. Njihove poti so označene na sliki. Dolžina poti 1. polža meri 25 dm, 2. polža 37 dm in 3. polža 38 dm. Koliko decimetrov meri dolžina poti 4. polža?

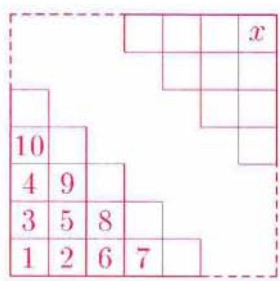


(**A**) 27 (**B**) 30 (**C**) 35
(**D**) 36 (**E**) 40

23. Na otoku sredi morja vsak ponedeljek in sredo dežuje, v soboto je megleno, ostale dni v tednu pa je sončno vreme. Skupina turistov bi na otoku rada preživela 44-dnevne počitnice. Kateri dan v tednu mora biti 1. dan njihovih počitnic, da bodo imeli največ sončnih dni?

(**A**) ponedeljek (**B**) torek (**C**) sreda
(**D**) četrtek (**E**) petek

24. V veliko kvadratno preglednico po vrsti vpisujemo števila (glej sliko). Katero izmed naštetih števil ne more biti v zgornjem desnem polju, označenim z x?



(**A**) 81 (**B**) 121 (**C**) 128
(**D**) 256 (**E**) 400

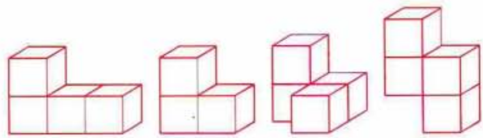
Naloge za 1. in 2. letnik srednje šole, kategorija A

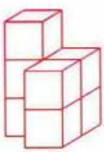
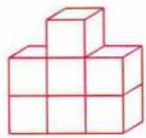
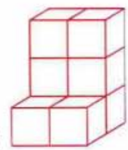
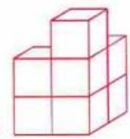
Naloge, vredne 3 točke

1. Vrednost izraza $(1-2)-(3-4)-(5-6)-\cdots-(99-100)$ je:

(**A**) -48 (**B**) 0 (**C**) 48 (**D**) 49 (**E**) 50

2. Vsako telo na spodnjih slikah je sestavljeno iz 7 kock. Katerega izmed njih ne moremo sestaviti s pomočjo 2 izmed 4 teles na desni sliki?



(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**) 

(**E**) Vsa 4 telesa lahko sestavimo.

3. Jan ima 2004 frnikole. $\frac{1}{2}$ frnikol je modrih, $\frac{1}{4}$ rdečih, $\frac{1}{6}$ zelenih, preostale frnikole pa so rumene. Koliko rumenih frnikol ima Jan?

(**A**) 167 (**B**) 334 (**C**) 501 (**D**) 1002 (**E**) 1837

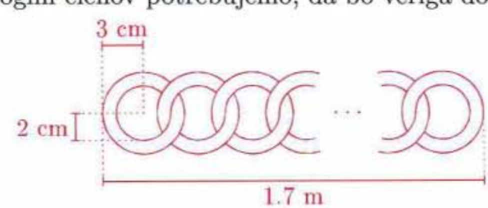
4. Piramida ima 7 mejnih ploskev. Koliko robov ima?

(**A**) 8 (**B**) 9 (**C**) 12 (**D**) 18 (**E**) 21

5. Šolsko igrišče pravokotne oblike je dolgo 60 m in široko 40 m. Na načrtu meri obseg igrišča 100 cm. V kakšnem merilu je narisan načrt?

(**A**) $1:100$ (**B**) $1:150$ (**C**) $1:160$ (**D**) $1:170$ (**E**) $1:200$

6. Koliko okroglih členov potrebujemo, da bo veriga dolga 1.7 m?



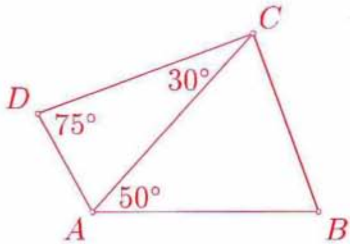
(**A**) 17 (**B**) 21 (**C**) 30 (**D**) 42 (**E**) 85

7. Katka in Katja igrata namizni tenis. Če bi imela Katka 5 točk več, bi jih imela 2-krat toliko kot Katja. Če pa bi imela Katka 7 točk manj, bi imela $\frac{1}{2}$ Katjinih točk. Koliko točk ima Katka?

(**A**) 5 (**B**) 7 (**C**) 9 (**D**) 11 (**E**) 15

8. Nekateri koti v štirikotniku $ABCD$ so označeni na sliki. Koliko stopinj meri kot $\sphericalangle ABC$, če je $|AB| = |CD|$?

(**A**) 30 (**B**) 50 (**C**) 55
(**D**) 65 (**E**) 70



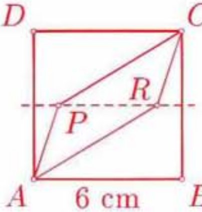
Naloge, vredne 4 točke

9. V sobi je bil več kot 1 kenguru. Eden izmed kengurujev je rekel: "V sobi je 6 kengurujev." Nato je odšel iz sobe. Potem je vsako naslednjo minuto eden izmed preostalih kengurujev najprej rekel: "Vsi, ki so pred mano odšli iz sobe, so lagali," in nato odšel iz sobe. To se je ponavljalo, dokler soba ni bila prazna. Koliko kengurujev je govorilo resnico?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 4

10. V kvadratu $ABCD$, katerega stranica meri 6 cm, ležita točki P in R na premici, ki razpolavlja nasprotni stranici kvadrata. Koliko centimetrov meri dolžina daljice PR, če razdelijo daljice AP, PC, AR in RC kvadrat $ABCD$ na 3 ploščinsko enake dele?

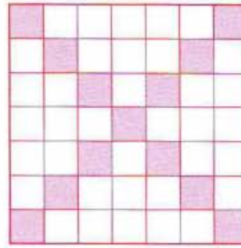
(**A**) 3.6 (**B**) 3.8 (**C**) 4 (**D**) 4.2 (**E**) 4.4



11. Mišo je nabral polno košaro jurčkov in lisičk, vseh gob v košari je bilo 30. Če bi Mišo naključno vzel iz košare 12 gob, bi bil med njimi vsaj 1 jurček. Če pa bi naključno vzel iz košare 20 gob, bi bila med njimi vsaj 1 lisička. Koliko jurčkov je bilo v košari?

(**A**) 11 (**B**) 12 (**C**) 19 (**D**) 20 (**E**) 29

12. Kvadrat s stranico dolžine 2003 je sestavljen iz enotskih kvadratkov, enotski kvadratki na njegovih diagonalah so osenčeni (na sliki je primer kvadrata s stranico dolžine 7). Koliko kvadratnih enot meri neosenčeni del kvadrata?



(**A**) 2002^2 (**B**) 2002×2001
(**C**) 2003^2 (**D**) 2003×2004
(**E**) 2004^2

13. Na sliki so 3 krožnice s skupnim središčem. Širini obeh kolobarjev sta enaki polmeru najmanjše krožnice. Kolikokrat večja je ploščina osenčenega kolobarja od ploščine osenčenega kroga?

(**A**) 2-krat (**B**) 3-krat (**C**) 4-krat
(**D**) 5-krat (**E**) 6-krat

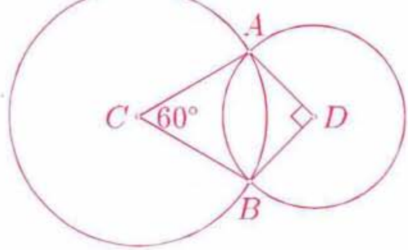
14. V učilnici je 5 otrok, vsak je na list napisal eno izmed števil 1, 2 ali 4. Katero število lahko dobimo, če zmnožimo teh 5 števil?

(**A**) 100 (**B**) 120 (**C**) 256 (**D**) 768 (**E**) 2048

15. V knjižni omari so revije, ki imajo bodisi 48 bodisi 52 strani. Katero število ne more biti skupno število strani vseh revij v omari?

(**A**) 500 (**B**) 524 (**C**) 568 (**D**) 588 (**E**) 620

16. Krožnici s središčema C in D se sekata v točkah A in B (glej sliko). Kot $\sphericalangle BCA$ meri $60°$, kot $\sphericalangle ADB$ pa $90°$. Kolikšno je razmerje med dolžino polmera večje in dolžino polmera manjše krožnice?



(**A**) $4:3$ (**B**) $\sqrt{2}:1$ (**C**) $3:2$ (**D**) $\sqrt{3}:1$ (**E**) $2:1$

Naloge, vredne 5 točk

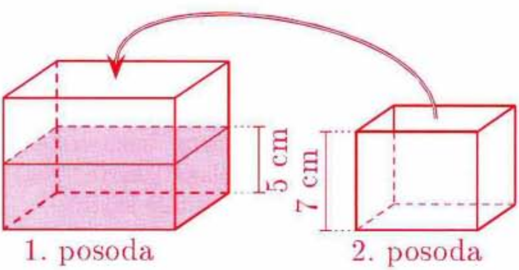
17. Za naravni števili a in b, ki nista deljivi z 10, velja $ab = 10000$. Koliko je $a + b$?

(**A**) 641 (**B**) 1000 (**C**) 1024 (**D**) 1258 (**E**) 2401

18. Maša, Natalija in Tatjana so skupaj nabrale 770 kostanjev. Dekleta so si jih razdelila v enakem razmerju, kot so bile njihove starosti. Za vsake 3 kostanje, ki jih je dobila Maša, je Natalija dobila 4 kostanje, za vsakih 7 kostanjev, ki jih je dobila Tatjana, pa je Natalija dobila 6 kostanjev. Koliko kostanjev je dobilo najmlajše dekle?

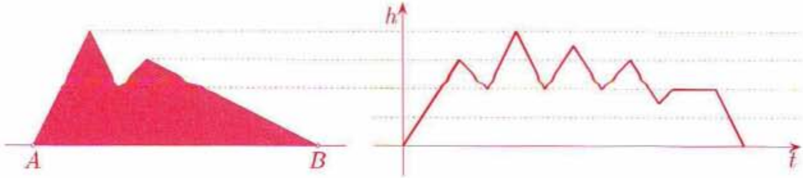
(**A**) 180 (**B**) 198 (**C**) 218 (**D**) 256 (**E**) 264

19. V 1. posodi, katere osnovna ploskev meri 2 dm^2, je gladina vode na višini 5 cm. Prazno posodo s tankimi stenami, katere osnovna ploskev meri 1 dm^2, višina pa 7 cm, položimo na dno 1. posode (glej sliko). Gladina vode v 1. posodi se dvigne in nekaj vode se prelije v 2. posodo. Koliko centimetrov nad dnom je gladina vode v 2. posodi?



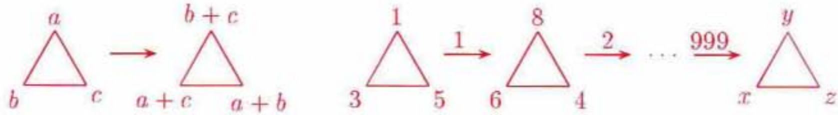
(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

20. Nejc je šel na gorsko turo, začel jo je v kraju A in končal v kraju B. Prerez gore je na levi sliki. Nekje na poti se mu je strgal nahrbtnik, zato se je moral večkrat obrniti in se vrniti po predmete, ki so mu padli iz nahrbtnika. Na desni sliki je prikazana Nejčeva nadmorska višina v odvisnosti od časa. Kolikokrat se je moral Nejc vrniti po izgubljene predmete?



(**A**) 1-krat (**B**) 2-krat (**C**) 3-krat (**D**) 4-krat (**E**) 5-krat

21. Koliko je razlika $x - y$, če upoštevamo pravila na sliki?



(**A**) $(-2)^{999}$ (**B**) -2 (**C**) 2 (**D**) 998 (**E**) 1998

22. Drago se je udeležil kviza, na katerem so mu postavili 20 vprašanj. Za vsak pravilen odgovor se mu je 7 točk prištelo, za vsak napačen odgovor sta se mu 2 točki odšteli, če pa na vprašanje ni odgovoril, ni ne dobil in ne izgubil nobene točke. Drago je na kvizu dosegel 87 točk. Na koliko vprašanj ni odgovoril?

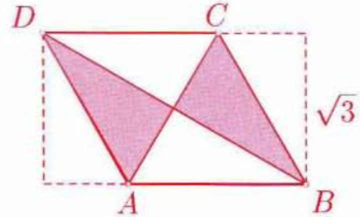
(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

23. Maruša ima 16 kart, in sicer 4 pike, 4 križe, 4 kare in 4 srca. Karte bi rada položila na preglednico tako, da bo v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu 1 karta vsake vrste. Na sliki je prikazano, kako je začela polagati karte. Na koliko različnih načinov lahko položi preostale karte?

♠			
♣	♠		
	♢		
	♡		

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 4 (**D**) 16 (**E**) 128

24. Suzana je iz papirja izrezala pravokotnik in s prepogibanjem oblikovala romb $ABCD$ (glej sliko). Koliko kvadratnih centimetrov meri ploščina romba, če je krajša stranica pravokotnika dolga $\sqrt{3}$ cm?



(**A**) 3 (**B**) $\sqrt{10}$ (**C**) $2\sqrt{3}$
(**D**) 4 (**E**) $3\sqrt{2}$

Matjaž Željko

EVROPSKI MATEMATIČNI KENGURU 2004 – Rešitve nalog s str. 364

Rešitve nalog za 6. in 7. razred devetletne in za 5. in 6. razred osemletne osnovne šole

naloga	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
odgovor	C	C	D	D	B	E	C	B	E	B	E	A

naloga	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
odgovor	D	A	A	E	B	D	D	B	A	C	D	C

Rešitve nalog za 1. in 2. letnik srednje šole, kategorija A

naloga	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
odgovor	C	E	A	C	E	D	D	D	B	C	C	A

naloga	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
odgovor	D	C	B	B	A	B	C	C	B	D	C	C

Matjaž Željko

MEDNARODNO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE

V okviru praznovanja 40-letnice obstoja *Gimnazije Franca Miklošiča Ljutomer* smo matematiki, ki poučujemo na tej šoli, pripravili mednarodno matematično tekmovanje. Skušali smo navezati stike z najbližjimi gimnazijami iz vseh štirih sosednjih držav, vendar so se odzvali le iz *Gimnazije Čakovec* (Hrvaška) in *Bundesoberstufenrealgymnasium Bad Radkesburg* (Avstrija). Konec oktobra smo se profesorji matematike iz omenjenih gimnazij prvič srečali na naši šoli in izbrali naloge ter določili, da bo vsako gimnazijo predstavljalo osem dijakov 3. in 4. letnika. Tedaj smo se dogovorili, da bodo dijaki tekmovali kot posamezniki in da bomo zbrali tudi ekipne dosežke.

Tekmovanje smo izvedli 13. novembra, in sicer pod okriljem DMFA Slovenije. Profesorji, tekmovalci in mentorji smo se zbrali na *Gimnaziji Franca Miklošiča Ljutomer*, kjer so dijaki po pozdravnem nagovoru ravnatelja, gospoda Zvonka Kusteca, dve šolski uri reševali naslednje naloge:

1. Kolikšna je vrednost izraza

$$(x-1)\left((x^{-3}+x^{-2}+x^{-1})\cdot(x^{-1}-1)-(x^{-2}-1)\cdot(x^{-2}+1)\right)^{-1}?$$

(**A**) $\frac{1}{1-x}$ (**B**) x (**C**) $x-1$ (**D**) $1+x^{-1}$ (**E**) $1-\frac{1}{x}$

2. Koliko je sodih širimestnih števil, v katerih je vsota enice in desetice enaka 4?

(**A**) 270 (**B**) 450 (**C**) 5^4 (**D**) 4^5 (**E**) 540

3. Funkcija $f(x)=1-|x|$ je:

(**A**) povsod pozitivna (**B**) povsod negativna

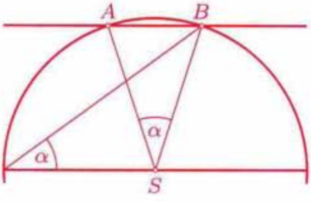
(**C**) simetrična glede na os x (**D**) simetrična glede na os y

(**E**) naraščajoča

4. Kako velik je kot α na sliki (AB je vzporedna s premerom polkrožnice)?

(**A**) 30° (**B**) 36° (**C**) 45°

(**D**) 47,5° (**E**) 15°



5. Maja je sklenila, da bo narisala 5 premic. Največ koliko presečišč imajo?

(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 9 (**D**) 10 (**E**) 15

6. Emil, Johannes, Karl in Rudolf so na igrišču igrali nogomet in po nesreči razbili šipo na oknu. Ko so primer raziskovali, so izjavili:

Emil: *"Okno je razbil Karl ali Rudolf."*

Johannes: *"Rudolf je razbil okno."*

Karl: *"Jaz okna nisem razbil."*

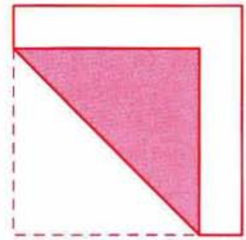
Rudolf: *"Tudi jaz ga nisem."*

Učitelj, ki je fante dobro poznal, je dejal: *"Trije izmed njih vedno govorijo resnico."* Kdo je torej razbil okno?

(**A**) Emil (**B**) Johannes (**C**) Karl

(**D**) Rudolf (**E**) nihče izmed njih

7. Kvadrat iz papirja, ki je na eni strani bel in na drugi siv, ima ploščino 3 dm^2. Prepognemo ga tako, da je pregib vzporeden z eno izmed diagonal kvadrata in da je ploščina belega vidnega dela enaka ploščini sivega vidnega dela (glej sliko). Kolikšna je dolžina pregiba?



8. Števcu ulomka $\frac{a}{b}$ $(a,\ b \in \mathbb{N})$ naj bi prišteli naravno število n $(n \neq b)$, imenovalcu pa isto število odšteli. Pri tem naj bi dobili ulomek z vrednostjo $\frac{b}{a}$. Dokaži: Če z nekim ulomkom lahko naredimo opisani postopek, potem za ta ulomek obstaja natanko eno tako število n. Katero?

9. Pravokotna trikotnika imata skupno hipotenuzo. Razlika dolžin katet prvega trikotnika je 9 cm, drugega pa 13 cm. Vsota ploščin teh dveh trikotnikov je 90 cm^2. Izračunaj dolžine katet obeh trikotnikov.

10. Maja in Žan se bosta igrala. Na kupu imata 2003 žetone. S kupa bosta izmenjaje jemala žetone. Kdor bo na potezi, bo smel vzeti 3, 4 ali 5 žetonov. Igro bo izgubil, kdor bo vzel zadnje žetone s kupa. Maja prepusti Žanu, da z igro začne. Kdo bo zmagal, če oba igrata preudarno?

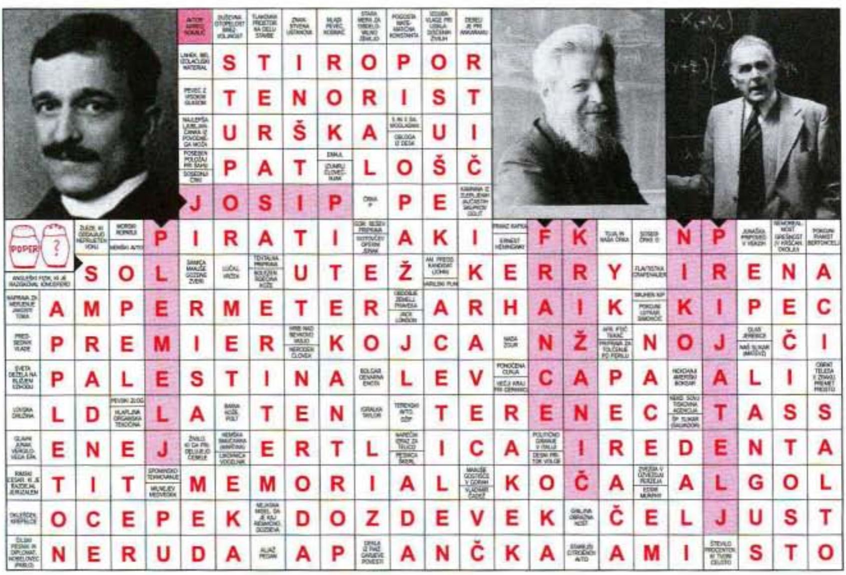
Po tekmovanju so si sodelujoči ogledali znamenitosti Ljutomera ter veliko izvedeli o zgodovini mesta in o naših rojakih. Posebej jim je bil predstavljen jezikoslovec Franc Miklošič, po katerem naša gimnazija nosi ime. Dijaki so bili zelo navdušeni, saj so se ob tej priložnosti spoznali in se med seboj pogovorili o vsem, kar jih je zanimalo. Nato so bili objavljeni rezultati tekmovanja. Prvo mesto sta si delila dva dijaka, in sicer Mateja Dokleja (*Gimnazija Čakovec*) in Boštjan Hamler (*Gimnazija Franca Miklošiča Ljutomer*), ekipno pa je zmagala *Gimnazija Čakovec* pred *Gimnazijo Franca Miklošiča Ljutomer*. Ob tekmovanju smo izdali tudi bilten, v katerem smo predstavili svoje mesto in gimnazijo, objavili naloge z rešitvami v vseh treh jezikih in rezultate tekmovanja.

Rešitve prvih šestih nalog so B, A, D, B, D, D, sedma ima rešitev 2 dm, osma $n = b - a$ (zato je opisani postopek možen le pri ulomkih $\frac{a}{b} < 1$), pri deveti so dolžine katet 16 cm in 7 cm za en trikotnik ter 17 cm in 4 cm za drugi, v igri, opisani v deseti nalogi, pa bo zmagala Maja. Naj vam bo to v orientacijo, če se boste lotili reševanja nalog.

Kljub manjšim težavam, s katerimi smo se srečali pri organizaciji in izvedbi tekmovanja, smo bili ob slovesu vsi zadovoljni. Profesorji smo sklenili, da taka druženja nadaljujemo, poskušali pa bomo pritegniti k sodelovanju vsaj še po eno gimnazijo z Madžarske in Italije. Kolegi iz Avstrije so predlagali, da bi bilo tekmovanje vsako leto v eni izmed sodelujočih držav. Posebej smo zadovoljni, ker se nam po elektronski pošti oglašajo profesorji z obeh sodelujočih gimnazij in da vezi med nami ostajajo.

Mira Babič, vodja tekmovanja

KRIŽANKA – Rešitev s str. 352



PRESEK — list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje — 31. letnik, leto 2003/04, številke 1–6, strani 1–384

MATEMATIKA

FIZIKA

RAČUNALNIŠTVO

ASTRONOMIJA

NOVICE

NOVE KNJIGE

ZANIMIVOSTI – RAZVEDRILO

NALOGE

REŠITVE NALOG

TEKMOVANJA

Matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije (pripravil Matjaž Željko)

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovorni urednici na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Uredništvo revije PRESEK, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte `Presek@dmfa.si`. Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem urednica prosi avtorja za izvorno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

PRESEK
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
31. letnik, šolsko leto 2003/04, številka 6, strani 321–384

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, 1001 Ljubljana, p.p.2964, tel. (01) 4766-553, (01) 4232-460, telefaks (01) 2517-281. Naročnina za šolsko leto 2003/2004 je za posamezne naročnike **3.600 SIT** (posamezno naročilo velja do preklica), za skupinska naročila učencev šol **3.000 SIT**, posamezna številka **900 SIT**, tematska številka **1.650 SIT**, stara številka **650 SIT**, letna naročnina za tujino **25 EUR**.
Transakcijski račun: 03100-1000018787.
Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, Ljubljana,
SWIFT: SKBASI2X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

Sponzor:

SRC.SI sistemske integracije

List sofinancira Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport
Založilo DMFA – založništvo
Tisk: DELO Tiskarna, Ljubljana

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

Nadaljevanje z II. strani ovitka.

O knjigi:

Na več kot dvesto straneh ter ob skoraj prav toliko barvnih fotografijah in risbah nam knjiga na poljuden način pripoveduje, kako se življenje na Zemlji sicer razvija v genetskih procesih, vendar se pri tem ravna tudi v skladu z matematičnimi pravili.

Knjiga ne govori le o snežinki, kot bi lahko sklepali po naslovu, pač pa o domala vseh vzorcih v naravi. Vzorci so vsepovsod: v puščavskem pesku in v kristalih, v svetu atomov in v vesolju, v molekulah DNK, opažamo jih pri živalih in rastlinah, v valovih na vodi, v mikroskopsko malih organizmih, v svetlobi v dežnih kapljicah in v mavrici, pa pri tlakovanju, zlaganju pomaranč na optimalen način in stiskanju milnih mehurčkov, v glasbi. Vsepovsod so tudi ne-vzorci – nepravilne in nenapovedljive reči: vreme, muhe, slapovi, gore, mačke.

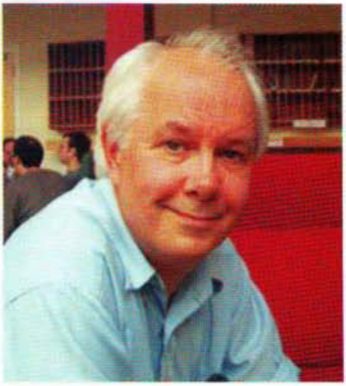
Kaj pomeni ta presenetljiva mešanica tako neverjetno različnih reči? Stewart nas približa temu vprašanju in odgovoru nanj, saj današnja naravoslovna znanost in matematika začenjata odkrivati mehanizme, ki tičijo za povsod navzočim prepletanjem vzorcev in nevzorcev. Včasih je kakšna stvar videti povsem naključna, pa vendar skriva v sebi določen red in matematika nam daje orodje za odkrivanje tega reda.

Knjigo sestavljajo trije deli, katerih skopi naslovi (Zakonitosti in vzorci, Matematični svet ter Enostavnost in zapletenost) o bogastvu vsebine ne povedo veliko. Vendar je to knjiga, ki jo preberemo na dušek in jo nato še velikokrat vzamemo v roke. Je prijazno branje, ki ti močno razširi obzorje.

V vzpodbudo bralcem, ki se boje, da je delo matematično prezahtevno, zaključimo opis knjige z zadnjim odstavkom avtorjevega uvoda:

Matematikom se zdi njihova veda skrajno lepa in polna intelektualne vsebine. Za večino ljudi pa je nekaj prav nasprotnega - sterilni svet nesmiselnega 'računanja' in nejasnih simbolov. V tej knjigi bi rad prikazal lepoto matematike, računanje pa v celoti izpustil. Še vedno bo tam zadaj; a samo znanstvenikom in matematikom je potrebno poznati krvave podrobnosti, zato jih lahko obdržim skrite za odrom, kamor spadajo. Tudi one imajo svojo lepoto, toda le za izbrani okus strokovnjakov. Lepoto matematičnih vzorcev pa lahko občudujemo vsi. Ne goljufam, ko skušam to dokazati z oblikami v naravi. Če smo pošteni, smo prav iz tega izpeljali svojo matematiko.

In o avtorju:



Ian Stewart je redni profesor za matematiko na univerzi v Warwicku v Angliji, raziskovalni matematik in plodni avtor znanstvenih, poljudnomatematičnih, interdisciplinarnih ter znanstvenofantastičnih del. Napisal je več kot šestdeset knjig, nekatere v soavtorstvu. Največje uspešnice med njimi so Does God Play Dice? (Ali Bog kocka?, 1990), Fearful Symmetry (Srhljiva simetrija, 1992), The Magical Maze (Magični blodnjak, 1997), Life's Other Secret (Druga skrivnost življenja, 1998) in Nature's Numbers (Števila v naravi, 1995).

Stewart je aktivni popularizator matematike in njene povezave z drugimi področji znanosti. Pri tem zna ta večdimenzionalni mojster sestopiti z udobnih akademskih višin, da bi lahko svojo ljubezen do znanosti delil s širokimi množicami. Ima redne oddaje po televiziji in radiu ter piše članke za številne revije, med njimi Nature in New Scientist. Deset let je bil odličen kolumnist pri reviji Scientific American za področje matematične rekreacije. Leta 1995 je za velik prispevek k splošnemu razumevanju znanosti prejel Faradayevo medaljo, ki jo podeljuje Royal Society, najstarejša angleška akademija znanosti, in bil izvoljen za člana te ustanove.

Stewartova najnovejša knjiga Flatterland je tik pod vrhom Independent Best Seller List, ameriške neodvisne top lestvice uspešnic stvarne literature. Delo je nadaljevanje knjige Edwina Abbotta Flatland (Ploska dežela), o kateri je Presek pisal pred leti.[1] Stewart je tudi avtor nedavno izdane komentirane različice Flatlanda, ki so jo občudovalci originala zelo dobro sprejeli.

Stewart sam pravi, da posveča velik del svojega časa popularizaciji matematike, ker pri tem uživa in ker meni, da je stvar vredna truda. Ugotavlja namreč, da je on sam postal matematik predvsem zato, ker ga je za matematiko še kot fantiča navdušila kolumna Martina Gardnerja 'matematične igre' v Scientific American.

Marija Vencelj

[1] Marija Vencelj: Tridimenzionalne težave gospoda Ploščaka, Presek XXIII, str. 257–263.