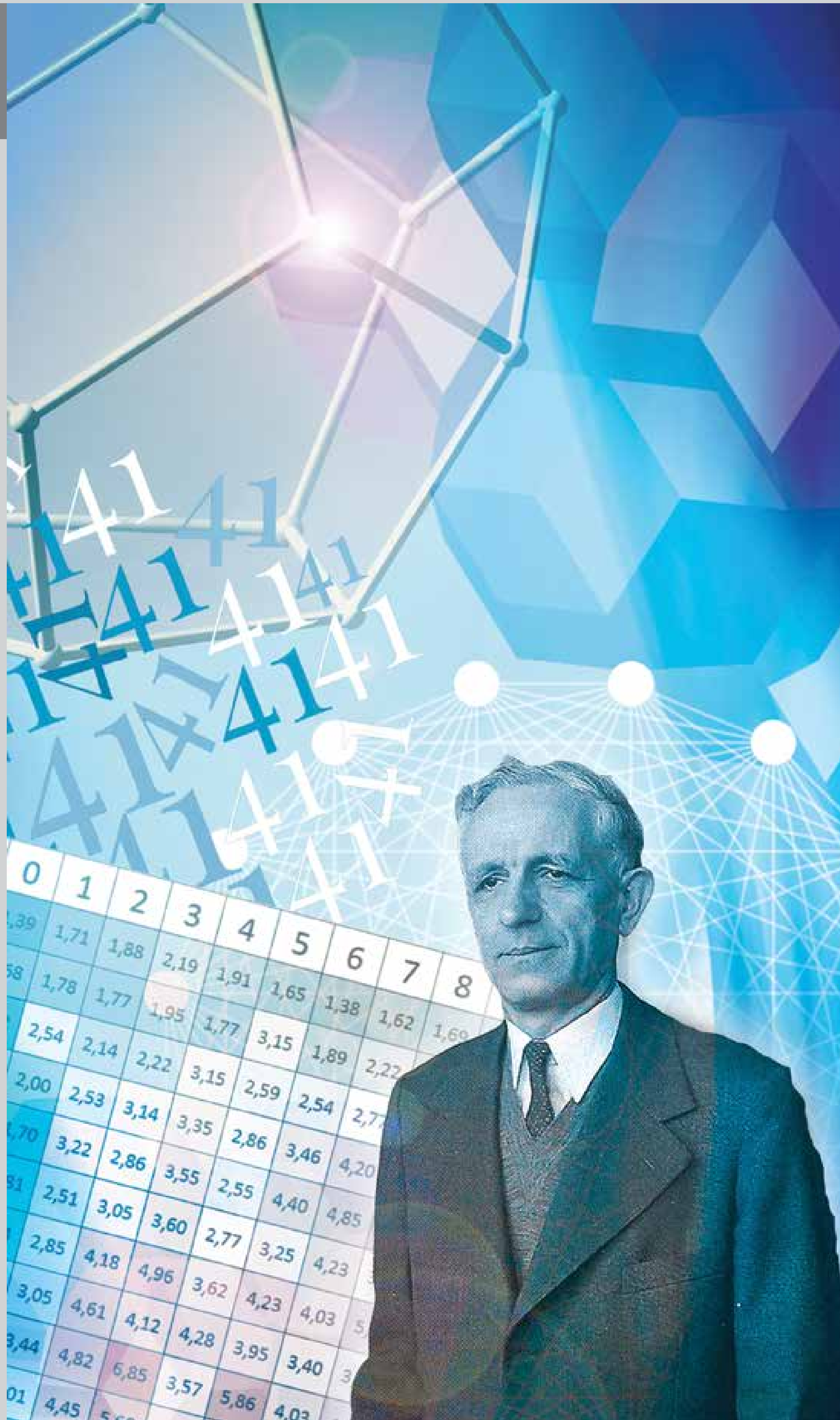
Matematika v šoli

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

2018, letnik 24

1



IZ TEORIJE ZA PRAKSO:

Povratna informacija – pomemben element poučevanja

IZ RAZREDA:

O poštevanki

MATEMATIKA SKOZI ZGODOVINO:

O dr. Ivanu Vidavu

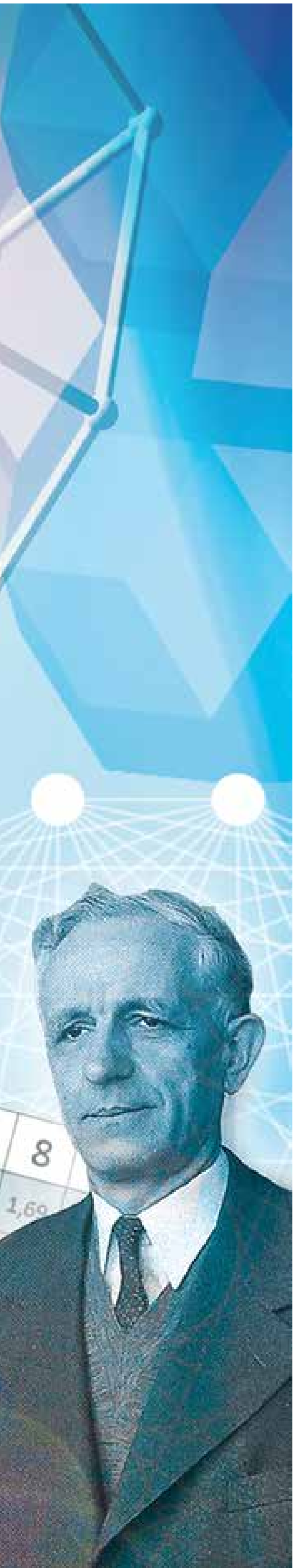
NOVICE:

Dogajalo se je v Hermanovem brlogu v Celju

Zavod Republike Slovenije za šolstvo

Matematika v šoli

2018, letnik 24 1



VSEBINA

Spoštovani bralci revije Matematika v šoli!

V številki revije Matematika v šoli, ki je pred vami, lahko beremo o povratni informaciji, ki je eden od pomembnih dejavnikov uspešnega učenja in dobrega poučevanja. Kakšna je vloga in pomen povratne informacije za učenje in poučevanje matematike? O tem lahko beremo v uvodnem članku revije. Učenec s kakovostno povratno informacijo dobi sporočilo, do kod je prišel v procesu učenja, spodbudila naj bi ga k iskanju napak in ponudila možnosti za odpravljanje le-teh. Kako gledati na formativno spremljanje kot na model pomoči za ozaveščanje procesov učenja, nam pokažeta dva članka iz osnovnošolskih in srednješolskih klopi, kjer imamo predstavljenih več različnih orodij, ki jih uporabljajo učitelji pri poučevanju.

Tudi Pika Nogavička se je odločila in šla z Anico in Tomažem v šolo. Pa ne zato, da bi se učila in naučila »upoštevanke«, ampak zato, da bi imela počitnice. Bilo ji je odveč učenje računstva. Učiteljici je na vprašanje: »No povej, ali mi lahko poveš, koliko je 7 in 5?« odgovorila: »Če pa tega sama ne veš, nikar ne misli, da ti bom jaz povedala.« Takega odgovora ne obravnava prispevek o poštevanki, zato ob njegovem branju lahko razmišljamo o samem procesu učenja razumevanja množenja in avtomatizacije poštevanke. Iz članka je razvidno, kako pomembna je kakovostna povratna informacija, kjer so učitelju v največjo pomoč pogoste učenčeve napake.

Letošnje leto mineva 100 let rojstva dr. Ivana Vidava, ki je poleg svojega znanstvenoraziskovalnega dela pustil velik pečat tudi na pedagoškem področju. Napisal je večje število knjig in člankov za učitelje in študente matematike. V čast našemu matematiku smo na 4. mednarodni konferenci o učenju in poučevanju matematike v Laškem pripravili razstavo, na kateri so sodelovali učenci z izdelki, ki so jih pripravili ob podpori svojih učiteljev mentorjev.

V uvodnem članku beremo, da je uspešnost izobraževanja odvisna od znanja učitelja, njegovih prepričanj o svoji stroki in poučevanju ter o njegovih šolskih izkušnjah. Zato ste povabljeni k branju in pisanju novih strokovnih člankov.

mag. Mateja SIRNIK, *odgovorna urednica*

Mateja Sirnik

ISSN 1318-010X
MATEMATIKA V ŠOLI
letnik XXIV, številka 1, 2018

Izdajatelj in založnik: Zavod RS za šolstvo
Predstavnik: dr. Vinko Logaj

Jezikovni pregled: Katja Križnik Jeraj
Prevod povzetkov v angleščino: Ensitra prevajanje, Brigita Vogrinec, s. p.
Urednica založbe: Andreja Nagode
Oblikovanje: Simon Kajtna
Fotografije: avtorji člankov in foto dokumentacija uredništva
Računalniški prelom in tisk: Design Demšar, d. o. o., Present, d. o. o.
Naklada: 520 izvodov

Prispevke pošljite na naslov:
Zavod RS za šolstvo, OE Kranj (za revijo Matematika v šoli), Stritarjeva 8, 4000 Kranj, e-naslov: mateja.sirnik@zrss.si
Naročila: Zavod RS za šolstvo – založba, Poljanska cesta 28, 1000 Ljubljana, faks: 01/30 05 199, e-naslov: zalozba@zrss.si
Letna naročnina (2 številki): 22,00 EUR za šole in ustanove, 16,50 € za fizične osebe. Cena posamezne številke v prosti prodaji je 13,00 EUR.

Revija Matematika v šoli je vpisana v razvid medijev, ki ga vodi Ministrstvo za kulturo, pod zaporedno številko 568. Revija je indeksirana in vključena v mednarodne baze podatkov: MathEduc – Mathematics Education Database, Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik (ZDM), Co-operative Online Bibliographic System and Services (COBISS)

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

Povratna informacija – pomemben element poučevanja

Silva Kmetič
silva.kmetic@guest.arnes.si

Povzetek

Predstavljen je pomen povratne informacije za poučevanje in nekateri od številnih dejavnikov, ki vplivajo na učinke pouka. Osredotočimo se na kakovost povratne informacije, ki izhaja iz natančne analize rezultatov, ki razkrije stopnjo znanja, način razmišljanja in dejanske vzroke za morebitne napake. Zato lahko učitelj presoja o nadaljnjih korakih in izostri usmeritev učencu tako, da si ta lahko ustvari in izoblikuje lastno znanje in izkušnjo. Omenimo tudi učiteljev vpliv prepričanj in odnosa do matematike, poučevanja in učenja.

Ključne besede: povratna informacija, učni trenutki, pojmovne zmote, analiza, prepričanja

Feedback – an Important Teaching Element

Abstract

The article focuses on the importance of feedback in teaching and some of the many factors affecting performance in class. The quality of feedback is discussed that is the product of a precise results analysis revealing knowledge level, way of thinking and actual causes of potential errors. This allows teachers to decide on the next steps and enhance learner-centered focus in a way that allows learners to create and develop their own knowledge and experience. The influence of the teacher's beliefs and attitudes to mathematics, teaching and learning is also presented.

Keywords: feedback, teachable moments, misconceptions, analysis, beliefs

Uvod

V preglednem prispevku o formativnem spremljanju pri matematiki (Sirnik, Suban, 2017) je predstavljena ideja poučevanja in učenja celostno ter po posameznih korakih. Ti naj bi pomagali učitelju pri načrtovanju učinkovite učne poti, ki se potrjuje s kakovostjo doseženega znanja.

Ponovili bomo nekatere definicije didaktičnih pojmov, da lahko bralec razume osnovne ideje, če jih morda še ni srečal. Opišimo pojem formativno spremljanje (vrednotenje, preverjanje). Beseda formativen pomeni izgrajevalen pouk, ker v tem procesu učitelj usmerja učenje tako, da učenec[1] oblikuje znanje, pridobiva izkušnje in napreduje. Učitelj in učenec sta partnersko in interaktivno povezana. *Učenje vpliva na poučevanje in obratno, torej (pred)znanje in izkušnje učenca ciklično vplivajo na poučevanje, to pa znova na učenje …* Sprotna spremljava znanja, napredka, zmot in težav je povratna informacija učitelju in učencu. Učitelj kot strokovnjak krmari in usmerja s svojim poukom učenje razreda in posameznikov. Znak dobre interakcije je učiteljev odziv z drugačnim poukom in/ali ustrezno usmerjevalno povratno informacijo učencu. Osredotočeni bomo bolj na učitelja, na njegovo analizo znanja, odločanje ter krmarjenje pouka, z zavedanjem, da se učenje dogaja »v učencu«.

Če pričnemo s krogom petih ključnih korakov formativnega spremljanja (1. namen, cilji in kriteriji, 2. priprava, načrtovanje in izvajanje dejavnosti, 3. zbiranje podatkov in dokazil za povratno informacijo in vzročno odločanje, 4. vrstniško učenje, 5. samouravnavanje učenja, samopreverjanje), povejmo, da so značilni za premišljen pouk *in da je vsak od njih proces in ne le nekajkratno dejanje.* Formativno spremljanje je model pomoči za uzaveščanje in sistematiziranje poučevanja in učenja, kar vidimo v sistematičnosti korakov, prepletanju opazovanja, analiziranja, refleksij, dokazil in v interaktivnosti med učencem in učiteljem.

Ključna tema prispevka je povratna informacija kot pomemben parameter dobrega poučevanja in uspešnega učenja. Ker je poučevanje in učenje kompleksen proces, se bodo vpletali tudi nekateri drugi koraki »kroga formativno spremljanje«.

Za uspešno poučevanje[2] je pomemben tudi osebni odnos in osebno pojmovanje učitelja o matematiki, poučevanju in učenju,

1 Beseda opredeljuje učenca ali dijaka ne glede na spol.
2 Analogno velja za učenje.

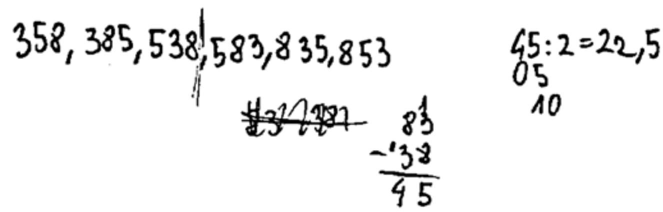
zato bomo namenili nekaj besed tudi temu. Pojmovanja so običajno nezavedni vzvodi naših odločitev, zato je koristno, da se jih poskušamo zavedati ter jih obvladovati in presegati pri odločanju o izvajanju pouka.

Znanje in prepričanja učitelja

Uspešnost izobraževanja je po izsledkih teoretikov odvisna od znanja učitelja, njegovih prepričanj o svoji stroki in poučevanju ter o njegovih šolskih izkušnjah (Askew in drugi, 1997: 22). Raziskovalki Lipovec in Antolin (Lipovec in Antolin, 2010) predstavita pojem matematične identitete kot vsoto posameznikovih prepričanj o svojih lastnostih/značilnostih (attributes) v povezavi z matematiko. Nadalje lahko preberemo, da je pomembno učiteljevo razumevanje vsebine njegovega predmeta in poznavanje pedagoške stroke. Razumevanje vsebine npr. vpliva na to, kaj poudarjamo pri pouku in katerim vsebinam posvetimo več časa in jih obravnavamo bolj poglobljeno. Ob ustreznem razumevanju pojmov učitelj lažje pripravi nabor dejavnosti, predvsem alternativnih, za učence, ki pojmov ali postopkov ne razumejo. Pedagoško znanje pa omogoča povezovanje strokovnih komponent, vsebine in didaktike, z vidika organizacije vsebin, s prilagajanjem potrebam in zmožnostim skupine ali posameznika. Na pedagoško prakso vplivajo tudi učiteljeva prepričanja (Ernest 1991, Askew 1997, Pehkonen in Furingheti 2002). Prepričanja so neke vrste nezavedno znanje posameznika in se nanašajo na vsebino, učenje in poučevanje. Torej vsak učitelj lahko gleda tudi na pomen matematike kot stroke drugače. Prepoznamo značilne pojmovne skupine, npr. platonisti, humanisti, formalisti … (več v Ernest, 1991), podobno velja za učenje in poučevanje (Požarnik, 2000). Učitelj je prepričan, da ve, kaj je najbolje za učenca, kako mu nekaj razložiti in kako naj se učenec uspešno uči. Na podlagi prepričanj lahko prevlada interpretacija napake učenca, npr. kot brezbrižnost, površnost, premalo dela ali pozornosti, zavzetosti za predmet … Mesto vzroka, lokus, je zunaj učitelja, torej poučevanja (teorija pripisovanja vzrokov). Razen tega si učitelj ustvari splošno mnenje o učencu in njegovem znanju, zato lahko na presojo vpliva tudi pisava, oblika, učitelj je lahko pod učinkom kontrasta, včasih prevlada prvi vtis … Če pa učitelj ravna sistematično in spremlja ter analizira dosežke otrok in zbira dokazila o znanju, bo morda spremenil ali dopolnil svoja prepričanja in odkril dejanske vzroke za neko stanje kot npr. napačne ali nepopolne pojmovne predstave ali celo za kognitivni konflikt, ki zavira pravilni nadaljnji razvoj pojma.

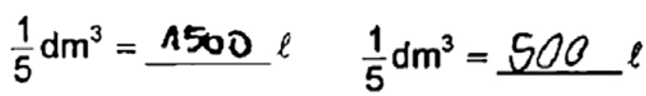
Primer zapisane asociacije v zvezi z matematiko:
Učenka je zapisala: rdeča barva. Možna interpretacija te nenavadne in nepričakovane asociacije je popravljanje napak z rdečo in sklep, da so izdelki učenke pogosto rdeči, torej polni napak ali pa asociacija signalizira strah pred napakami. Učenka je kasneje v pogovoru razložila, da je zapisala barvo zato, ker vsako novo temo pri matematiki zapiše z rdečo. Torej njena asociacija ni povezana s strahom in napakami, ampak je pozitivna ali vsaj nevtralna. Napačne oz. in nepreverjene interpretacije opaženega so lahko ovira pri učiteljevi podpori v procesu učenja.

Primera pojmovnih napak in razkrivanje vzrokov za napačno usvojenost:
Posamezni učenci presenetijo s konstrukcijo napačnih ali nepopolnih pojmovnih predstav (sliki 1 in 2). Ob takšni ugotovitvi se učitelj, ki napako pripiše premalo učenju, odziva drugače kot tisti, ki poskuša najti vzrok v učenčevi kognitivni strukturi znanja. V primeru na sliki 1 gre za popačen priklic, ki je posledica predelave pojma in zapomnitve mediane brez razumevanja. Morda manjka tudi korak presoje rezultata (Ali je lahko mediana manjša od vsakega števila v naboru podatkov?).



Slika 1: Mediana (22,5) kot polovična razlika osrednjih dveh števil. (Naloga 8d, NPZ 2017 za 9. razred)

V primeru na sliki 2 učenca nimata predstave o količinah 1 dm³ in 1 l, zato sta merski števili 1500 in 500 povsem nesmiselni. Morda je predstavo o merskih enotah porušil pojem ulomka ali instrumentalna zapomnitev »pretvarjanja« ali bolje izražanja količin z različnimi merskimi enotami.



Slika 2: Učenec nima predstave o količinah 1 dm³ in 1 l. (Naloga 2f, NPZ 2017 za 9. razred)

Za opisane primere pojmovnih napak ne izhajajo vzroki iz ciljev ali kriterija, napačne predstave je ustvaril posamezni učenec v spletu učnih okoliščin.

Novi in stari pojmi

Novi pojmi naj bi izhajali iz predhodnih pojmov oz. se povezali s predhodnim znanjem in izkušnjami učenca, zato je pomembno sistematično preverjanje pojmovnih predstav pred nadaljnjim razvojem navezujočih se pojmov, posebej kompleksnejših, ki jih razvijamo daljše obdobje. Pri tem se ne sme pozabiti na intuitivne (neformalno ustvarjene) pojmovne predstave in intuitivne procedure, ki jih mora učenec povezati in nadgraditi v vse bolj abstrakten matematični pojem. Ko preverjamo usvojenost in razumevanje pojmov, dobimo v istem razredu različne razlage učencev, kljub temu da so vsi izvajali iste dejavnosti pod vodstvom svojega učitelja[3]. Ko učenci formirajo pojmovno predstavo, so nekatere ustrezne, nekateri učenci pa ustvarijo napačne ali nepopolne. Pojmovna predstava se lahko iz leta v leto razvija in bogati, lahko pa se tudi popači oz. neustrezno preoblikuje. Ne smemo tudi pozabiti, da se pojmi z istim imenom pojavljajo tudi v matematiki, pri drugih strokah in v realnem življenju. Izbrana beseda lahko opredeljuje isti pojem na različnih področjih in v

3 Zgodi se, da se učitelji ukvarjajo z osebno odgovornostjo za različnost, napačnost ali nepopolnost pojmovnih shem, čeprav gre za povsem običajen individualni spoznavni pojav.

različnih kontekstih, nekatere pa določajo različne pojme. V preglednici 1 je zbranih nekaj primerov. Učencu se lahko zgodi, da ne bo ustrezno »pojmovno prehajal« med isto poimenovanimi pojmi glede na kontekst ali področje obravnave.

Preglednica 1: Različni pomeni istih besed

Matematika	Življenje
Obseg lika	Obseg glave, pasu, dolžina ograje, dolžina meje …
Računamo v obsegu števil do 100 s pomenom 'računamo s števili do 100'	Obseg učne snovi, knjige … Območje obsega, npr. 2 ha gozda
Obseg kot algebrska struktura (naravna in cela števila niso obseg, kar pomeni, da obstaja inverzni element)	
Ploščina	Obseg parcele, zemljišča, gozda, občine …
Poltrak	Trak, okrasni, zelen, dolg, kratek, širok …

Vrnimo se k predznanju, ki ga lahko delimo na formalno in neformalno. Formalno je pričakovano znanje po učnem načrtu in letni pripravi učitelja, neformalno pa je pridobljeno na osnovi izkušenj iz življenja izven šole. Nekateri ga imenujejo tudi intuitivno. Beseda za pojem obseg se pogosto uporablja v življenju in na drugih strokovnih področjih. V preglednici 1 se v nekaterih primerih izkušnja z obsegom dobro povezuje z matematičnim pojmom, v drugih pa ne. Zato je zelo pomembno vsaj za ključne pojme preverjati, kaj vse se skriva za določeno besedo v pojmovnih predstavah učencev. Za primer neformalno pridobljenega znanja navedimo npr. pojem črta, iz katerega v šolski matematiki izpeljemo pojem premica. Črta je po izkušnjah otrok rdeča ali zelena, debela, tanka, kratka, dolga, prekinjena, črtkana, pikčasta, ukrivljena[4], ravna, lomljena … v učbenikih za 5. razred pa npr. »neomejeno dolgo rastoča daljica«, neomejena ravna črta ... Za ilustracijo navedimo še besedo za geometrijski pojem kot, ki ga učenci poznajo kot kot v sobi, dosojeni kot pri nogometu, mrtvi kot pri upravljanju vozila in kot primerjalni veznik. Tudi kombinacija številk na ključavnici ni matematični pojem kombinacija. Torej novo naj bi izhajalo iz dejanskega formalnega in neformalnega znanja, kar preverimo v ustreznem *učnem trenutku*.

Učni trenutki

Učni trenutek (teachable moment) opredelimo kot istočasen ali takojšnji odziv na učenčev odgovor. Odziv je lahko komentar ali predlog, vprašanje ali dejavnost, ki se nanaša na učenčev odgovor, z namenom, da ga učenec dopolni, spremeni oz. izboljša razumevanje pojma, kar pomeni poveže s predhodnimi pojmi, primerja, enači, abstrahira in ločuje (Muir, 2008: 79). Primeren učni trenutek je trenutek, ko bo učenec pridobil za učenje največ. Učni trenutek[5] je nenačrtovana učna situacija, v kateri lahko učenec izboljša razumevanje pojma. Torej so učni trenutki del učnega procesa, ki jih izkoristi učitelj v sprotni interakciji z učenci. Raziskave (Askew in drugi, 1997; Muir 2008) so pokazale viden napredek v kakovosti znanja pri učencih učiteljev, ki so zaznali učne trenutke in se odzvali z ustreznimi dejavnostmi, napotki in vprašanji za učenca(e).

Lahko pa učitelj poskuša učne trenutke sprožiti načrtovano, predvsem v učnih situacijah, kjer lahko predvidevamo kognitivne konflikte (Kmetič, 2013). Nekatere že poznane učne trenutke lahko izzovemo z ustrezno učno situacijo za razred ali posameznega učenca.

Kako lahko še ustvarimo učni trenutek?

Preverjanje predznanja je situacija, v kateri bodo nastala različna izhodišča za učne trenutke v fazi, ko da učitelj učencu povratno informacijo takoj ali pa kasneje v ustrezni obliki.

Ob tem razložimo še razliko med *ugotavljanjem in aktiviranjem predznanja*. V procesu učenja je pomembno ugotavljanja predznanja. To je ugotavljanje znanja (bistvenih pojmov in postopkov), torej pojmov, ki so potrebni za nadaljnjo izgradnjo pojmov. Ugotovljeno predznanje je namenjeno načrtovanju zapolnitve vrzeli v znanju razreda ali posameznih učencev. Aktiviranje predznanja pa je del motivacije ali mobilizacija pojmov in veščin, ki pomembno vpliva na dosegljivost morda 'oddaljenih' ali 'odloženih' pojmov. Aktiviranje predznanja se običajno izvede neposredno pred vpeljavo novega pojma, ugotavljanje predznanja pa mora biti časovno načrtovano tako, da učenci lahko zapolnijo vrzeli oz. rekonstruirajo napačne pojme sami ali z napotki učitelja.

Povratna informacija in sporočanje

Bistvo povratne informacije je vedenje o znanju učencev, predvsem za učitelja in nato za učenca. Povratna informacija razkrije učitelju in učencu, kaj zna in česa ne ter razkrije razloge, zakaj je učenec storil napako. Sporočilo ali bolje učni napotek pa učenca usmeri, da sam ali s podporo in usmerjanjem učitelja pravilno 'pregradi' ali 'dogradi' pojem oz. svoje veščine reševanja. Učitelj se na ugotovljeno znanje odzove s pripravo in organizacijo učnih dejavnosti za razred ali za posameznika, z vprašanji ali sporočili kot so napotki za učenje. Sporočanje učencem ima tudi motivacijsko vlogo. Če je učitelj ugotovil primanjkljaje v znanju večine učencev, se dejavnosti pripravijo za razred. To pomeni učne ure, v katerih se dopolnjujejo neustrezno ali pomanjkljivo usvojeni pojmi. Če pa gre za raznolike posamezne primanjkljaje, lahko učitelj vključi učence tako, da jim sporoča o doseženem znanju in/ali jih usmerja v nadaljnje učenje individualno. V primerih velikih pojmovnih primanjkljajev je treba organizirati individualne ali diferencirane dejavnosti. Usmeritve naj ne bi bile površinske, splošne ali receptualne (v obliki »recepta«), ampak naj

4 Pogosteje kriva črta. Mlajši otroci, ki poosebljajo stvari in pojme lahko razumejo kot biti slab, napačen …
5 Pojem učni trenutek se povezuje s fizikom Robertom Havighurstom (Human Development and Education, 1952), ki se je ukvarjal z izobraževanjem.

bi spodbujale razmišljanje (Wiliam, 2013). Nekateri pri povratni informaciji izhajajo iz ciljev in kriterijev (Primeri v preglednici 2). Takšna povratna informacija je površinska (instrumentalna), ker ne izhaja iz poglobljene analize znanja in se ne odziva na morebitne kognitivne primanjkljaje. *Cilji in kriteriji so pomemben del za načrtovanje pouka in učenja matematike.* Procesa poučevanja in predvsem učenja sta tako zapletena, da se znanja ne more evalvirati samo na osnovi seznama ciljev, včasih samo iz učnega načrta, in kriterijev, ki morda niti ne izhajajo iz premišljeno izbrane taksonomije (Marzan, Bloom, SOLO, van Hiele …) in so konkretizirani na vsebinski sklop ter razvojno stopnjo učencev.

Dosežene točke, ki so tradicionalna povratna informacija, lahko povedo stopnjo dosežka na neki merilni lestvici, analiza posameznih izdelkov pa razkrije več že v primeru, če samo ločimo izvedbene od strukturnih oz. pojmovnih napak.

Problem povratne informacije je tudi lahko v učiteljevi predpostavki, da se učenec zaveda, da ne zna, predvsem pa, da ne razume. Ko gre za napačne ali nepopolne pojmovne predstave, se lahko zgodi, da povratna informacija ne bo učinkovita, ker v dani okoliščini učenec ni uzavestil pomanjkljivosti svojega razmišljanja. Drugače je v primeru 'površinskih', torej slučajnih ali izvedbenih napak.

Primer:

Izračunaj: 138°32′ – 69°48′ = ____________.

Preverjani cilj po učnem načrtu: *pretvarjajo* večimenske kotne enote v istoimenske in obratno ter *računajo z njimi* (Naloga 2d, NPZ 2017, 9. razred, dosežek 15 %). Preverjani cilj glede na nalogo: Zna odštevati večimenske kotne meritve.

Iz nedoseženega cilja izhaja naslednja povratna informacija: *ne znaš računati z merami kotov, če so enote večimenske*. Za primere napak v preglednici 2 je ta informacija presplošna in ne moremo pričakovati, da se bodo vsi neuspešni učenci na podlagi tega sporočila naučili računati z njimi, kaj šele, da jih takšno sporočilo motivira za učenje.

Na primeru tridesetih učencev je bil prvi napačen rezultat v preglednici 2 najpogostejši. Izziv za učitelja (državo) je ugotoviti, zakaj so učenci v tako velikem odstotku 'pozabili', da je pretvornik med stopinjami in minutami 60. Ali je razlog časovni odmik uporabe pojma oz. postopka ali pa kognitivni konflikt, ker v primeru merjenja kotov ni pričakovanega 'desetiškega vzorca'? Ali morda ni splošnega razumevanja mestno vrednostnega zapisa števil, ki pa je v tem primeru specifičen[6].

Merjenje s kotnimi enotami lahko razumemo, lahko pa si zapomnimo pretvarjanje in računanje na instrumentalni ravni. O tem bo premislil učitelj in njegova odločitev je morda odvisna tudi od posameznega učenca. Učenec strategijo »večje minus manjše« lahko uporablja sistematično in ne samo v prikazanem primeru. Zato je za končno presojo potrebno nadaljnje diagnosticiranje. Zadnja napaka je slučajna, računska, torej ni povezana z deklariranim ciljem. Učenca pa lahko spodbudimo, da »pretvarja obratno«, število minut v število stopinj in število minut, torej nalogo

Preglednica 2: Tri napake: pojmovna, proceduralna, nepopolna proceduralna, morda izvedbena napaka

Primeri z napakami, 9. razred		Opis napake
138°32' – 69°48' = 68°84' 138°32' – 69°48' = 105°84' 138 32 − 32 1 48 = 105°84'	N1 N2	Učenca računata v desetiškem sistemu, v drugem primeru je prisotna še slučajna napaka pri prepisu.
138°32' – 69°48' = 68°16'	N3	Uporabljena strategija odštevanja 'večje minus manjše'.
138°32' – 69°48' = 4224' 8312' – 4188' 8312 − 4188 = 4224 4224 : 60 = 70,4 240 138 · 60 = 8280, + 32 = 8312 69 · 60 = 4140, + 48 = 4188	N4	Slučajna izvedbena napaka v odštevanju. Razume bistvo zapisa kotnih mer, ne zna zapisati desetiškega merskega števila s šestdesetiškim.[7]

6 V okviru iste merske enote je desetiški, v »prehodih« med enotami pa je šestdesetiški odnos.

7 Primanjkljaj je izkazan kot posledica izbire postopka. Samo v tem primeru vidimo, da učenec ne zna zanesljivo pretvarjati enoimenskih enot v večimenske. Cilj v učnem načrtu doda še uporabo računala (pretvarja večimenske kotne enote v istoimenske in obratno ter računa z njimi (tudi z uporabo žepnega računala)).

dokonča, ali pa izvede odštevanje merskih števil še na drugačen način.

S temi primeri smo želeli ilustrirati, kako pomembni sta za uspešno učenje kvalitativna analiza rezultatov in strokovna presoja učitelja o nadaljnjih korakih učenja.

O posamezni povratni informaciji razpravljamo drugače, ko vidimo napako in poznamo učenca. Za nekatere učence je morda tudi ob pojmovni zmoti dovolj samo namig, če ga je učenec sposoben sprejemati in predelati. Poglejmo si nekaj možnosti za primere v preglednici 3.

Povratna informacija oz. usmeritve in dejavnosti za učenje so uspešnejše, če izhajajo iz dejanskega in ne pričakovanega oz. privzetega znanja učenca in niso usmerjeni v osebo ampak v nalogo. Učinkoviti odzivi učitelja sporočajo učencu, ne samo kaj je treba znati, ampak tudi kako oz. ga usmerijo v razmišljanje.

Učinkovita povratna informacija učenca usmeri v učenje, ki mu omogoči, da sam razvije oz. dopolni razumevanje pojma ali postopka. Če učitelj pove posameznemu učencu preveč, lahko to pomeni najmanj dvoje: učenca prikrajša za možnost, da sam na svoj način poveže in dogradi pojmovno predstavo, razvije strategijo, ugotovi in dojame napako, ali drugo, da je preprosto učiteljevih informacij preveč, da bi jih učenec lahko razumel, to pomeni sledil, povezoval, izgrajeval …

Pri kompleksnejših pojmovnih napakah je treba cikel odpravljanja primanjkljajev na osnovi zbranih dokazil večkrat ponoviti in načrtovati dejavnosti skozi daljše obdobje, jih izvajati in kontinuirano spremljati.

Primer: Obseg in ploščina lika

Obseg in ploščina lika se izgrajujeta postopoma, od merjenja realnih objektov in modelov, do razvoja in uporabe formul.

Z različnimi zaprtimi in odprtimi vprašanji smo ugotavljali razumevanje pojmov obseg in ploščina. V eksperiment je bilo vključenih 122 učencev od 6. do 9. razreda z različnih šol. Ugotovili smo, da sta najpogostejša prototipa obeh pojmov računska operacija in formula. Za obseg je prototip seštevanje, za ploščino pa množenje. Prototipa likov pa sta pravokotnik in kvadrat. Vsi prevladujoči prototipi se pojavljajo v vseh razredih od 6. do 9. Rezultat analize izdelkov je dal izhodišče za nadaljnjo obravnavo teh pojmov v vsakem od razredov.

Zbrane ugotovitve (dokazila) o znanju in težavah otrok po analizi so učitelju kažipot, po katerem lahko argumentirano načrtuje in hkrati tudi sledi napredku učenca.

Na začetku 6. razreda smo v večini razredov ugotovili, da pojem ploščine ni usvojen glede na cilje učnega načrta v 5. razredu, natančneje, usvojen je napačno oz. redko nepopolno, npr. zgolj kot pravilna ali celo napačna formula. Pravilno reproducirane formule, ki ni cilj 5. razreda, učenci na začetku 6. razreda ne razumejo. Učitelji teh razredov morajo razvijati pojem ploščine od začetka in kar je še težje, odpravljati napačne predstave. Torej učenci znajo meriti dolžine in obseg in izračunati obseg. Nato ob smiselni motivaciji zastavimo vprašanje, kako bi izmerili ploskev in kaj sploh pomeni meriti ploskev. Učitelj se mora zavedati, da ne more graditi novih zaključkov na predpostavkah o pričakovanem znanju, ampak na dejanskem znanju.

Preglednica 3: Primeri sporočanja učitelja – povratna informacija z napotki in namigi

Sporočila	Značilnosti sporočila
Tega še ne znaš dobro.	Splošna, šibka povratna informacija, praviloma ne motivira. Primerna za vse 4 napake.
Ne znaš odštevati večimenskih enot.	Ne vključuje vzroka, sporočilo izhaja iz cilja in zgolj iz napačnega rezultata. Napaka morda ni značilna samo za računanje z večimenskimi kotnimi enotami. Primerna za vse 4 napake.
Upoštevaj, da je 1° = 60'	Namig lahko zadošča, če je napaka slučajna. Primerna za napaki N1 in N2.
Izračunaj: 32 – 48, 132 – 48, 432 – 48, 1° – 48', 1°32' – 48'	Diagnostična in morda usmerjevalna za napako 'večje minus manjše'. Primerna za napaki N3.
Poglej merjenje kotov v zvezku in v učbeniku …	Usmerjevalna, vendar splošna, v določenem primeru lahko ustrezna. Primerna za vse 4 napake.
Oceni rezultat	Usmerjevalna za rezultat N2.
Oceni rezultat in poišči računsko napako. Zapiši deljenje kot deljenje z ostankom. Izračunaj na 2 načina in primerjaj ekonomičnost računanja …	Računsko je naloga po tretjem postopku zahtevna, ker je količnik periodična decimalna števila. Za lažji izračun števila minut je bolje deljenje zapisati kot 4124 : 60 = 4080 : 60 + 44 : 60 = 68 + 44 : 60 Primerna za napaki N4.

8 Med merjenjem obsega in računanjem obsega (z uporabo formule) je večji razvojni razkorak zaradi pojma podatki, ki lik določajo, in posplošitve podatkov v spremenljivke.

Vrnimo se k pojmu obseg lika. Učenec naj bi imel pravilno predstavo o pojmu, kar vključuje razumevanje pojma, zna razložiti, kaj je obseg, ga zna izmeriti, oceniti in izračunati, npr. z uporabo formule, ki jo prav tako razume[8] oz. jo zna sam izpeljati. Navedimo še primer razumevanja pojma obseg učenca 5. razreda. Razumevanje izraža s svojo »notranjo predelavo« pojma: *Obseg lika je, da zložiš vse stranice v ravno črto in izmeriš, koliko je dolga.*

Pri razpravljanju o povratni informaciji bomo najprej izhajali iz kriterijev. Predpostavimo, da smo skupaj z učenci zapisali kriterije za različno kakovost znanja (od reprodukcije do uporabe v novih situacijah, matematičnih in realnih ter razreševanja zaprtih problemov v povezavi s pojmom obseg do raziskovanja odprtih problemov, v katerih nastopa pojem obseg).

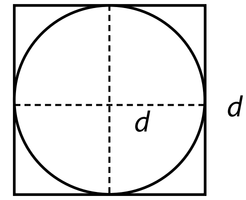
Izberimo najtežji vidik vsakega znanja, razumevanja pojma: razume pojem obseg lika.

Razumevanje je težko opredeliti in ga preveriti. Nanizajmo nekaj možnosti:
- Loči pojma obseg in ploščina.
- Zna izmeriti, oceniti in izračunati obseg poljubnega realnega objekta ali modela ne glede na obliko.
- Zna izbrati in izmeriti ali izračunati podatke:
  - ki objekt določajo,
  - da lahko z njimi izračunajo obseg.
- Zna razložiti ali utemeljiti za izbrano situacijo uporabo pojma obseg.
- Se zaveda, da je za dani lik obseg enolično določen, obratno pa vedno ne velja.
- Se zaveda, da lahko imajo liki z enako ploščino različne obsege, tudi če gre za enako geometrijsko obliko.

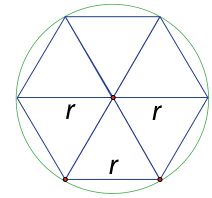
Ena od dejavnosti[9] za razvoj oz. za preverjanje razumevanja bi lahko bila:
- Premisli, ali trditve veljajo vedno, včasih ali nikoli. Svoje odločitve utemelji.
- Krog s polmerom 5 cm ima obseg 10 π cm.
- Obseg 20 π cm ima krog s premerom 20 cm.
- Obseg kroga s premerom 8 cm je manjši od 32 cm in večji od 24 cm.
- Obseg 16 cm ima samo en pravokotnik.
- Obseg paralelogramov je dvakratnik dolžin sosednjih stranic.
- Dolžine stranic paralelogramov so cela števila. Obseg paralelogramov je sodo število.
- Če povečam dolžno stranice kvadrata za 1 enoto, se obseg poveča za 2 enoti.
- Če zmanjšam polmer za 1 enoto, se obseg zmanjša za približno 2 enoti.

V zvezi z razumevanjem, npr. formule za obseg kroga in konstante π, navedimo nekaj odgovorov, ki opredelijo pomen tega števila na različnih taksonomskih ravneh.

- V zmnožku (premem sorazmerju) $k \cdot d$, ki opredeljuje odvisnost obsega od premera kroga, je $k < 4$, ker je obseg krogu očrtanega kvadrata 4 d, če je d stranica kvadrata.



Slika 3



Slika 4

- V zmnožku (premem sorazmerju) $k \cdot d$, ki opredeljuje odvisnost obsega od premera kroga, je $k > 3$, ker je obseg krogu včrtanega pravilnega šestkotnika s stranico r enak: $o = 6 \cdot r = 3 \cdot 2r = 3 \cdot d$.
- π je konstanta (število) v formulah za obseg in ploščino kroga.
- π je približno 3,14 ali 22/7.
- π je razmerje med obsegom (o) in premerom kroga (d).
- π je konstanta v premem sorazmerju $o = \pi \cdot d$.

S formulacijo ciljev in kriterijev izkazujemo, kako razumemo matematiko, ali kot nabor pravil in postopkov ali kot miselni proces, v katerem ustvarjamo nekaj novega. Za ustvarjanje in uporabo pojmov in postopkov v novih situacijah je poleg poznavanja dejstev in izvajalske rutine ter zanesljivosti pomembno tudi razumevanje pojmov in postopkov. Posledično so vprašanja, s katerimi preverjamo cilje, kriteriji in povratna informacija učitelja na različnih nivojih: prvi na instrumentalnem (preverja površinsko, prevladujejo dejstva in postopki), drugi na produktivnem (globinskem, povezovanje, miselni procesi) nivoju.

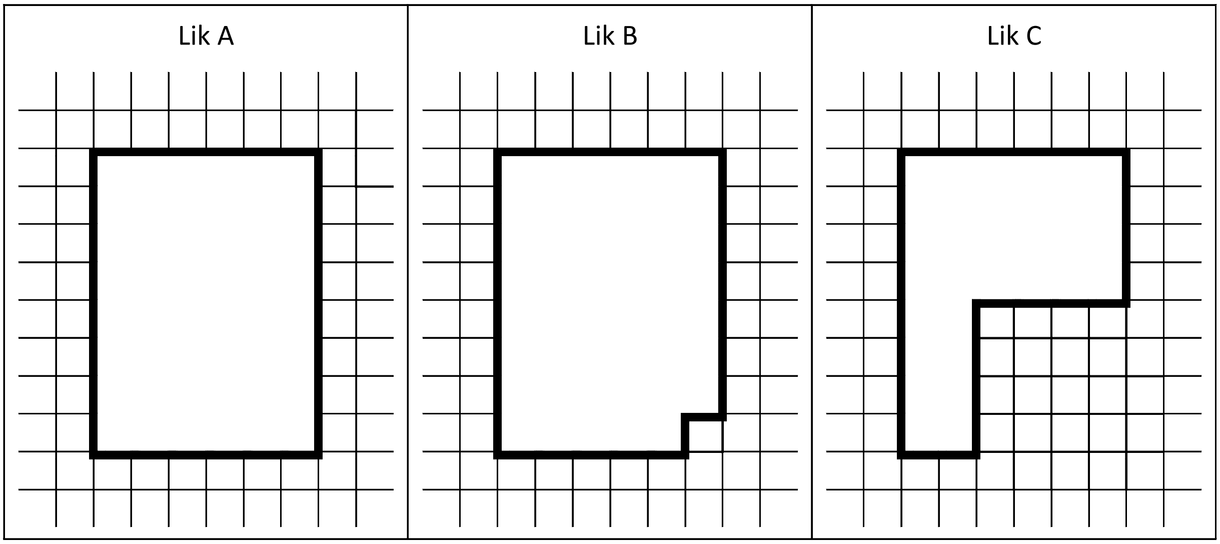
Preglednica 4: Katera znanja vzpodbujajo sporočila?

Sporočila	Značilnosti sporočila
Pravilno uporabljaš obrazec za računanje obsega kroga.	Povratna informacija kot pohvala oz. pozitivna ugotovitev.
Pri zapisu obrazca in enot si premalo natančen.	Natančnost ali kaj drugega?
Bodi natančnejši pri branju besedila.	Ali je razlog za napako branje besedila? Morda vključeni pojmi?
Pri reševanju besedilnih nalog si pomagaj s skico.	Ali lahko skica pomaga pri vsaki besedilni nalogi?
Dobro si usvojil postopke računanja ploščine in obsega kroga.	Povratna informacija kot pohvala oz. pozitivna ugotovitev. Ali je nastala na podlagi raznolikih primerov?

Vprašanja in napotki za učinkovito povratno informacijo

Dobra povratna informacija izhaja tudi iz *kakovosti vprašanj*. Odgovori na vprašanja dajejo vpogled v znanje in razumevanje

9 Dejavnosti za razvoj ali preverjanje razumevanja postavljajo učenca v novo situacijo, ki spodbuja povezovanje pojmov, sklepanje, razmišljanje … Vsaka ponovljena dejavnost ali vprašanje je že situacija reprodukcije znanja.



Kaj lahko sklepaš o obsegih likov? Razloži!
(Senekovič J. Interno gradivo ZRSŠ, 2015)

Slika 5

učencev ter odkrivajo vzroke za ugotovljeno stanje. Nadaljujmo ob primerih povezanih s pojmom obseg.

Omenili smo že, da smo ugotovili prototipe za lik in za ploščino ter obseg lika. Prototipa formula in računska operacija ne kažeta na razumevanje pojmov ploščina in obseg. V nadaljnji razpravi z učitelji smo predvidevali, da učenci bolje razumejo obseg kot ploščino. Pri analizi primera (Slika 5) se je pokazalo, da je bila naša predpostavka napačna.

Nekaj primerov razlag pravilne ugotovitve[10] o obsegih treh danih likov na sliki 5:

Razlaga 1: Ker tako izgleda, ne glede na površino in ker je vsota dolžin stranic po mojem enaka.
Razlaga 2: … ker jih črta obsega po isti dolžini in širini. Vendar so samo oblikovani drugače.
Razlaga 3: Imajo enako dolge vse stranice (tako sem ocenil).
Razlaga 4: … ker imajo enako dolžino stranic.
Razlaga 5: … ker je kot samo zamaknjen in obrnjen navznoter, tako ostane obseg enak.
Razlaga 6: … ker liki ne spreminjajo svoje lege levo ali desno.
Razlaga 7: … ker imajo vsi enaki vsaj dve stranici.
Razlaga 8: … ker imajo enake dolžine pri stranici A in B.
Razlaga 9: ... ker je enaka razdalja stranic samo drugače razporejena.

Kako so učenci utemeljevali svoje nepravilne ugotovitve:

Preglednica 5: Napačne in pomanjkljive trditve

Transkripcija razlag	Interpretacija napačnih in pomanjkljivih trditev
Razlaga 1: … ker ima vsak lik drugačne dolžine stranic.	Ve, da je obseg vsota dolžin stranic, ne vidi pa, da transformacija likov ohranja skupno dolžino stranic.
Razlaga 2: Obsegi se večajo. Lik C ima največji obseg. Razlaga 10: Obseg lika A je največji. Obseg lika C pa najmanjši. Razlaga 6: Vsak bo drugačni ker so različni liki.	Ne vidimo, ali učenci vedo, kaj je obseg lika. Ne moremo sklepati, zakaj učenec tako sklepa. Učenec nima izkušnje, da imajo lahko različni liki enak obseg. Potrebno je dodatno vprašanje oz. ustrezna dejavnost.
Razlaga 3: Večji kvadrat večji obseg. Ker je kvadrat večji in s tem posledično pokrije več kvadratkov ima večji obseg, ker so njegove stranice večje od stranic drugih, manjših kvadratov. Razlaga 4: Večji kot je lik večji obseg ima. Razlaga 7: Manj kvadratkov obsega ploščina lika, manjši je lik.	Ne vidimo, ali učenec ve, kaj je obseg lika. Pogosta nepopolna povezava med pojmi velikost, ploščina, obseg, površina, prostornina. Kaj je 'velikost lika'? Velikost pravilnih likov je odvisna od enega podatka, zato je treba zgodnje primerjanje modelov likov dopolniti. Večji glede na ploščino ali obseg? Kaj je večji pravokotnik? Razlaga 7 ne odgovori na vprašanje. Ali učenec zamenjuje oz. enači pojma obseg in ploščina? Ne vemo, ali šteje kvadratke na 'meji' ali po notranjosti lika.

10 Transkripcija odgovorov je brez lekture.

Transkripcija razlag	Interpretacija napačnih in pomanjkljivih trditev
Razlaga 8: Lika A in B imata najdaljši obseg, ker obsegata največ kvadratkov. Lik C pa ima najmanjši obseg, ker obsega manj kvadratkov. Razlaga 9: Zato ker obsegi niso enaki zaradi površine, ki jo imajo.	Verjetno šteje kvadratke po notranjosti lika. Obseg povezuje s ploščino/površino, torej območjem pokrivanja.
Razlaga 5: Tretji lik ima največji obseg, ker ima največ stranic. Sklepamo, da večstranski kot je lik večji obseg ima. Razlaga 11: Da ima lik C največji obseg, lik A pa najmanjši. To mislim zato, ker ima lik C največ in najdaljše stranice, lik A pa ima najmanj stranic.	Obseg lika je odvisen od števila stranic. Več kot je stranic, večji je obseg. Razlaga 11 vključi tudi dolžino stranic, vendar z nepravilno ugotovitvijo.

Povzemimo karakteristike zmot in nepopolnih ter napačnih predstav.

Najprej vidimo, da smo 11 izjav razporedili v 5 skupin (Preglednica 5). Iz zapisanih zmot izhajajo različne aktivnosti oziroma vprašanja za vsako skupino. Šele ustrezna učiteljeva povratna informacija (izbira vprašanja ali aktivnosti) zagotavlja, da bo učenec rekonstruiral svojo zmoto in ponovno pravilno pregradil pojem, ki ga bo lahko zanesljivo uporabljal in nadgrajeval.

Prepričanje, da imajo učenci manj težav z obsegom kot s ploščino, smo ovrgli z numerično in predvsem s kvalitativno analizo[11] odgovorov.

Numerični rezultat je pomemben, ker kaže, da smo se v napovedi kljub izkušnjam zmotili. Od 23 odgovorov poljubno izbranega osmega razreda je bilo 10 pravilnih, torej manj kot polovica. Če proučujemo razlage učencev, ugotovimo podobno kot ugotavlja NPZ za utemeljevanje[12]. Analiza razlag pokaže, da je morda pravilnih odgovorov še manj. Povsem mogoče je, da je med pravilnimi odgovori kateri posledica napačnih sklepov, zato bi bilo potrebno nadaljnje preverjanje pojma obseg vsaj še v primerih razlag 6, 7, 8 in 9. Terminološko in pomensko nenatančne razlage, kot npr. 3, 4, 5 pa spodbudimo, da jih učenci spopolnijo.

Zavedamo se, da bi drugačno vprašanje dalo celo v isti skupini učencev tudi drugačen numerični rezultat: Če pa gledamo kakovost pojmovnega vidika, je ugotovitve analize odgovorov treba upoštevati pri nadaljnji obravnavi obeh pojmov.

Ker je v praksi težko povsem individualizirati pouk, je treba najti optimalen pristop k reševanju ugotovljene situacije. V prvem koraku[13] ***ne opredelimo pravilnih odgovorov, torej tudi ignoriramo nepravilne*** in nadaljujemo s ciklom dejavnosti, ki dajo učencem možnost ponovnega premisleka. Tako lahko odgovore dopolnijo ali spremenijo.

Primera možnosti:

- Učenci naj se ponovno prepričajo o svojih stališčih ob isti sliki (Slika 5) z merjenjem in računanjem.
- Ponudimo slike likov (Slika 5) na vidni mreži. Lahko tudi spremenimo ali dopolnimo vprašanje. Npr.: Najprej izračunaj (ali izmeri) obsege in nato odgovori na vprašanje. Kaj lahko sklepaš o obsegih likov. Razloži.

Učitelj opazuje dejavnosti in beleži svoje ugotovitve. Opazovanje osredotoči glede na ugotovitve v 1. koraku. O nadaljnjih korakih se odloči po ponovnem pregledu rezultatov. Pomembno je, da učenci ubesedijo svoje sklepanje, saj je to poleg pravilnega rezultata morda edini[14] način, ki nam kaže morebitne pojmovne zmote.

Ker o povratni informaciji v prispevku razpravljamo na osnovi opazovanja pisnih izdelkov, se moramo zavedati, da so lahko učiteljeve povratne informacije, ki učence pozna, bolj izostrene. Po drugi strani pa lahko temeljijo na napačnih predpostavkah ali na privzetih nezavednih stališčih o znanju in zmožnostih učenca. V procesu pouka so številne možnosti, da učenca vprašamo, kako je razmišljal, tudi v primeru, ko smo prepričani, da vemo.

V nadaljevanju bomo razpravljali o vplivu točkovnika na numerično povratno informacijo in sporočilo o vsebinskih dosežkih (znanju).

Točkovanje korakov reševanja kot implicitna povratna informacija

Po številnih evalvacijah navodil za vrednotenje (NPZ točkovnikov in točkovanj pisnih preizkusov učiteljev) vidimo, da vsaj

11 Poenostavljeni model kognitivnega laboratorija, ki lahko ob skrbni izvedbi razkrije kvalitativni del problema v podporo empiričnim ugotovitvam.

12 O utemeljevanju učencev ne bomo podrobno razpravljali. Povejmo pa, da se v okviru NPZ vsako leto znova potrjuje, da izkazujejo učenci nizke rezultate. Tudi v primerih, ko se da slutiti pravilno sklepanje učenca, so odgovori pojmovno, semantično ali terminološko pomanjkljivi. V našem primeru naj bi učenci svoj odgovor razložili.

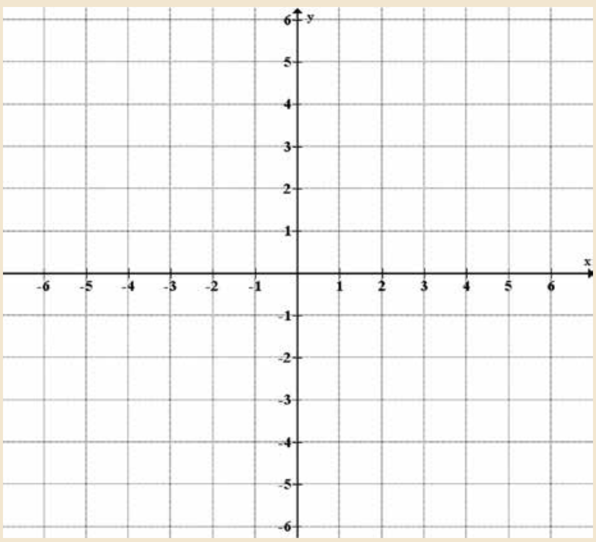
13 Izvorno vprašanje J. Senekoviča se nagiba k bolj odprtim vprašanjem, ker sklepanje ni usmerjeno. Zato je zahtevana razlaga. Glede na predlagano nadaljevanje aktivnosti pa gre za sondirno vprašanje, ki je ustvarilo pogoje za razredni učni trenutek. Zaprto vprašanje bi bilo, npr. Primerjaj obsege likov. Svojo ugotovitev razloži.

14 Pisanje razlag in utemeljitev pri matematiki daje učitelju vpogled v razmišljanje otrok. Ob pisanju, ki upočasni in poglobi razmišljanje, imajo učenci čas, da razmislijo in razvijejo ter nadgradijo svoja spoznanja.

toliko kot vpliva na kakovost in povednost povratne informacije vprašanje (naloga), vpliva tudi točkovnik (Senekovič, 2012).

Primer

Izračunaj ploščino lika, ki ga premici $y = x + 2$ in $y = -x + 6$ omejujeta s koordinatnima osema v I. kvadrantu.



Predstavimo tri točkovnike. Dva sta narejena po analitični poti in eden po holistični. Maksimalno število točk je 4. Analitična pot temelji na predvidenih poteh reševanja in rezultatih. Prvi točkovnik analitične poti točkovanja je namenoma podrobnejši, da se zavemo številnih možnosti razmišljanja in sklepanja. Holistična pot je celostno zasledovanje ciljev, ki jih naloga nedvoumno preverja.

Varianta 1 (analitična metoda)

1. Nariše premici. (1 t)
   - Premici nariše »na pamet«.
   - Premici nariše na osnovi preglednice.
2. Osenči lik ali zapiše oglišča lika z imenovanjem oglišč na sliki ((0, 0), (6, 0), (2, 4), (0, 2)) ali posredno z računanjem ploščine sporoča poznavanje lika. (1 t)
3. Poišče presečno točko (2, 4). (1 t)
   - Pridobi grafično
     1) Ne preverja s slike odčitane rešitve in pravilno uporabi podatke s slike.
     2) S sklepom o lastnostih koordinat skupne točke premic preverja odčitani koordinati. Izračuna $(2, y_1)$ in $(2, y_2)$
        a) Sklep zapiše.
        b) Sklepa ne zapiše.
   - Z reševanjem sistema enačb
     1) Sklep zapiše.
     2) Sklepa ne zapiše.
4. Ploščino ugotovi z uporabo formul (vsaj 2 možnosti) ali s štetjem kvadratkov. (1 t)

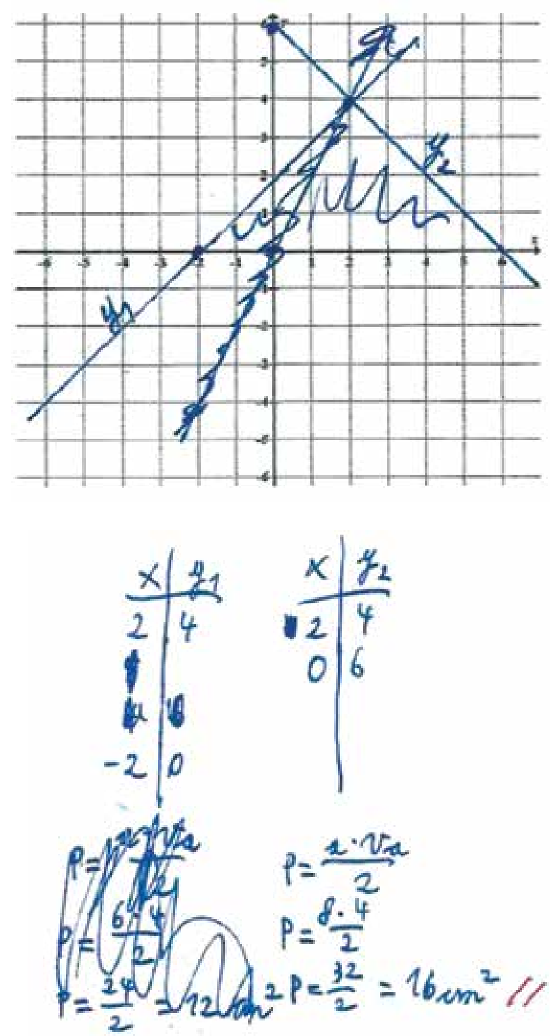
Varianta 2 (analitična metoda)

1. Nariše premici. (2 t)
2. Ploščino ugotovi z uporabo formul ali s štetjem kvadratkov.
   a) pravilen postopek (1 t)
   b) pravilen rezultat (1 t)

Varianta 3 (holistična metoda)

1. Kompleksno nalogo razgradi. (3 t)
   - slika premic
   - označi lik
   - izračuna ploščino lika
2. Izvajanje načrtovanih korakov. (1 t)
   - brez napak
   - z napakami

Rešitev in točkovanje



Slika 6: Primer reševanja.

Točke po varianti 1

1. Nariše premici. (1/1 t)
2. Osenči lik ali zapiše oglišča lika z imenovanjem oglišč na sliki ali posredno z računanjem ploščine sporoča poznavanje lika. (0/1 t)

3. Poišče presečno točko. (1/1 t)
4. Ploščino ugotovi z uporabo formul ali s štetjem. (0/1 t)

Opomba: Po tem točkovniku je učencu 2-krat odšteta 1 točka za isto napako, ker je pravilno računanje ploščine posledica pravilnega senčenja lika. Slednjega pa ne more izkazati, če ne najde ustreznega lika.

Zaključek: Glede na točkovnik variante 1 ali 2 dobimo **2 točki**. Kaj sporočata javnosti in kaj učencu? Javnost običajno ne vidi točkovnika, zato rezultat pokaže, da učenec tovrstnega problema ne zna rešiti oz. ga reši delno. Učenec je samo obveščen o načinu točkovanja, zato če ni usmerjen v popravo svoje naloge z izostritvijo napak, morda napake, ki jo je storil, sploh ne uzavesti.[15]

Opisno: Učenec zna nalogo razgraditi, ima razvito ***zmožnost samokontrole izvajanja*** (ugotovi napako pri branju podatkov ali pri risanju grafa ene od premic), razume problem, zna narisati premici, pozna pojem ploščine, pozna formulo za ploščino trikotnika, zna povezati pojma višina trikotnika in ordinata oglišča trikotnika, preveri, da je presečna točka skupna obema premicama.

Pri reševanju te naloge učenec ne izkazuje, da zna izračunati ploščino sestavljenega lika, ker ga je v procesu reševanja nepravilno osenčil glede na dano besedilo.

Zaključek: Glede na opisno holistično oceno bi dodelili reševani nalogi **3 točke** ter ustrezno usmerili učenca pri ponovnem reševanju naloge.

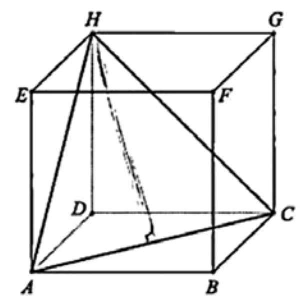
Točke po varianti 3

1. Kompleksno nalogo razgradi. (2/3 t)
   - **slika premic**
   - ***označi lik po besedilu (delno)***
   - ***izračuna ploščina lika (delno)***
2. Izvajanje načrtovanih korakov. (1/1 t)
   - **brez napak**
   - z napakami

Ležeče v točki 1 je posledica iste napake, vendar se ne da ugotoviti računanja ploščine sestavljenega lika. Pri zapisanem točkovniku je treba paziti, da se točke za isti cilj ne podvajajo, tako dane kot nedane. Točko pod 2 učenec **prejme**, ker je glede na njegovo razumevanje naloge postopek reševanja pravilen. Iz zapisanega vidimo, da učenec zna več kot izkazujejo točke in da je verjetno neizkazano znanje posledica izvedbene napake.

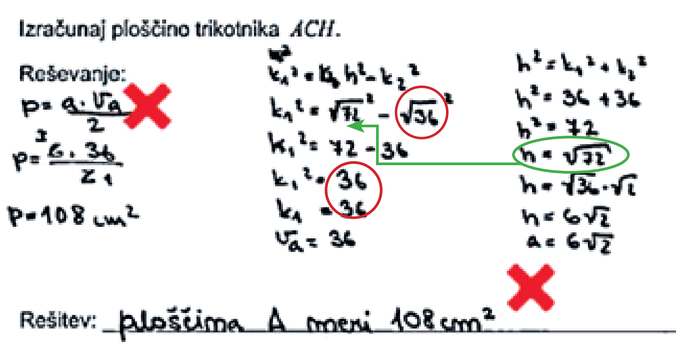
Za kompleksne naloge je primerna holistična metoda ocenjevanja, s katero smo osredotočeni na prioritetni cilj naloge: zna rešiti kompleksno nalogo. Učenec ga izkazuje z zmožnostjo razgradnje na sestavne dele, s poznavanjem potrebnih pojmov, s povezovanjem pojmov (sklepanjem), izvajalno spretnostjo in zanesljivostjo …

Podobno je z nalogo 7d (del strukturirane naloge 7, NPZ za 9. razred, 2015). Dana je dolžina roba kocke ($d(AB) = 6$ cm) in skica trikotnika ACH (Slika 7). Izračunaj ploščino trikotnika ACH.

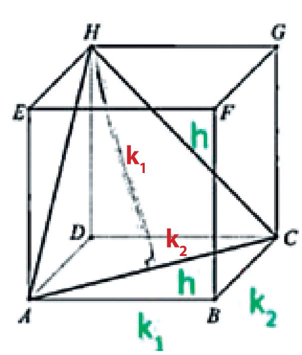


Slika 7: Učenec je dodal višino trikotnika ACH.

Nalogo je v celotni slovenski populaciji devetošolcev rešilo zgolj 9 % učencev. Pričakovali bi malo višji odstotek. Kje je razlog? Premajhno število podobnih nalog – lik, ki ni v ravnini lista papirja, ali težave s prostorsko predstavo? Učenec (Slika 7) ni prepoznal trikotnika kot enakostraničnega, zato je imel več miselnega in računskega dela. Morda se ni spomnil formule za ploščino enakostraničnega trikotnika, ki pa je navedena na reševalni poti. Po proučevanju računskega postopka in dekodiranju uporabljenih oznak (Sliki 8, 9) spoznamo, da je postopek pravilen, narejeni sta pa dve izvajalni računski oz. algebrski napaki ($k_2 = h/2$, $\left(\frac{s}{2}\right)^2 \neq \frac{s^2}{2}$ oz. $\left(\frac{\sqrt{72}}{2}\right)^2 \neq \frac{72}{2}$ s podatki ter nerealizirano korenjenje). Postopek reševanja res ni eleganten (enostaven in kratek), je pa po korakih pravilen. Učenec pri tej nalogi dosega zapisani cilj, česar točkovanje ne potrdi in niti ne predvideva, ker izhaja iz vmesnih in končnih rezultatov, ki pa so napačni. Učenec ne uporablja v procesu reševanja kontrolnih veščin. Na napako pri računanju kaže že prvi dobljeni rezultat (nalogo rešuje ‚s konca', zato na videz zapisuje postopek z desne proti levi: $a = 6\sqrt{2}$.



Slika 8



Slika 9: Ob dopolnjeni skici z imeni lažje sledimo sklepanju učenca.

15 V tem primeru ne vidimo vzroka za napako, ki jo je učenec popravil sam. Morda je 'končna' napaka nastala zaradi popravljanja prve napake, po kateri učenec ni ponovno bral besedila naloge …

Pomembno je, da učitelj in učenec odkrijeta dejanski vzrok za izgubo točk in ga odpravita.

Na podlagi navodil za vrednotenje NPZ[16] je predvidena točka za ustrezno strategijo računanja ploščine in točka za pravilen rezultat s pripisom, da lahko sledi iz napačno izračunanega rezultata za dolžino AC. Glede na popravne znake in dosežek 0 točk je povratna informacija šibka. Če predelamo navodila v seznam dveh ciljev ali kriterijev, prav tako ne dobimo povratne informacije o dejanski težavi učenca, ki ni zanesljiv pri izvajanju računskih operacij s potencami ni koreni. Torej izvor obeh napak ni ne geometrijski, ne metrični, ampak specifično računski.

Nekaj možnih učiteljevih odzivov.

Prvi primer napotkov učencu:
1. Poišči napake in jih opiši ter odpravi.
2. Zakaj sta rezultata 36 cm in 108 cm^2 nemogoča?

Drugi primer napotkov učencu:
1. Poišči napake in jih opiši ter odpravi.
2. Na skici označi izračunane elemente.
3. Zakaj sta rezultata 36 cm in 108 cm^2 nemogoča?
4. Namig, če učenec ne najde napake: $\left(\frac{s}{2}\right)^2 \neq \frac{s^2}{2}$.
5. Poenostavi postopek reševanja oz. izračunaj drugače.

Primer simuliranega učnega trenutka za kritično presojo rezultatov:

> Stranica enakostraničnega trikotnika meri 5 cm. Sošolka Tina je izračunala višino tega trikotnika in dobila rezultat 5,25 cm, sošolec Aleš pa 6 cm. Ali je kateri od rezultatov pravilen? Odgovor utemelji s premislekom (brez računanja).

Naloga z napačno rešitvijo je primer učnega trenutka za osmišljanje vsaj dveh korakov v procesu reševanja: pred reševanjem razmisli, ali lahko oceniš rezultat, in ob vsakem rezultatu razmisli o njegovi smiselnosti.

Ob reševanju te naloge lahko tudi utemeljimo priporočilo o dopolnjevanju elementov skice s smiselno vpeljanimi imeni. Tako lažje sledi reševanju učenca popravljalec, ki mu je izdelek namenjen, in tudi učenec, ko rešuje ali se čez čas vrne k svojemu postopku.

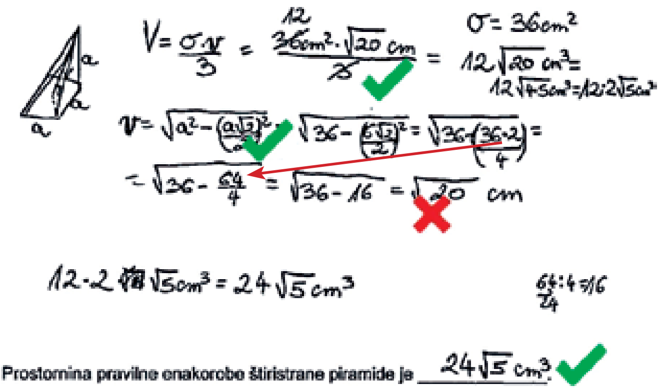
V naslednjem primeru ilustriramo napačen rezultat naloge 7b, ki ga težko zaznamo z oceno.

Kocka ima površino 216 cm^2. Obseg osnovne ploskve kocke je enak obsegu osnovne ploskve pravilne enakorobe štiristrane piramide.

a) Izračunaj dolžino roba pravilne enakorobe štiristrane piramide.
b) Izračunaj prostornino pravilne enakorobe štiristrane piramide.

(Naloga 7, NPZ 2017, 9. razred)

Računska napaka (Slika 10) bistveno ne vpliva na sprejemljivost rezultata, zato učenec težko presoja pravilnost z oceno ali napovedjo rezultata. V tem primeru odpovedo tudi »kontrolne« strategije, ker je razlika med pravilnim in napačnim rezultatom na mestu desetin – torej majhna glede na enoto ($v = 2\sqrt{5}$ cm $\approx$ 4,24 cm namesto $v = 3\sqrt{2}$ cm $\approx$ 4,47 cm) v vmesnem rezultatu postopka. Končni rezultat se zaradi množenja razlikuje na mestu enic, napaka je za 3 cm^3 pri rezultatu približno 50 cm^3.



Slika 10: Puščica nakazuje napako v množenju.

Interpretacija dosežka učenca na osnovi cilja ali navodil za vrednotenje, ki je neke vrste kriterij, (izračunana višina piramide ($3\sqrt{2}$ oziroma ustrezen približek)[17] ali natančneje, izračuna višino piramide z uporabo Pitagorovega izreka) je napačna, saj s postopkom učenec izkazuje preverjano znanje, je pa storil slučajno, izvajalno napako, ki je tokrat ni mogel kontrolirati glede na predvideni rezultat. Še več, učenec je pokazal, da je sposoben »transformacije situacij« v kompleksni nalogi, saj je pravilno prehajal med podatki za kocko (površina) in pravilno enakorobo štiristrano piramido preko enakosti obsegov osnovne ploskve enega telesa na osnovno ploskev drugega telesa, za katerega tudi zna izračunati prostornino. Koraki točkovnika izhajajo samo iz rezultatov in ne iz procesa razmišljanja in dejanskega znanja povezanega z bistvenimi cilji naloge. Nabor točk se oblikuje na napakah vseh vrst, kar pa natančno ne opredeli ne znanja in ne težav, zato je vsaj na nivoju posameznega razreda treba ugotoviti dejanske težave in v primerih kompleksnih ali problemskih nalog preiti na holistični opis znanja.

Zaključek

> V prispevku razpravljamo o poučevanju in učenju, osredinjeni na pomen povratne informacije učitelju in učencu. Predstavimo, kako pomembni sta za uspešno poučevanje in učenje natančna analiza rezultatov in strokovna presoja učitelja o nadaljnjih korakih učenja. Zbrane ugotovitve (dokazila) o znanju in težavah otrok po analizi so učitelju kažipot, po katerem lahko argumentirano načrtuje in hkrati tudi sledi napredku učenca.

16 https://www.ric.si/mma/N151-401-3-2/2015061611140453/ (29. 5. 2018)
17 https://www.ric.si/mma/N171-401-3-2/2017061613542119/ (29. 5. 2018)

Ob tem pa se je treba zavedati:

- Napačne oz. in nepreverjene interpretacije opaženega so lahko ovira pri učiteljevi podpori v procesu učenja.
- Kakovostna povratna informacija je koristna ne glede na to, ali je »pozitivna« ali »negativna«, in učinkovitejša, če ni osredotočena na osebo, ampak na nalogo oz. na vzrok, iz katerega izhaja težava.
- Novo znanje mora izhajati iz dejanskega znanja in ne iz predpostavk o pričakovanem znanju.
- Pričakovano znanje lahko temelji na nezavedno privzetih stališčih o znanju in zmožnostih učenca.
- V procesu pouka so številne možnosti, da učenca vprašamo, kako je razmišljal, kar storimo tudi v primeru, ko smo prepričani, da vemo.
- Izkazano znanje je odvisno od vrste in kakovosti vprašanj.
- Vprašanja, naloge oz. učne situacije, cilji in kriteriji so odvisni od učiteljevih prepričanj, odnosa in pojmovanja, kaj je matematika, poučevanje in učenje.
- Če povratna informacija poudarja instrumentalne cilje (dejstva in postopke), lahko ovira »globoko« učenje.
- Analiza odgovorov in iskanje vzrokov za učne primanjkljaje so ključni za učne trenutke, načrtovane ali naključne, in so pomemben element procesa »povratne informacije«.
- Preverjanje predznanja moramo opraviti pravočasno, da lahko načrtujemo dejavnosti za odpravo primanjkljajev. Ugotavljanja predznanja ne smemo zamenjati z aktiviranjem dosegljivosti potrebnih pojmov, kar običajno naredi učitelj v uri, ko pojem uvaja.
- Povratno informacijo je treba izostriti, da bo učenec v svojih nadaljnjih prizadevanjih vlagal napore v pravi smeri.
- Učitelj presodi, kdaj je mogoče, da je učenec ob usmeritvah učitelja samostojen, kdaj pa je potrebna njegova podpora.
- Zavedati se je treba, da numerični podatek, točke ali odstotek, ne pomenijo vedno, da učenec ne zna, ampak da je na poti do rezultata naredil kakšno napako, ki je morda slučajna.
- Na interpretacijo dosežkov iz točk vpliva tudi načrt vrednotenja in način točkovanja.
- Za vsakega učitelja je izziv, da pri vrednotenju izdelkov učencev preide z analitične na holistično presojo znanja. ■

Viri

Askew, M. idr. (1997). *Effective teachers of numeracy*. London: School of education. http://musicmathsmagic.com/page4/files/EffectiveTeachersofNumeracy.pdf (22. 7. 2017).

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. Routledge Palmer.

Frobisher, L. (1999). Primary School Children's Knowledge of Odd and Even Numbers V Orton A. (ur.) *Pattern in the Teaching and Learning of mathematicss*, str. 31–48, Cassel London&New York.

Furinghetti, F., Pehkonen, E. (2002). Rethinking Characterizations of Beliefs. V G. C. Leder, E.

Pehkonen in G. Törner (ur.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (str.

39–58). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kmetič, S. (2014). Predvidevanje in odkrivanje učnih težav pri matematiki. V: Žakelj, A. (ur.). *Učne težave pri matematiki in slovenščini - izziv za učitelje in učence: zbornik prispevkov konference*. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo, str. 77–97, http://www.zrss.si/pdf/UTMIS-zbornik-prispevkov-2014.pdf. (18. 5. 2018).

Lipovec, A., Antolin, D. (2013). Slovenian Pre-service Teachers' Prototype Biography, *Journal Teaching Higher Education, 19*(2), str. 183–193.

Marentič Požarnik, B. (2000). *Psihologija učenja in pouka*. Ljubljana: DZS.

Muir, T. (2008). Principles of Practice and Teacher Actions: Influences on Effective Teaching of Numeracy, *Mathematics Education Research Journal 2008, 20*(3), str. 78–101, *http://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ836443.pdf (22. 7. 2017).*

Miholič T. (2014). Evolucija neke metode, str. 141–150 V Kmetič, S. *KUPM 2014: zbornik prispevkov* Ljubljana: Zavod RS za šolstvo, 2015. http://www.zrss.si/pdf/zbornik-prispevkov-kupm2014.pdf. (18. 5. 2018).

NPZ: *Matematika Preizkus znanja za 9. razred* (2015): https://www.ric.si/mma/N151-401-3-1/2015061611140169/ (2. 6. 2018).

NPZ: *Matematika Preizkus znanja za 9. razred* (2017): https://www.ric.si/mma/N171-401-3-1/2017061613542079/ (2. 6. 2018).

Senekovič, J. (2012). Točkovnik in dosežki merjenja znanja, str. 343–350, Zbornik prispevkov 1. mednarodna Konferenca o učenju in poučevanju matematike KUPM 2012, Maribor, dostop: http://www.zrss.si/pdf/zbornikprispevkovkupm2012.pdf (18. 5. 2018).

Senekovič, J. (2016). Interno gradivo projektne skupine Formativno spremljanje.

Sirnik, M., Suban, M. (2017): Pomen formativnega spremljanja pri učenju in poučevanju matematike, *Matematika v šoli*, *23*(1), str. 2–10. Ljubljana: Zavor RS za šolstvo.

Wiliam, D. (2013). Vloga formativnega vrednotenja v učinkovitih učnih okoljih, str. 123–142 V: Dumont, H., Istance, D., Benavides, F. (ur.). *O naravi učenja, uporaba raziskav za navdih prakse.* Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.

O poštevanki

Tomaž Miholič
Osnovna šola Duplek

Povzetek

Težko je najti učitelja matematike, ki bi dvomil v pomembnost znanja poštevanke pri svojih učencih. Kaj o poštevanki veleva učni načrt in ali izkušnje temu pritrjujejo? Kako pomembna je avtomatizacija poštevanke? Kateri izrazi so učencem najtežji? Kaj lahko razberemo iz napačnih odgovorov? Kaj lahko razberemo iz hitrosti odgovorov? Kdaj je vaja poštevanke potrebna in kdaj je je dovolj? V prispevku so predstavljene nekatere ugotovitve, ki so nastale na podlagi testiranja osnovnošolcev.

Ključne besede: poštevanka, osnovna šola

On Multiplication Tables

Abstract

We would be hard-pressed to find a mathematics teacher who doubts the importance of multiplication tables for their students. How is this reflected in school curriculum and does experience confirm this fact? What is the importance of memorizing multiplication tables? Which concepts are most difficult for students to learn? What can we learn from incorrect answers? What can we learn from the speed of answers? When is it necessary to practice multiplication tables and when to stop? The article introduces some of the findings based on primary-school students' tests.

Keywords: multiplication table, primary school

Uvod

Znanje poštevanke do števila 10 predstavlja enega izmed pomembnejših temeljev za doseganje ciljev v drugem in tretjem triletju osnovne šole (množenje in deljenje dvo- in večmestnih števil, večkratniki in delitelji, ulomki, sorazmerja, obsegi, ploščine, prostornine …) in posledično tudi za doseganje ciljev pri pouku matematike po zaključeni osnovni šoli. Morda kot zanimivost: Nacionalni preizkus znanja matematike za devetošolce v šolskem letu 2016/17 vsebuje zgolj eno nalogo – od devetih, kjer ni bilo znanje poštevanke vsaj posredno preverjeno.

Zaplet

Učni načrt za matematiko v osnovni šoli med operativnimi cilji v tretjem razredu nalaga učencem (in seveda nam – učiteljem), da »usvojijo do avtomatizma zmnožke (produkte) v obsegu 10 × 10« (Žakelj, 2011, str. 15). Z relativno preprostim kvizom[1] v spletni učilnici (Slika 1) smo v šolskem letu 2015/16 ugotovili, da se ta cilj do avtomatizma v naši šoli ne usvoji v tretjem, ampak se usvaja vse do sedmega razreda, kar si razlagamo s primerjavo časovne odzivnosti (Slika 2).

Ta ugotovitev izziva k spremembi načrtovanja učenja poštevanke, če vemo, da se poštevanka načrtovano, nadzorovano in strukturirano poučuje zgolj v tretjem razredu. Učenci četrtih in višjih razredov, ki predhodno še niso usvojili poštevanke do avtomatizma, lahko posvojijo neoptimalne ali celo napačne strategije za določanje produktov dveh enomestnih števil (poštevanke). Napačno izgrajene miselne sheme je bistveno težje popravljati, kot graditi nove – zato je smiselno znanje poštevanke spremljati eksplicitno skozi celotno osnovno šolo in tudi kasneje ter posredovati takoj, ko opazimo kakšno anomalijo.

Učitelji v drugi in tretji triadi ter v srednji šoli upravičeno pričakujemo avtomatizirano znanje poštevanke in se z vzroki napak in napačno izgrajenimi miselnimi shemami običajno ne ukvarjamo – bodisi zaradi natrpanega učnega načrta bodisi zaradi prepričanja, da bo učencem ali dijakom samim uspelo odpraviti težave.

Potrditev dolgoletne slutnje, da učenci v tretjem razredu v celoti ne avtomatizirajo poštevanke, nas je vzpodbudila, da to elementarno področje matematične veščine podrobneje analiziramo in poskušamo skrajšati čas usvajanja zmnožkov v obsegu 10 × 10 oziroma se opremiti z informacijami, s katerimi bomo lahko učencem višjih razredov pomagali pri izgradnji ali korekciji novih oziroma obstoječih miselnih shem.

1 Kviz v spletni učilnici Moodle, v katerega smo uvrstili 78 izrazov poštevanke. Testiranje celotnega oddelka hkrati je potekalo eno šolsko uro v računalniški učilnici z uporabo osebnih računalnikov. Vsak oddelek je v ta namen obiskal računalniško učilnico enkrat.

Slika 1: Uporabniški vmesnik kviza v spletni učilnici (Moodle).

Slika 2: Povprečen čas v sekundah (navpična os), ki ga potrebujejo učenci posameznih razredov (vodoravna os) za en izraz poštevanke. (n = 207, kviz v spletni učilnici)

Štiri stopnje usvajanja nove veščine

Pri usvajanju katerekoli nove veščine gredo učeči skozi štiri stopnje (Burch, 1974). Če se teh stopenj zavedamo, lahko učence učinkoviteje vodimo skozi običajno naporen proces usvajanja veščine.

Nezavedno nekompetentni – »Ne vemo, da ne vemo«, na tej stopnji se učeči se ne zavedajo svojega neznanja. Prehod na naslednjo stopnjo je mogoč zgolj ob zunanji pomoči (učitelj, vrstnik, starši …).

Zavedno nekompetentni – »Vemo, da ne vemo«, na to stopnjo sodijo učeči se, ki spoznajo primanjkljaj pri svojem znanju oziroma veščini, vendar sami ne uspejo preiti na naslednjo stopnjo. Znova se pokaže pomembnost zunanje pomoči (učitelj, vrstnik …).

Zavedno kompetentni – »Vemo, da vemo«, sem sodijo učeči se, ki veščino oziroma znanje usvojijo, vendar ob tem porabljajo veliko energije, koncentracije in časa ter drobijo probleme na rešljive podprobleme. Prehod na naslednjo stopnjo lahko opravijo takrat, ko razvijejo ustrezne miselne sheme in znanje oziroma veščino avtomatizirajo.

Nezavedno kompetentni – »Ne vemo, da vemo«, stopnja, kjer učeči se znanje oziroma veščino uporabljajo brez pretiranega napora in rutinsko ter so pri tem sposobni reševati druge naloge. Zgolj minimalno truda je potrebno, da učeči svojo veščino ohranjajo na tej stopnji – čisto brez redne vaje pa tudi ne gre.

Slika 3: Stopnje usvajanja nove veščine.

Pri tako osnovni veščini, kot je poznavanje zmnožkov (produktov) števil do 10, prehodi s prve na drugo stopnjo in z druge na tretjo stopnjo za učence niso zahtevni in jih opravi velika večina učencev v relativno kratkem času v tretjem razredu. Prehod na četrto stopnjo je težaven vendar potreben, saj le tam govorimo o avtomatizaciji veščine.

»Avtomatizacija – osnova genija«

Benjamin Bloom (1986) v članku »The Hands and Feet of Genius – Automaticity« ob bok vsakdanjih veščin, ki jih je treba avtomatizirati (hoja, govor, branje, vožnja kolesa, tek, plavanje …) v zgodnji čas šolanja postavlja tudi veščino rabe osnovnih računskih operacij, ki naj se do avtomatizma razvije tudi ob pogosti rabi izven učilnice.

Avtomatizem Bloom opredeli kot sposobnost nezavednega, hitrega in zanesljivega izvajanja postopkov, med tem ko na zavedni ravni rešujemo drug problem.

Na poti do avtomatizma

Razkorak med dejanskim stanjem in pričakovanji učiteljev smo v šolskem letu 2016/17 podrobneje analizirali ponovno s pomočjo tehnologije. Za učence smo razvili aplikacijo za pametne telefone »Vadnica poštevanke«, s katero smo igrificirali[2] poštevanko do števila 10. Učenci imajo eno minuto časa, da izračunajo čim več zmnožkov. Podatke o uspešnosti igralcev zbiramo na strežniku, kjer so s

2 Igrifikacija (angl. Gamification) je pojem, ki označuje uporabo izkušenj iz iger v kontekstu, ki z igro ni neposredno povezan – z namenom povečanja motivacije.

Slika 4: Uporabniški vmesnik v aplikaciji za pametne telefone (Android).

pomočjo spletnega vmesnika na voljo učečim učiteljem. Aplikacijo smo oblikovali tako, da je uporabna tako v fazi strukturiranega poučevanja poštevanke v tretjem razredu, kot kasneje v fazi utrjevanja in preverjanja. Aplikacija sicer ponuja učencem takojšnjo povratno informacijo o pravilnih in napačnih odgovorih, prav tako jim za motivacijo ponuja primerjavo z uspehom drugih tekmovalcev istega dne, vendar se njena prava vrednost pokaže šele, ko zbrane rezultate analizira učitelj in lahko posameznemu učencu poda čisto individualizirano povratno informacijo. Tehnologija učitelju omogoča, da morebitna odstopanja od pričakovanih rezultatov enostavno in hitro zazna in se nanjo odzove.

Zbrani podatki učitelju omogočajo analizo s pomočjo treh kazalnikov: Pravilno ali napačno izračunan izraz, potreben čas za vpis odgovora in še za učitelja najpomembnejši – kaj so učenci zapisali, ko so napačno določili odgovor.

V podatkovni bazi smo zbrali že več kot pol milijona zapisov, kar pomeni, da imamo za vsak izraz poštevanke do števila 10 več kot štiri tisoč zapisov, opremljenih z vsemi tremi kazalniki.

Niso vse poštevanke »enake«

Analiza takšne količine podatkov nam omogoča, da preverimo nekatera prepričanja o poštevanki in se pripravimo na povratno informacijo učencem, s katero jih usmerimo v popravek napačno izgrajenih miselnih shem. V tabeli (Slika 5) je prikazana uspešnost vseh sodelujočih pri posameznih izrazih poštevanke.

Čeprav se nam je zdelo, da si poštevanka števila nič niti ne zasluži preverjanja, so rezultati pokazali, da ni tako. Rezultati so slabši od pričakovanih, vendar nas to ne skrbi, saj lahko učencem dokaj enostavno in s konkretnimi primeri pomagamo popraviti te rezultate.

Poštevanke števil ena, dve, pet in deset nas niso presenetile saj podatki kažejo, da jih učenci usvojijo najbolje. Pozitivno presenetijo rezultati poštevanke števila tri.

Težave pri poštevankah števil štiri, šest, sedem, osem in devet so pričakovane, predvsem tam, kjer ti faktorji nastopajo hkrati. Za njihovo odpravo si je priporočljivo ogledati napačne odgovore učencev oziroma dijakov in šele na podlagi teh podati ustrezno povratno informacijo.

Nepričakovane težave se skrivajo na diagonali slike 5, kjer so prikazani produkti dveh enakih faktorjev. Wong (2007) pravi, da naj učenci ne bi imeli težav z avtomatizacijo produktov dveh enakih števil.

S slike je jasno razvidno, da učenci oziroma dijaki poznajo in uporabljajo zakon o zamenjavi pri množenju, saj je slika skoraj osno somerna – po diagonali od produkta dveh ničel do produkta dveh desetk.

Kako učenci določajo vrednost produktov

Poštevanko do števila deset (vključno s številom 0) sestavlja 121 različnih izrazov in verjetno so redki tisti, ki poznajo vrednosti vseh produktov »na pamet«. Ostali učenci sicer ne poznajo vseh vrednosti produktov »na pamet«, ampak jih določajo s pomočjo strategij, ki pa se lahko tesno naslanjajo na tiste produkte, ki jih znajo »na pamet«.

Dodatne strategije

Množenje števil 6, 7, 8 in 9 lahko poteka po relativno kompleksnih strategijah, ki so kombinacija enostavnejše strategije

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	2%	4%	8%	9%	6%	9%	5%	5%	6%	4%	6%
1	4%	4%	3%	5%	2%	3%	1%	9%	7%	3%	4%
2	1%	4%	5%	4%	5%	5%	6%	5%	8%	7%	6%
3	8%	3%	4%	3%	6%	4%	9%	9%	13%	10%	6%
4	6%	1%	6%	6%	7%	11%	9%	16%	25%	14%	2%
5	6%	2%	5%	2%	7%	9%	9%	7%	12%	9%	4%
6	6%	3%	8%	12%	11%	6%	10%	20%	31%	17%	2%
7	5%	3%	2%	8%	18%	10%	17%	14%	17%	12%	5%
8	5%	5%	5%	16%	26%	13%	32%	18%	21%	10%	6%
9	6%	1%	5%	16%	14%	15%	14%	13%	15%	15%	7%
10	10%	6%	4%	4%	4%	2%	4%	2%	6%	6%	5%

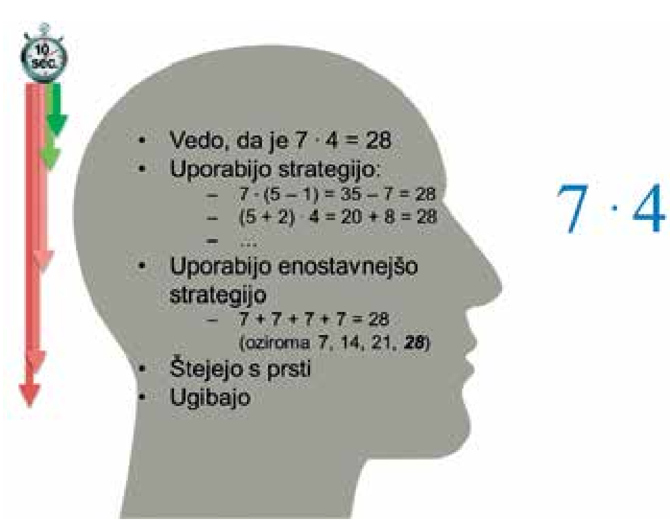
Slika 5: Odstotek napačnih odgovorov za posamezni izraz poštevanke. Navpično so nanizani prvi, vodoravno pa drugi faktorji. (*n* = cca 500 000)

Nekaj splošnih strategij za poštevanke števil do 10

Poštevanka števila	Strategije določanja vrednosti produkta		Odvisnost od znanja:
Vsa števila	Faktorja lahko zamenjaš $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$, $0 \cdot 7 = 7 \cdot 0$, $7 \cdot 4 = 4 \cdot 7$		Zakon o zamenjavi faktorjev.
0	Vedno 0 $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 3 = 0$, $0 \cdot 7 = 0$		Razume ali zapomnitev.
1	Enako izbranemu številu $1 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$, $1 \cdot 2 = 2$, $1 \cdot 4 = 4$, $1 \cdot 7 = 7$		Razume ali zapomnitev.
2	Izbrano število podvoji $2 \cdot 3 = 3 + 3$, $2 \cdot 7 = 7 + 7$, $2 \cdot 5 = 5 + 5$	Šteje po dva $2 \cdot 4 = 4 \cdot 2 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$	Seštevanja enomestnih števil.
10	Izbranemu številu dodaj ničlo $10 \cdot 3 = 30$, $10 \cdot 5 = 50$, $10 \cdot 10 = 100$		Množenje z 10, ali pravilo o dodajanju ničel.
5	Množi z 10 in deli z 2. $5 \cdot 7 = (10 \cdot 7) : 2 = 70 : 2 = 35$	Šteje po pet. $5 \cdot 4 = 4 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 + 5 = 20$	Razpolavlja število na dve enaki števili.
3	Izbrano število podvoji, rezultat še povečaj za izbrano število $3 \cdot 7 = 2 \cdot 7 + 7$, $3 \cdot 6 = 2 \cdot 6 + 6$		Poštevanke števila 2 in seštevanja enomestnih števil.
6	Izbrano število množi s 5, rezultat še povečaj za izbrano število $6 \cdot 7 = 5 \cdot 7 + 7 = 35 + 7 = 42$		Poštevanke števila 5 in seštevanja enomestnih števil.
4	Izbrano število množi z 5, rezultat zmanjšaj za izbrano število $4 \cdot 7 = 5 \cdot 7 - 7 = 35 - 7 = 28$	Izbrano število dvakrat podvoji $4 \cdot 7 = 2 \cdot 7 \cdot 2 = 14 \cdot 2 = 28$	Poštevanke števila 5 in odštevanja enomestnih števil, poštevanke števila 2.
9	Izbrano število množi z 10, rezultat zmanjša za izbrano število $9 \cdot 7 = 10 \cdot 7 - 7 = 70 - 7 = 63$	Opazuj vzorec $0 + 9 = 9$, $1 + 8 = 9$, $2 + 7 = 9$, $3 + 6 = 9$, $4 + 5 = 9$, $5 + 4 = 9$, $6 + 3 = 9$, $7 + 2 = 9$, $8 + 1 = 9$, $9 + 0 = 9$	Poštevanke števila 10 in odštevanja enomestnih števil.
7	Izbrano število množi s 5, rezultat še povečaj za podvojeno število $7 \cdot 8 = 5 \cdot 8 + 2 \cdot 8 = 40 + 16 = 56$		Poštevanke števil 5 in 2 ter seštevanja števil.
8	Izbrano število množi z 10, rezultat zmanjšaj za podvojeno število $8 \cdot 7 = 10 \cdot 7 + 2 \cdot 7 = 70 - 14 = 56$		Poštevanke števil 10 in 2 ter odštevanja števil.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Slika 6: Memoriranje štirih produktov olajša določanje devetih produktov.



Slika 7: Kako učenci določajo vrednost produkta števil (na primeru števil 7 in 4).

in še ene računske operacije (odštevanje, seštevanje). Z zakonom o zamenjavi lahko več kot polovico zmnožkov poštevank števil 6, 7, 8 in 9 prevedemo na uporabo enostavnejših strategij (primer: $9 \cdot 2 = 2 \cdot 9 = 9 + 9 = 18$). Težave nastopijo takrat, ko faktorji 6, 7, 8 in 9 v zmnožku nastopajo skupaj (primer: $9 \cdot 6, 8 \cdot 7, 8 \cdot 8, 8 \cdot 6, \ldots$). Teh zmnožkov je 16 in tudi poznavanje strategije o zamenjavi faktorjev ta nabor oklesti na še vedno 10 zmnožkov. V teh primerih je smiselno memorirati vrednosti produktov enakih števil ($9 \cdot 9 = 81$, $8 \cdot 8 = 64$, $7 \cdot 7 = 49$, $6 \cdot 6 = 36$), ki jih ni veliko (znanje je uporabno tudi pri avtomatizaciji kvadriranja) – za določanje vrednosti produkta dveh sosednjih števil (primer: $9 \cdot 8, 8 \cdot 9, 7 \cdot 8, 8 \cdot 7, 6 \cdot 7, 7 \cdot 6$) pa uporabiti strategijo:

$9 \cdot 8 = 9 \cdot 9 - 9$ ali $9 \cdot 8 = 8 \cdot 8 + 8$

Zmožnost uporabe več različnih strategij za določanje vrednosti enakega produkta je v fazi učenja koristno, učenec sam prevzame tisto, ki mu je enostavnejša.

Produkti dveh enakih števil od 0 do 10 lahko služijo kot oporna točka tudi za določanje vrednosti produkta sosednjih števil, zato jih je vse smiselno memorirati (Slika 6).

Kaj nam čas reševanja pove o strategijah

Načini določanja produktov so na sliki 7 nanizani od najhitrejšega do najpočasnejšega. Učenec, ki ne pozna 'na pamet' vrednosti produkta, se običajno zateče k strategiji s seštevanjem ali odštevanjem od njemu znane vrednosti. Pri produktu $7 \cdot 4$ je to lahko $35 - 7$ ali $14 + 14$ ali $21 + 7$. Zato lahko pravočasna reakcija učitelja na napako učenca pri poštevanki razreši napačno izgrajeno miselno shemo računske operacije seštevanja ali odštevanja. Učenec, za katerega lahko trdimo, da je usvojil do avtomatizma zmnožke v obsegu števil 10×10, bodisi ve (je memoriral), koliko je vrednost produkta, bodisi zanesljivo in hitro uporablja ustrezne strategije.

Za katere produkte imajo učenci izdelane ustrezne (hitre) strategije, lahko sklepamo s pomočjo drugega kazalnika – časa za vpis odgovora.

Ko pri učencu zaznamo podobno situacijo, kot je prikazana v tabeli (Slika 8) za poštevanko števila osem, je smiselno najprej preveriti, katero strategijo ali strategije uporablja (za produkta števila osem in štiri ter osem in šest) in mu bodisi ponuditi alternativno - hitrejšo strategijo bodisi ga vzpodbuditi k dodatni vaji.

Niso vse napake enake

Za kakovostno povratno informacijo učencu, ki mu bo pomagala izgraditi ustrezno miselno shemo, so učitelju v največjo pomoč učenčeve napake. S pomočjo teh učitelj lahko ugotovi, katero strategijo uporablja učenec in v katerem koraku uporabe ima težave. Več kot je evidentiranih napak, lažje učitelj ugotovi, ali gre pri posamezni napaki za osamljen primer ali za posledico napačnih strategij, za težavo pri konkretnem zmnožku ali pri več zmnožkih istega faktorja.

Na podlagi analize napak posameznega učenca ali skupine učencev je smiselno za poštevanke števil ali posamezne produkte, ki se izkažejo kot problematični (ponavljajoča istovrstna napaka):

- Pogovoriti se o vzrokih za napako – preveriti njihovo aktualno strategijo določanja zmnožka ali zmnožkov,
- ponuditi jim različne reprezentacije teh izrazov (slikovni in konkretni pripomočki) – z njihovo pomočjo učencem pokazati, kje njihova aktualna strategija odpove,
- jim omogočiti, da sami oblikujejo in utrdijo novo strategijo – po potrebi jim pomagamo,
- preverimo uspešnost te intervencije.

Napake pri nekaterih izrazih so tako običajne, da lahko učencu tudi brez njegovih dodatnih informacij pojasnimo, zakaj je njegov odgovor napačen (primer poštevanke števila 0, ki jo učenci zamenjujejo s poštevanko števila 1). Pri drugih izrazih se pojavlja toliko različnih napačnih odgovorov, da je običajno pogovor z učencem potreben. Učenci za napačno vrednost produkta števil 6 in 4 zapišejo kar 13 različnih vrednosti (to so: 28, 42, 32, 20, 12, 8, 16, 30, 23, 18, 21, 26, 22). Nekatere z gotovostjo pripišemo napaki »sosednje poštevanke« (28, 20, 30, 18, 21), nekaj napačni strategiji (26), za ostale pa je smiselno od učenca zahtevati dodatna pojasnila. Istovrstne in ponavljajoče se napake učenca s pomočjo tehnologije relativno enostavno zaznamo ter podamo kakovostno povratno informacijo.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1,39	1,71	1,88	2,19	1,91	1,65	1,38	1,62	1,69	1,74	2,24
1	1,68	1,78	1,77	1,95	1,77	3,15	1,89	2,22	1,76	2,17	2,74
2	1,42	2,54	2,14	2,22	3,15	2,59	2,54	2,77	3,11	3,12	2,40
3	1,99	2,00	2,53	3,14	3,35	2,86	3,46	4,20	4,45	3,85	2,56
4	1,83	1,70	3,22	2,86	3,55	2,55	4,40	4,85	6,16	4,42	2,44
5	1,86	1,81	2,51	3,05	3,60	2,77	3,25	4,23	3,24	4,37	2,13
6	2,02	1,84	2,85	4,18	4,96	3,62	4,23	4,03	5,37	4,49	2,23
7	1,74	2,58	3,05	4,61	4,12	4,28	3,95	3,40	3,92	4,27	2,24
8	2,00	2,34	3,44	4,82	6,85	3,57	5,86	4,03	4,93	4,76	2,15
9	1,83	2,37	3,01	4,45	5,60	3,89	5,27	4,75	4,00	3,04	2,63
10	3,05	2,42	2,14	2,07	2,29	2,47	2,20	2,44	2,10	2,53	2,99

Slika 8: Povprečen čas, potreben za določitev vrednosti posameznega produkta. (n = cca 500 000)

Tehnologija brez učitelja

V fazi strukturiranega poučevanja poštevanke je vloga učitelja nenadomestljiva. Učitelj uporablja tehnologijo kot pripomoček za hitro in enostavno analizo stanja. Kasneje (v drugem in tretjem triletju ter srednji šoli) postane tehnologija pripomoček učenca za samoevalvacijo, saj mu pomaga najti vrzeli v znanju. Te vrzeli v obliki pomanjkljivih ali napačnih strategij lahko učenec odpravlja sam ali mu pri tem pomaga učitelj, kar je neprimerno bolj učinkovito.

Prvi faktor \ Drugi faktor	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	2	0	1	0	0	0	0	0	1
2	1	1	2	4	2	0	1	0	1	0	3
3	1	1	6	2	4	0	4	2	5	5	1
4	1	2	4	1	5	2	3	8	6	6	1
5	1	1	2	0	0	2	1	4	1	2	1
6	1	1	6	5	13	1	4	5	8	4	1
7	1	1	3	5	9	5	9	6	6	6	1
8	1	1	6	6	9	2	10	7	8	3	1
9	1	2	2	5	7	4	5	8	3	3	2
10	1	1	3	1	1	1	1	2	1	1	4

Slika 9: Število različnih napak za posamezni izraz poštevanke, ki odstopajo po pogostosti. (n = cca 500 000)

enominutnih vaj v časovnem obdobju enega leta). Ti izbrani učenci so še nekoliko spretnejši pri delu s tipkovnico, saj je njihov povprečni izmerjeni čas vpisa enega števila 1,78 sekunde. V grafih (Slika 10 do 14) so ponazorjeni povprečni časi za en izraz poštevanke v odvisnosti od zaporednega števila njihove enominutne vaje (n = 33114).

Velika oscilacija rezultatov v 3. in deloma 4. razredu je znak, da lahko uspešnost z vajo še izboljšamo. Tudi takrat, ko rezultat zaniha v višjih razredih učence povabimo k izboljšanju le tega (primer - učenka 5. razreda v 118. poskusu). Konsistentni rezultati (primera učenk iz 6. in 7. razreda) pa sta zelo zanesljiv pokazatelj za učitelja, da učenec zanesljivo izvaja operacije množenja v obsegu 10 × 10 in je usvojil poštevanko do avtomatizma.

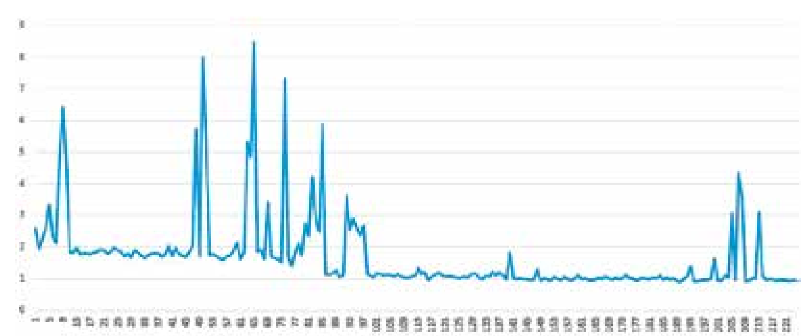
Kdaj je vaje dovolj?

Pričakovati od učencev oziroma dijakov, da bodo z intenzivnim utrjevanjem poštevanke svojo učinkovitost izboljševali v nedogled, je nesmiselno. Na podlagi zbranih podatkov smo poskušali poiskati tisto točko, ko intenzivna vaja ni več nujno potrebna.

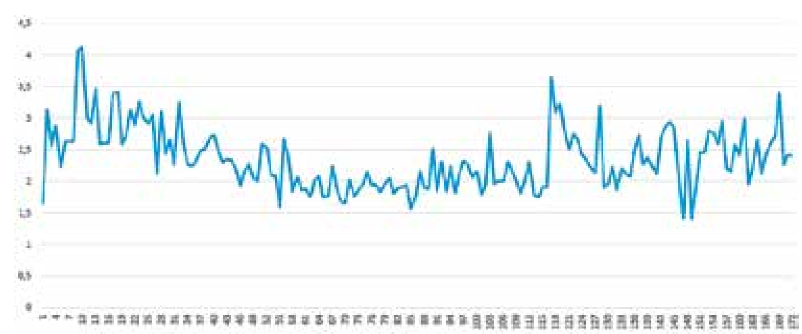
Pri uporabi tehnologije (pa tudi sicer) je določanje zmnožka dveh števil v grobem sestavljeno iz treh korakov: branje izraza, določanje vrednosti izraza in vpis vrednosti izraza. Da bi natančno opredelili čas, ki ga uporabnik potrebuje za določanje vrednosti izraza, moramo od skupnega časa odšteti čas branja in vpis vrednosti izraza. Aplikacija »Vadnica poštevanke« učencem omogoča, da vadijo delo s tipkovnico na svojem mobilnem telefonu tako, da se jim na vrhu ekrana prikaže število – oni pa ga samo pretipkajo. Pri tem aplikacija beleži čas, potreben za posamezni vpis. Ta vaja je med učenci sicer manj uporabljana kot poštevanka, vendar smo vseeno zbrali nekaj več kot 170.000 zapisov števil, iz katerega lahko določimo povprečen časa za vpis enega števila – ta znaša 2,2 sekundi, najhitrejši pa pretipkajo število v manj kot sekundi (tudi dvomestno število). Ti dve sekundi je smiselno upoštevati, ko analiziramo rezultate hitrosti vpisa poštevanke.

Iz množice podatkov smo izbrali pet učencev, po enega iz 3., 4., 5., 6., in 7. razreda – vse takšne, ki so imeli veliko število poskusov (skoraj vsi več kot sto

Slika 10: Povprečen čas in zaporedna številka vaje - učenka 3. razreda.



Slika 11: Povprečen čas in zaporedna številka vaje - učenec 3. razreda (do 200. poskusa) - kasneje učenec 4. razreda (med poskusom št. 100 in 200 je učenec vadil zgolj poštevanko števila 7).



Slika 12: Povprečen čas in zaporedna številka vaje - učenka 5. razreda (do 150. poskusa) - kasneje učenka 6. razreda.

Slika 13: Povprečen čas in zaporedna številka vaje - učenka 6. razreda.

Slika 14: Povprečen čas in zaporedna številka vaje - učenka 7. razreda.

Zaključek

Raziskovanja smo se lotili zaradi relativno pogostih zapletov pri reševanju algebrskih nalog v višjih razredih osnovne šole, katerih vzrok smo neposredno pripisali neznanju poštevanke. Začetna analiza testiranj poštevanke nam je ta sum potrdila, saj je kazala, da se ta cilj (avtomatizacija poštevanke) razvija dlje, kot to predvideva učni načrt. Podrobnejša analiza (s pomočjo aplikacije za mobilne telefone) pokaže velike razlike med učenci – so takšni, ki poštevanko avtomatizirajo že ob zaključku 3. razreda, so pa tudi takšni, ki imajo še v višjih razredih težave s hitrostjo in zanesljivostjo priklica vrednosti posameznih izrazov. Prav tako nimajo vsi učenci težav z istimi izrazi, pa tudi tisti, ki imajo težave z istimi izrazi, imajo lahko za to različne vzroke. Tako nehomogeni rezultati testiranj kličejo po individualizaciji, pri kateri nam je tehnologija v veliko pomoč. Učitelj lahko s pravočasnim vpogledom v rezultate in z oblikovanjem individualizirane povratne informacije učencu pomaga popraviti napačno izgrajene miselne sheme, kasneje pa spremlja učinkovitost svoje intervencije. Tudi tehnologija sama, brez posredovanje učitelja, lahko z enostavno povratno informacijo (prav/narobe) učenca vzpodbudi k oblikovanju pravilnih miselnih shem, predvsem pa zmanjša potreben čas, za priklic pravilne vrednosti izrazov poštevanke.

Množica zbranih podatkov ima za učitelje velik pomen, saj nam omogoča vpogled v najbolj pogoste napake in posredno v način razmišljanja učencev ob določanju vrednosti produktov. Tako lahko vnaprej pripravimo kakovostne povratne informacije in pojasnila. ■

Viri

Bloom, B. (1986). *The Hands and Feet of Genius – Automaticity.* Educational Leadership, februar. Stran 70–79.

Burch, N. (1974). The Learning Stages. V Gordon T.: *Teacher Effectiveness Trainingbook*. ZDA: Gordon Training International.

Repolusk, S. (2010). Primeri različnih pristopov pri matematičnem modeliranju, stran 81–89. V Žakelj, A. (2010): *Posodobitev pouka v gimnazijski praksi*, *Matematika*. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.

Wells, K. (2015). *Improving the Automaticity of Multiplication Facts with Four Grade Students*. ZDA. Eastern Illinois University.

Wong, M. (2007). Improving Basic Multiplication Fact Recall for Primary School Students, *Mathematics Education Research Jurnal*, *19*(1), stran 89–106.

Žakelj, A. (2011). *Učni načrt za osnovno šolo, Matematika*. Ljubljan: MIZŠ in ZRSŠ.

Elementi formativnega spremljanja pri matematiki v srednji šoli

Rok Lipnik
Gimnazija Celje – Center

Povzetek

Matematika in formativno spremljanje gresta z roko v roki – to je pokazala že vsebina prejšnjih revij Matematika v šoli in priročnika Formativno spremljanje pri matematiki. V prispevku predstavljamo usvajanje poglavja o deljivosti z uporabo elementov formativnega spremljanja in še ostala orodja, ki jih pri pouku pogosto uporabljamo.

Ključne besede: poučevanje matematike, formativno spremljanje

Formative Assessment Elements in High-School Mathematics

Abstract

Mathematics and formative assessment go hand-on-hand, as demonstrated in previous *Matematika v šoli* (*Mathematics in School*) editions and the manual *Formativno spremljanje pri matematiki* (*Formative Assessment in Mathematics*). The article focuses on the assimilation of the chapter on division using formative assessment elements and other tools frequently used in class.

Keywords: teaching mathematics, formative assessment

1. faza: Priklic in preverjanje predznanja

Dijaki marsikaj vedo in razumejo, včasih samo na intuitivni ravni, dostikrat pa znajo to tudi dobro ubesediti.

Kako prikličemo znanje? Pomagam si s primeri in vprašanji, povezanimi z vsebino. Pri deljivosti dijake vprašam »Kako lahko na pamet vemo, ali bo število deljivo z dve?« ali recimo »Ali lahko rečemo, da je število 10 deljivo s 5? Kaj pa število 5 deljivo z 10?« Preverimo tudi na primerih deljenja, na primer 12 s 3 in 12 s 7. Ugotavljamo, v čem je razlika, kaj povezuje števili v prvem primeru (delitelj/večkratnik) in ali ta povezava velja tudi v drugem primeru (ostanek pri deljenju). S takšnimi vprašanji dijake spodbujamo, da o problemu razmišljajo, hkrati pa usvajajo tudi izražanje v matematičnem jeziku.

Kako vemo, kdaj so dijaki znanje priklicali? Tu si pomagam s semaforčki. Dijaki

Slika 1: Primer uporabe semaforčkov.

Slika 2: Primer uporabe semaforčkov.

imajo v peresnici ali zvezku pripravljene lističe zelene, rumene in rdeče barve. Z dvigom listka pokažejo svoje strinjanje, razumevanje ali sledenje pogovoru oz. primeru.

Slika 1 prikazuje povratno informacijo dijakov – veliko je rdečih in rumenih lističev, kar pomeni, da trenutno stanje ni zadovoljivo in to je znak, da moramo poskušati še na drug način ali z novim primerom razložiti snov.

Slika 2 prikazuje boljše stanje. Dijaki nakazujejo, da v večini sledijo in razumejo. Tu izkoristimo priložnost in dijake z zelenimi lističi presedemo k dijakom z rumenimi lističi. Tako bodo tisti, ki razumejo, pomagali sošolcem, ki morda še niso vsega razumeli, hkrati pa krepijo tudi socialne veščine in izražanje v matematičnem jeziku.

V zaključku prve faze učnega procesa najavimo temo in osnovne namene učenja, ki naj bi jih dijaki dosegli. Skupaj pa bomo po usvajanju znanja sestavili kriterije uspešnosti, ki bodo dijakom v pomoč pri samoocenjevanju in ocenjevanju napredka.

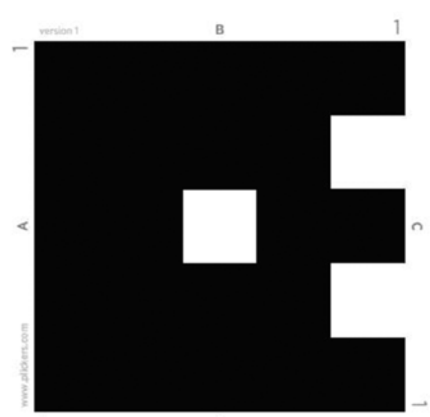
2. faza: Usvajanje novega znanja

Usvajanje znanja je pri »utečenem« frontalnem načinu poučevanja linearno – učitelj napiše ali narekuje definicije, izreke, lastnosti, pravila … dijaki pa jih pridno zapišejo in se jih naučijo. Težko pa na tak način zagotovimo, da dijaki zapisano razumejo. Si želimo, da se vsega naučijo na pamet? Pri matematiki zagotovo ne.

Kot pri priklicu znanja tudi tu dijake najraje vodimo k rezultatu skozi vprašanja. Tokrat bolj splošno, na primer: »Kdaj bo število a deljivo s številom b?« »Kako smo to videli na primeru števil 12 in 3?« Vprašanja kot ta, dijake vodijo k razmišljanju in hkrati k formuliranju definicije.

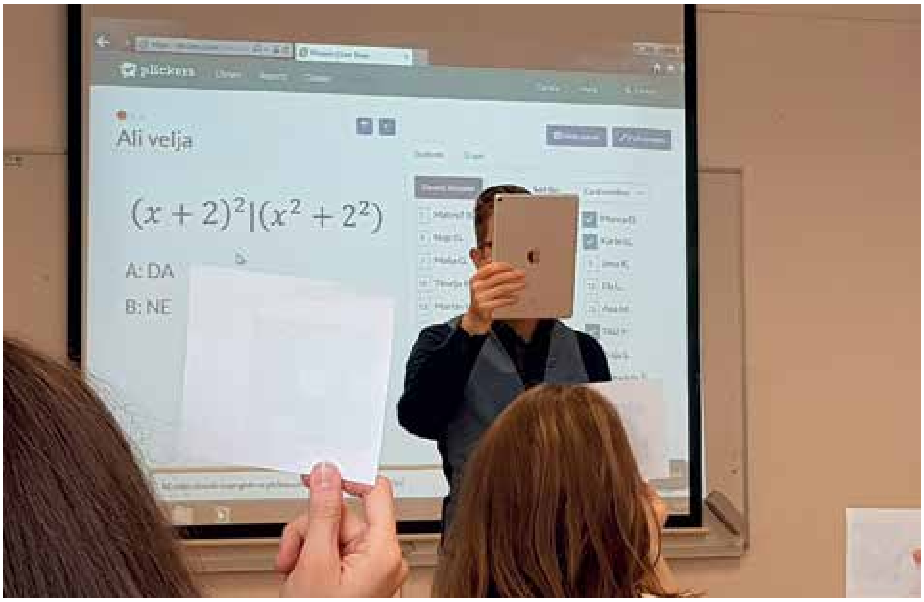
Čas je, da usvojeno znanje preverimo s primeri. Matematiki imamo velik nabor možnosti, kako znanje preveriti. Sam dostikrat dijake spodbudim, da sošolcu sestavijo kratek primer. Sliši se enostavno, a da sestaviš primeren (in rešljiv) primer, moraš dovolj dobro poznati in razumeti pravila, lastnosti in definicije.

Drugi način, ki ga pogosto uporabljam, vključuje interaktivno spremljanje znanja. Dijaki odgovarjajo na vprašanja, vidna na projekciji skozi aplikacijo Plickers (www.plickers.com) kot je prikazano na sliki 4. Vsak dobi svoj listič s kodo (podobno QR-kodi), ki služi kot listič za podajanje odgovorov.



Slika 3: Listič za odgovarjanje.

Vsak listič ima zaporedno številko (zgornji je številka 1) in štiri možne odgovore – A, B, C in D – vsak je zapisan na eni



Slika 4: zbiranje povratnih informacij z aplikacijo Plickers.

stranici. Tisti odgovor, ki gleda navzgor, je odgovor, ki ga dijak sporoči. S tablico ali telefonom (na sistemu Android ali iOS) preletimo razred in hitro poberemo povratne informacije.

Vprašanja lahko vključujejo tudi fotografije, kar pomaga pri zapisu matematičnih simbolov in enačb, kot je vidno na sliki 5.

Učitelj vidi porazdelitev odgovorov, preveri pa lahko tudi poimensko (Slika 6 in 7).

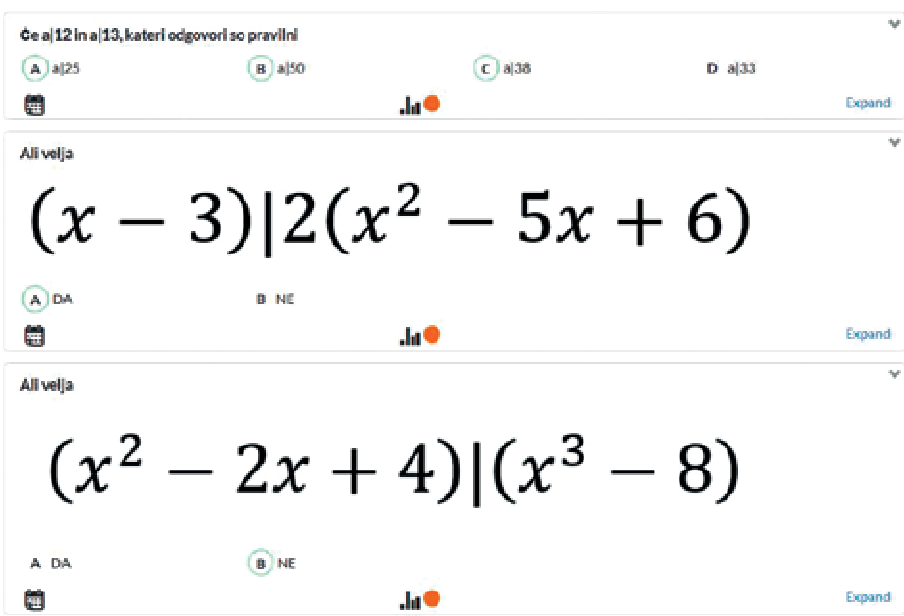
Konec druge faze spremlja priprava kriterijev uspešnosti. Dijake ob koncu poglavja ali teme vprašamo, kako bodo vedeli, ali znajo. Prvih nekaj načrtovanj kriterijev uspešnosti je zagotovo težjih – dijaki dostikrat vidijo le končno sliko in predlagajo kriterije kot na primer: »Znam reševati naloge z deljivostjo.« Takrat se pogovorimo o poti, po kateri smo do pojma prišli in iščemo sestavne dele, ki so za razumevanje deljivosti pomembni. Tako smo pri uvodnem poglavju deljivosti nastavili kriterije:

- Preverim, kdaj sta števili v relaciji deljivosti.
- Pojasnim povezavo med večkratnikom, deliteljem in deljivostjo.

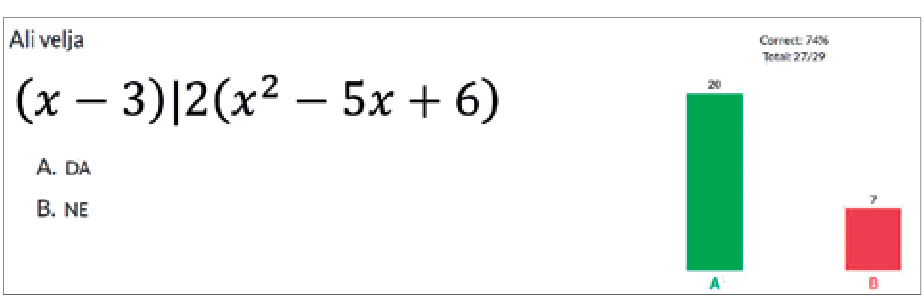
Izogibam se glagolom znati in vedeti, saj sta preveč splošna, dijaki pa težko preverijo, ali so kriterij dosegli ali ne.

3. faza: Utrjevanje znanja

Pri utrjevanju in preverjanju znanja je ključno, da dijaki in učitelj dobijo povratno informacijo. Dijaki tako ugotovijo, ali so dosegli zastavljene kriterije oz. kateremu področju se morajo bolj posvetiti. Učitelji pa ugotovimo, katere vsebine so pereče in bodo potrebne dodatnega utrjevanja ali celo ponovne razlage. To je idealna priložnost, da dijake razdelimo v skupine, kjer posamezna skupina utrjuje točno določen del snovi. Pri deljivosti naredimo skupino za utrjevanje deljivosti števil, skupino za utrjevanje deljivosti izrazov in skupino za utrjevanje dokazovanja deljivosti z lastnostmi relacije deljivosti.



Slika 5: Prikaz vprašanj in možnih odgovorov.



Answer	Card #	First name
B	25	Amadeja
A	15	Ana
A	19	Blaž
A	12	Ela
A	21	Eva

Slika 6 in 7: Prikaz odgovorov.

Matematika v šoli, št. 1., letnik 24, 2018

S križcem označi, ali kriterij po tvojem mnenju obvladaš ali ne. Pred uro v levi stolpec in po uri v desni stolpec.

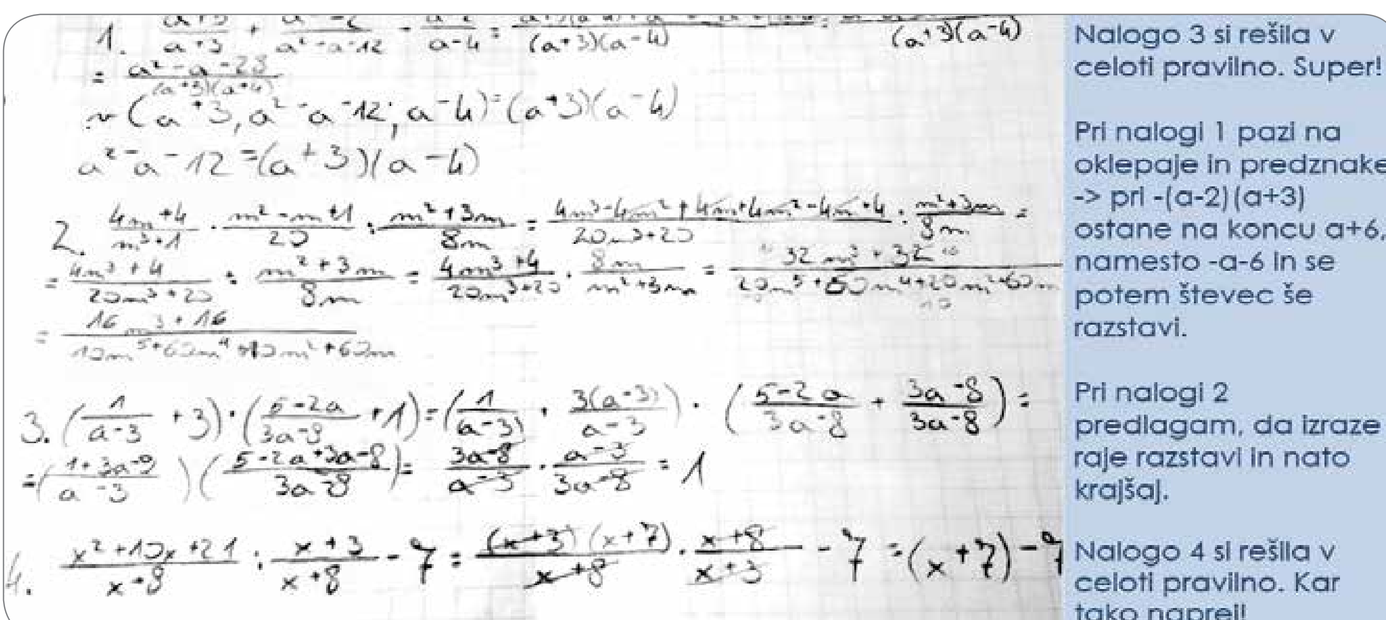
PRED URO		Obvladovanje kriterijev	PO URI	
DA	NE	Kriterij	DA	NE
[redacted]	X	Rešim enačbo z absolutno vrednostjo.		X
X		Računam z absolutno vrednostjo.	X	
	X	Rešim neenačbo.	X	
X		Zapišem in narišem interval.	X	
	X	Poiščem presek in unijo intervalov.		X

Slika 8: Doseganje kriterijev uspešnosti.

1. Odgovori:
   a. Ali velja $3|(5^{2n-1} - 2 \cdot 5^{2n} + 5^{2n+1})$?
   b. Pokaži, da velja $(a-1)|(a^3 + 6a^2 - a - 6)$.
   c. Na prafaktorje razcepi 104.

Slika 9: Preverjanje znanja s samovrednotenjem.

Slika 10: Izhodna lističa.



Slika 11: Komentarji pri ocenjevanju.

Slika 8 predstavlja možen vprašalnik, z uporabo katerega dijaki označijo, kako obvladajo posamičen kriterij uspešnosti. Primer se sicer navezuje na absolutno vrednost, a je lahko kot oblika uporaben v vseh poglavjih.

4. faza: Preverjanje znanja

Pri preverjanju znanja ponovno uporabim lističe Plickers, zaključne listke ali vprašalnik o doseganju kriterijev uspešnosti.

Slika 9 prikazuje možno preverjanje znanja (le uvodno nalogo), kjer dijak naloge reši, nato pa označi, kako ocenjuje svoje znanje. Dijaki morajo vedeti, kaj še morajo vaditi oz. se naučiti, učitelj pa mora vedeti, ali so učenci pripravljeni na ocenjevanje.

Slika 10 prikazuje izhodne lističe. Dijaki na listič zapišejo, kako presojajo svoje znanje. Zelen listič uporabijo, kadar menijo, da znajo; rumenega, kadar menijo, da vsega še ne obvladajo, in rdečega, če menijo, da njihovo znanje še ni zadovoljivo. Na tak način hitro vidim splošno stanje in preberem, kaj so napisali v komentar – tako lahko načrtujem naslednje šolske ure.

5. faza: Ocenjevanje znanja

Pri ocenjevanju znanja formativno spremljanje na koncu trči v sumativno spremljanje – v šolah brez ocen ne gre zaradi pravilnika o preverjanju in ocenjevanju. Kljub raziskavam, ki kažejo, da ocene zmanjšujejo uspešnost in motivacijo za učenje, so žal pri nas še obvezne.

Kljub vsemu poskušam omiliti vpliv ocen tudi s formativnim spremljanjem. Pri ocenjevanju tako pogosto dijakom k nalogi zapišem le komentar. Po načelih kakovostne povratne informacije ta najprej vedno vključuje pozitiven del, nato predlaga izboljšave in na koncu povzame dobro (A. Holcar Brunauer, 2016).

Dijake na tak način ocenjevanja opozorim in jih tudi pozovem, da se na podlagi komentarjev in kriterijev uspešnosti ocenijo sami. Sicer težko trdim, da jim vedno uspe primerno oceniti svoje znanje, a vsekakor že razmišljanje o tem spodbuja k bolj realni presoji uspešnosti.

Zaključek

Formativno spremljanje opolnomoči učitelja z različnimi orodji skozi vse faze poučevanja, a pomembnejše je opolnomočenje dijakov za:

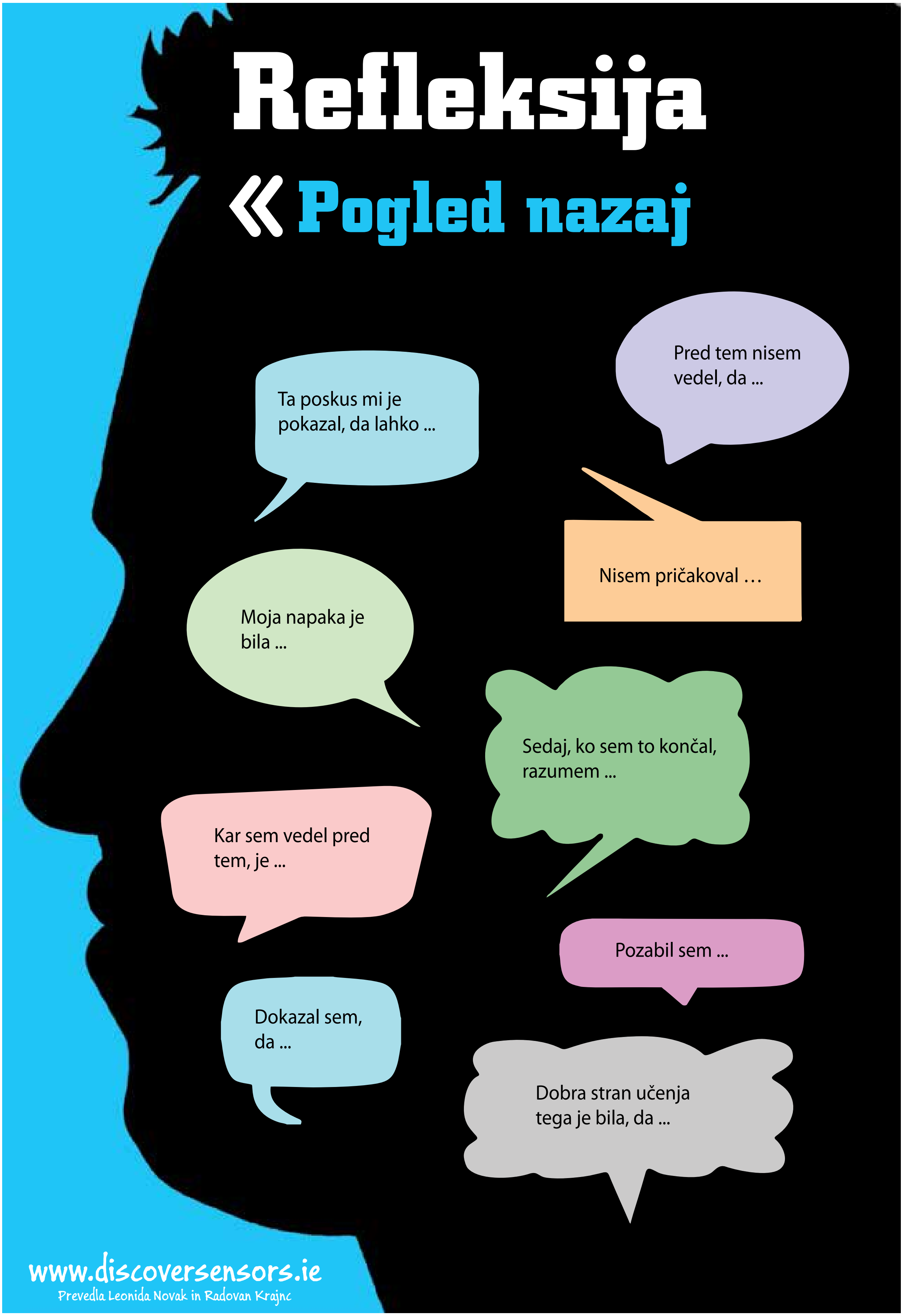
- sodelovanje pri določanju namenov učenja in kriterijev uspešnosti,
- razvijanje veščin dela v parih in skupinskega dela,
- usmerjanje lastnega procesa učenja,
- samovrednotenje lastnega znanja in procesa učenja.

Učiteljem, ki razmišljajo, da bi se lotili poučevanja po načelih formativnega spremljanja, svetujem, naj se tega lotijo počasi, postopno in preudarno, vsekakor pa naj se ne bojijo neuspeha in težav – ravno skozi neuspele primere in težave se največ naučimo preko refleksije lastnega dela. ■

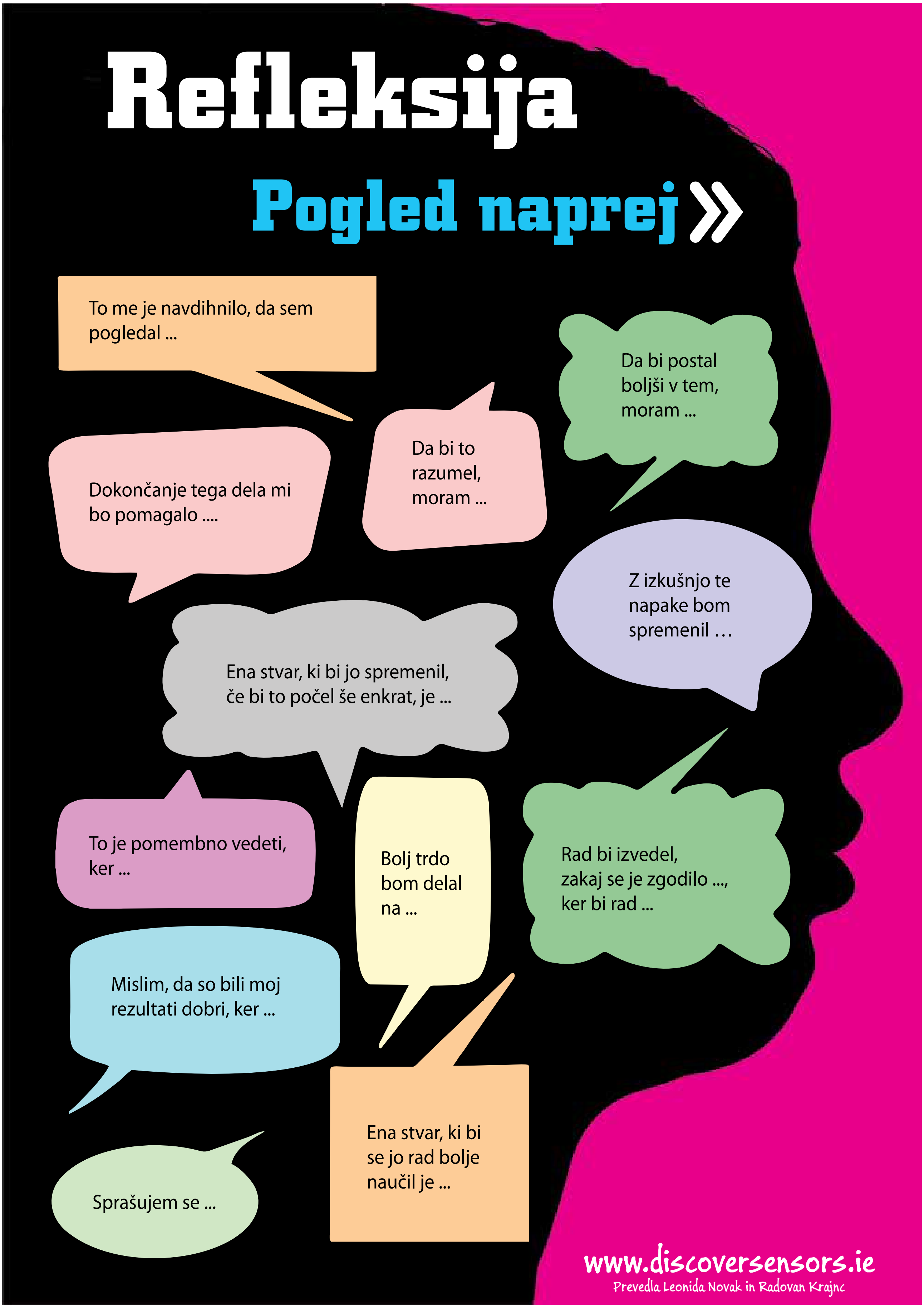
Viri

Holcar Brunauer, A. idr. (2016). *Formativno spremljanje v podporo učenju.* Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.

Žakelj, A., Bon Klanjšček, M., Jerman, M., Kmetič, S., Repoluk, S., Ruter, A. (2008). *Učni načrt. MATEMATIKA: Gimnazija.* Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.



Priredila: Lidija Jug



Priredila: Lidija Jug

Formativno spremljanje pri vsebini VEČKOTNIKI

Katja Kmetec
Osnovna šola Brinje, Grosuplje

Povzetek

V članku avtorica predstavi obravnavo vsebine Večkotniki z elementi formativnega spremljanja. Predstavi konkretne primere za različne elemente formativnega spremljanja (od preverjanja predznanja, sooblikovanja namenov učenja, zbiranja dokazov o procesu učenja in znanja, do podajanja povratne informacije) in opiše izkušnje in poda refleksijo ob preizkušanju metode.

Ključne besede: formativno spremljanje znanja, večkotniki

Formative Assessment in POLYGONS

Abstract

The article introduces the content on polygons using formative assessment elements. The author gives specific examples for various formative assessment elements (from prior knowledge assessment, co-creating learning objectives, collecting evidence on learning process and knowledge to providing feedback), describes experiences and provides reflection on method testing.

Keywords: formative knowledge assessment, polygons

Uvod

V zadnjem času je veliko govora o formativnem spremljanju znanja. Učitelji se zaradi številnih sprememb v šolstvu teh kar malce bojimo oz. smo do njih nestrpni; mnogokrat se zdi, da se pojavijo brez poglobljene analize in smiselnega namena. Kakor se hitro pojavijo, pogosto tudi hitro izginejo. Seveda pa so tudi izjeme, ki prinašajo napredek in nas vodijo do bolj kakovostnega poučevanja. Je formativno spremljanje ena izmed njih? Slišala sem več različnih predstavitev formativnega spremljanja. Nekatere so me navdušile, druge ne. Odločila sem se, da bom model poučevanja preizkusila tudi sama, vendar s previdnim, počasnim, predvsem pa smiselnim vnašanjem sprememb. Tako sem za začetek elemente formativnega spremljanja načrtovala pri obravnavi učnega sklopa Večkotniki v 8. razredu, kjer poučujem 3. nivo (torej učno boljše učence).

Že pred pričetkom obravnave sem pripravila grob koncept, kako bo vse skupaj potekalo: od preverjanja predznanja, do obravnave, podajanja kakovostne povratne informacije ter zbiranja dokazov o procesu učenja in znanja. Bolj natančno načrtovanje je potekalo sproti, saj je logično sledilo različnim dokazom o procesu učenja ter znanju in situaciji v razredu. Našo dogodivščino, če lahko tako imenujem preizkušanje poučevanja z elementi formativnega spremljanja, smo skupaj z učenci poimenovali Sostanovalci. Zakaj takšno ime in kakšna je povezava z matematiko, večkotniki oz. formativnim spremljanjem? Vse to sledi v nadaljevanju, prav tako, s kakšnimi težavami, pozitivnimi in tudi negativnimi učinki sem se srečevala pri delu.

Preverjanje predznanja

Prepričana sem, da učitelji matematike vedno preverimo predznanje učencev, saj so matematični koncepti med seboj povezani. Če se izkaže, da učenci nečesa ne znajo, poskrbimo za to, da to znanje čim prej pridobijo. Za usvajanje novega znanja večkotnikov je nujno znanje o trikotnikih in štirikotnikih ter drugih likih. Preverila sem ga preko dveh različnih dejavnosti:

• Preverjanje usvojenosti pojmov z uporabo igralnih kart

Učenci so se razdelili v pare. Vsak par je prejel kup igralnih kart, na katerih so bili različni trikotniki in štirikotniki in opisi posameznih likov (priloga KARTE). Igralca sta karte najprej dobro premešala. Nato jih je vsak vzel osem. Ostale sta vrnila na kup in izmenično jemala po eno karto – bodisi s kupa kart bodisi z odlagalnega kupa. Vsakokrat ko sta karto vzela, sta hkrati izločila eno karto. Zmagovalec je bil igralec, ki je imel prvi v rokah dva para, pri čemer je par predstavljal opis pojma in ustrezna slika. Rešitve niso bile enolične. Med igro sta se učenca lahko pogovarjata in sodelovala, hkrati pa preverjala pravilnost rešitev drug drugega, podajala komentarje in usmeritve. Sama sem opazovala dogajanje. Ob koncu igre je sledil pogovor o pojmih, ki so bili uporabljeni na kartah, in o tem, kaj so učenci ponovili in česa se spomnijo. Da so znanje dodatno utrdili, so morali za domačo nalogo napisati »plonk listič« o štirikotnikih. Navodilo, ki so ga prejeli, je bilo, naj na listič zgoščeno zapišejo ključne informacije, ustrezne skice in naj bodo »plonk lističi« takšni, da jim bodo pomagali pri pisanju preverjanja znanja.

- **Preverjanje predznanja**

Učenci so pisali preverjanje znanja o štirikotnikih (priloga 1, str. 35), pri katerem so si lahko pomagali s svojimi »plonk listki«. Preverjanja znanja tokrat nisem pregledovala jaz, pač pa so si jih pregledali učenci sami. Po dva učenca sta drug drugemu pregledala rešitve in jih ustrezno komentirala.

Preverjanje predznanja je potrdilo, da imajo učenci ustrezno predznanje (poznavanje pojmov, procedur, reševanje problemskih nalog) in da so pripravljeni na usvajanje novih učnih ciljev.

Oblikovanje namenov učenja skupaj z učenci je bilo zame nekaj novega. Običajno jih namreč učencem sama (v grobem) predstavim pred obravnavo vsake nove učne snovi. Precej »umetno« in nesmiselno se mi je zdelo, da bi skupaj z učenci prebirali cilje učnega načrta in jih prevajali v njim razumljiv jezik. Proces sem želela narediti bolj naraven. Zato sem ustvarila umetno situacijo, s pomočjo katere so učenci sami prišli do tega, kaj želijo znati, razumeti, katera dodatna znanja želijo pridobiti. Razdelila sem jih v skupine. Vsaka skupina je prejela velik kartonast model večkotnika, ki je ponazarjal tloris sobe (modeli večkotnikov so se med seboj razlikovali). Zaradi lažje berljivosti v nadaljevanju model večkotnika, ki ponazarja tloris sobe, imenujem »soba«. Člani skupine so za čas obravnave tega učnega sklopa postali sostanovalci. Povedala sem jim, da bodo skupaj reševali različne izzive in usvajali znanje. Med drugim bodo morali:

- izmeriti velikost svoje sobe,
- ugotoviti, kolikšna je vsota notranjih kotov sobe,
- narisati natančen tloris sobe in celo sprogramirati robota, ki bo to naredil namesto njih,
- sobe tudi ustrezno opremiti. Na tla bodo polagali ploščice.

Vprašala sem jih, če imajo dovolj matematičnega znanja, da bodo kos vsem izzivom. Če ne, česa bi se še radi naučili?

Sooblikovanje namenov učenja

Učenci so spontano navedli večino ciljev učnega načrta za sklop Večkotniki, seveda v svojem jeziku (tabela 1). Ker so bili motivirani, da bodo kos prihajajočim izzivom, so cilje učenja sprejeli kot svoje osebne cilje. Zapisali smo jih v skupno »hišo znanja«, plakat v obliki hiše, ki je ves čas obravnave visel v učilnici. Dogovorili smo se, da bo vsaka soba sama spremljala, kdaj doseže posamezni cilj in takrat na plakatu označila, da je cilj dosežen.

Potem pa so sostanovalci komaj čakali, da začnemo z obravnavo večkotnikov.

Obravnava učne snovi

Obravnava je potekala preko številnih dejavnosti. Zastavljene so bile tako, da so bile učencem – sostanovalcem – izziv, hkrati pa je bilo z njimi mogoče pridobiti dokaze o procesu učenja in znanja. Učenci so se hitro vživeli v vlogo sostanovalcev. Pri obravnavi snovi so bili ves čas aktivni, drug drugega so spodbujali in si pomagali; drug drugemu so bili vir učenja, vseskozi so spontano drug drugemu podajali povratne informacije in vplivali na izboljšanje znanja ostalih članov skupine.

Na tem mestu navajam le nekaj izzivov.

Opis večkotnikov

Najprej smo naredili razstavo vseh sob (slika 1).

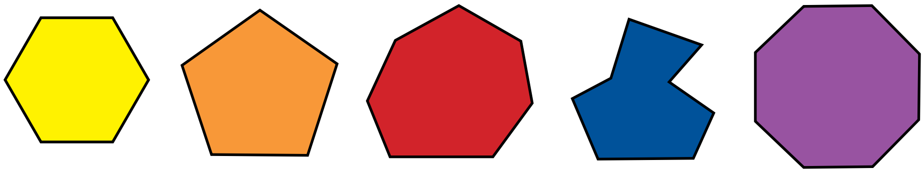
Učenci so jih natančno opazovali in povedali, v čem so si enake, podobne, v čem se razlikujejo.

Nato se lotili izziva: ***Svojim prijateljem, ki vaše sobe niso nikoli videli, jo morate po mobilnem telefonu čim bolj natančno opisati.***

Celotna skupina je pripravila opis sobe. Eden od članov skupine je opis nato pre-

Tabela 1: Cilji iz učnega načrta ter nameni učenja

Cilj iz učnega načrta	HIŠA ZNANJA Namen učenja (moj osebni cilj)
Opišejo večkotnik in ga označijo (oglišča, stranice, kote, diagonale).	Opišem večkotnik in ga označim.
Poznajo vsoto notranjih in zunanjih kotov večkotnika.	Izračunam vsoto notranjih in zunanjih kotov.
Usvojijo pojem pravilni večkotnik.	Vem, kaj je pravilni večkotnik.
Poznajo in uporabljajo strategije načrtovanja večkotnikov.	Narišem večkotnik.
Uporabljajo strategije za računanje obsega in ploščine večkotnika (npr. uporaba obrazca, merjenje, preoblikovanje na znane like).	Izračunam ploščino in obseg večkotnika.
/	Izračunam, koliko diagonal ima večkotnik.



Slika 1: Tlorisi sob v obliki večkotnikov

bral. Preko dejavnosti so učenci dosegli cilj »opišejo večkotnik«.

Kako smo vedeli, da je cilj usvojen? Dokazi o procesu učenja in znanja so bili posnetki opisov, ki smo jih naredili s pomočjo diktafona na mobilnem telefonu. Učenci so jih poslušali in skladno z opisi risali skice sob (večkotnikov). Skupaj smo ugotavljali, kateri opis je najboljši, najbolj natančen. Pri risanju sobe skladno z navodili se je kakršnakoli površnost ali napaka pri opisu hitro pokazala. Posnetek skupine, ki je pripravila najboljši opis večkotnika, je postal vzorčni model.

Preko razgovora so skupine prejele kakovostno povratno informacijo o tem, kaj storiti, da bodo njihovi izdelki drugič še boljši. Pri tem so izhajali iz vzorčnega modela: zakaj je naš opis slabši kot vzorčni? V čem so njegove pomanjkljivosti? Kako bi jih izboljšali? Poskusimo.

Sledila je frontalna obravnava, kako večkotnik pravilno označimo.

Od rokovanj do ugotovitve, koliko diagonal imajo večkotniki

Izziv: ***Preden se vselite v skupno hišo, se spodobi, da se drug drugemu predstavite. Vsak naj se rokuje z vsakim. Vaša naloga pa je ugotoviti, koliko bo vseh rokovanj.***

Učenci so se sprva povsem nesistematično rokovali drug z drugim. Ob koncu vseh rokovanj (skupno je bilo 17 učencev) niso znali povedati števila vseh rokovanj, prav tako ne, kako bi to izračunali. Kako bi rokovanja prešteli bolj urejeno? Eden od učencev je dal predlog: najprej naj se eden rokuje z vsemi; nato naj se naslednji rokuje s tistimi učenci, s katerimi se še ni rokoval – in tako naprej do zadnjega učenca. Med rokovanjem so sproti na tablo zapisovali vsoto vseh rokovanj: $16 + 15 + 14 + 13 + \ldots + 2 + 1$. Eden od učencev se je spomnil anekdote o tem, kako je mladi Gauss seštel vsa naravna števila od 1 do 100, in predlagal, da bi na enak način izračunali vsoto vseh rokovanj: $(16 + 1) + (15 + 2) + (14 + 3) + (13 + 4) + (12 + 5) + (11 + 6) + (10 + 7) + (9 + 8) = 8 \cdot 17 = 136$.

Drug učenec pa je razmišljal drugače: Vsak od učencev se je rokoval s 16 ostalimi učenci. Torej je rokovanj $17 \cdot 16$. Vendar tako dobimo dvakratno število vseh rokovanj, saj sta se vedno hkrati rokovala po dva učenca. Za pravilno rešitev moramo torej dobljeno število deliti z 2.

Sostanovalci so dobili dodatna vprašanja: Kaj bi se zgodilo, če bi prišel še en učenec? Kako bi to vplivalo na število vseh rokovanj?

Od rokovanj smo prišli na naslednji izziv oz. problemsko situacijo: sostanovalci so morali najprej ugotoviti, koliko diagonal ima njihova soba. Nato so pri sosedih poizvedeli, koliko diagonal ima njihova soba, ki je v obliki drugega večkotnika. Na tabli so oblikovali skupno zbirno tabelo in nazadnje ugotovili, kako izračunamo število diagonal v poljubnem večkotniku.

Cilj »Učenci znajo izračunati število diagonal v poljubnem večkotniku« sicer ni zapisan v učnem načrtu, vendar pa je bil to eden od ciljev pouka, ki so ga predlagali učenci. Sama sem ga »opravičila« in povezala s ciljema »opazujejo in prepoznajo pravilo v vzorcu in vzorec nadaljujejo« ter »prepoznajo pravilo v vzorcu, poiščejo posplošitev in zapišejo algebrski izraz«. Učenci so preko opazovanja vzorcev (število diagonal se povečuje za 2, 3, 4, 5 …) prišli do rekurzivne formule za izračun števila diagonal. Nekateri so sami izpeljali algebrski izraz za izračun števila diagonal, drugi so ga ustrezno interpretirali, tretji pa so ga znali uporabiti pri izračunu števila diagonal v poljubnem večkotniku. Dokazi o procesu učenja in znanja so bili: pravilno določeno število diagonal, ki so ga učenci lahko sami preverili pri svojih večkotnikih; predstavitve problemske naloge; razlage in interpretacije formul; uporaba formule pri konkretnih nalogah.

Povratno informacijo sem učencem tokrat podala ustno, ob predstavitvi rešitve problemske naloge. Učenci so predstavili svoj način razmišljanja, povratna informacija se je nanašala na vzrok morebitne napake. Npr.:

- Učenec: Število diagonal dobimo tako, da število vseh oglišč pomnožimo z 1 manjšim številom. Dobljeno število delimo z 2.
- Učiteljica: Pojasni, kako si razmišljal.
- Učenec: Iz vsakega oglišča narišemo diagonale, zato vzamemo število n (toliko je vseh oglišč). Potem to pomnožimo s številom, ki je za 1 manjše.
- Učiteljica: Zakaj pa to pomnožimo s številom, ki je za 1 manjše?
- Učenec: Ker diagonala vedno povezuje dve različni oglišči. Se pravi, da je ne moremo narisati tako, da začnemo v oglišču A in v oglišču A tudi končamo.
- Učiteljica. Pravilno razmišljaš. Kaj pa, če oglišče A povežeš z ogliščem B? Je to tudi diagonala?
- Učenec: Aja, ne, ni. Pa to tudi ne (pokaže drugo sosednje oglišče oglišča A).
- Učiteljica: Bi svojo formulo zdaj kako spremenil?
- …

Vsota notranjih in zunanjih kotov večkotnika

Izziv: ***Dobro si oglejte notranje kote vaše sobe. Koliko jih je? Kako veliki so? Kolikšna je njihova vsota? Kaj pa velja za vsoto zunanjih kotov? Kakšne rezultate bodo dobili člani drugih skupin?***

Učenci so postavili domneve, kolikšna je vsota notranjih in zunanjih kotov njihovega večkotnika. Nato so morali domnevo na kakršenkoli način potrditi ali ovreči. V pomoč so dobili fotokopijo tlorisa svoje sobe.

Zanimivo se mi zdi, koliko različnih načinov reševanja se je pojavilo:

- Sostanovalci, katerih soba je bila v obliki pravilnega večkotnika, so izmerili velikost enega notranjega kota in jo pomnožili s številom vsem notranjih kotov.
- Sostanovalci druge sobe (ki ni bila pravilni večkotnik) so izmerili velikosti vsakega notranjega kota ter izračunali vsoto.
- Sostanovalci tretje sobe so uporabili raztrgalni poskus in tako dobili približno vsoto.

- Le ena skupina je večkotnik razdelila na trikotnike in izpeljala formulo za izračun vsote notranjih kotov $(n - 2) \cdot 180°$.

Dokazi o procesu učenja in znanja za učni cilj »Poznajo vsoto notranjih in zunanjih kotov« so bili tudi v tem primeru izdelki učencev. Vsaka skupina je predstavila svoj način reševanja, ostali učenci pa so podali povratno informacijo v zvezi z načinom reševanja problemske situacije: kaj se jim zdi dobro, kaj bi lahko izboljšali.

Tloris sob (načrtovanje večkotnikov)

***Naslednji izziv sostanovalcev je bil:* natančno narišite tloris svoje sobe. Večkotnika ne smete prekopirati. Izmerite lahko poljubne dolžine, kote …**

Učenci so se naloge lotili na različne načine. Sami so zlahka preverili pravilnost rešitve, saj so primerjali sliko z originalom in ugotovili, ali sta skladna ali ne. Slika tlorisa sobe je bila dokaz o procesu učenja in znanja. Sledil je pogovor o tem, katere podatke so izmerili, da so lahko narisali sliko. Kolikšno je najmanjše število podatkov, ki jih potrebujemo, če želimo natančno narisati večkotnik? Ali je odgovor odvisen od tega, koliko oglišč ima večkotnik? Ali je odvisen še od česa drugega? Če da, od česa? Ali so imele vse skupine enako zahtevno nalogo?

Glede na to, da gre za učno boljše učence, so povratno informacijo brez težav pridobili sami. Ugotovili so vzrok morebitne napake oz. uvideli možnost spretnejšega načina reševanja naloge.

Frontalno smo nadaljevali s prikazom nekaterih strategij načrtovanja pravilnih večkotnikov.

V eni kasnejših ur, pri kateri se nam je pridružil tudi učitelj tehnike, so morali učenci sprogramirati robota tako, da je narisal njihovo sobo. Izdelki sostanovalcev so bili dokaz o procesu učenja in znanja, obenem pa izhodišče za dobro refleksijo oz. samorefleksijo o znanju (Učni list).

Velikosti sob (ploščine večkotnikov)

***Izziv:* Sprehodite se po učilnici in ugotovite, kateri sostanovalci imajo največjo sobo. Ste prepričani? Kako bi to preverili? Kolikšna je ploščina tal vaše sobe?**

UČNI LIST

1. Z robotom narišite tloris svoje sobe.
2. Kolikšno pot je naredil robot pri načrtovanju vaše sobe?

Kako uspešni ste bili pri svojem delu?
Katera matematična znanja ste uporabili pri nalogi?
Ste pri delu naredili kakšno napako? Kako ste jo popravili?
Bi drugič kaj storili drugače – bi kaj izboljšali?

Učenci so brez težav prepoznali največjo sobo, saj je bila rešitev očitna. Težje pa je bilo določiti natančne ploščine večkotnikov. Kljub temu so se dobro znašli in večkotnik razdelili na like, katerih ploščine so že znali izračunati. Izračunali so vsoto teh ploščin ter tako dobili ploščino večkotnika.

Sostanovalci so predstavili svoje rešitve. Večkotnike so nato uredili po velikosti glede na dobljeno ploščino. Tudi v tem primeru so zlahka pridobivali različne dokaze o procesu učenja in znanja.

Dokazi o procesu učenja in znanja in povratna informacija učencem

Običajno znanje preverjam s pisnimi preverjanji znanja, pri katerih sem pozorna, da so naloge sestavljene tako, da preverjajo različne vidike znanja. Dodatno znanje vseskozi zasledujem preko razgovora in različnih dejavnosti, ki jih izvajamo med poukom. Mislim, da imam soliden pregled nad znanjem posameznih učencev. Pač pa to ne velja za moje učence, ki so običajno deležni le informacije o doseženem številu odstotkov pri vsakem preverjanju znanja, ki pa jih ne spodbuja k učenju v tolikšni meri, kot bi si želela.

Dokaze o procesu učenja in znanja sem tokrat pridobivala bolj sistematično, predvsem pa sem bila pozorna na to, da so jih pridobivali tudi učenci. Saj so tudi oni soodgovorni za svoje znanje! Dokaze s(m)o pridobivali na različne načine: preko izvedenih načrtovanih učnih dejavnosti, rešenih nalog, izdelkov, predstavitve problemskih nalog, opazovanja, preverjanj znanja, ki smo jih izvajali na različne načine: klasično, s pomočjo programa Socrative, samopreverjanja znanja in nazadnje preverjanja znanja, ki so ga sestavili učenci sami.

Preverjanje znanja s pomočjo programa Socrative je potekalo interaktivno. Učenci so imeli vsak svoj računalnik, na katerem so reševali naloge izbirnega tipa. Med ponujene napačne odgovore sem skušala vključiti predvidena napačna razumevanja in razmišljanja učencev. Tako sem na podlagi izbranega odgovora pogosto lahko sklepala o tem, kako učenec razmišlja. Med tem ko so učenci reševali naloge, sem na svojem računalniku spremljala njihovo reševanje. Po potrebi sem posameznikom sproti dala namig, kako naj se ponovno lotijo razmišljanja.

Primer:

Vsota notranjih kotov nekega večkotnika je 2340°. Katerega?	
Odgovor	*Vzrok napake*
A 11-kotnika	900 je delil s 180, nato je odštel (namesto prištel) 2.
B 13-kotnika	900 je delil s 180.
C 15-kotnika	/

Poseben primer preverjanja znanja je bilo **preverjanje znanja s samovrednotenjem**. Učenci so sami morali oceniti uspešnost reševanja posamezne naloge, ob koncu preverjanja pa podati mnenje o tem, kakšno je njihovo znanje, kaj znajo najbolje, kaj najmanj, česa se morajo še naučiti, kako se bodo tega lotili.

Menim, da so učno boljši učenci tudi bolj sposobni samorefleksije. Svoje znanje so ocenili precej realno. Pač pa so bili njihovi odgovori na vprašanje »Kako se bom to naučil/a?« zelo skopi. K temu najverjetneje pripomore tudi to, da takšnih vprašanj doslej niso bili vajeni.

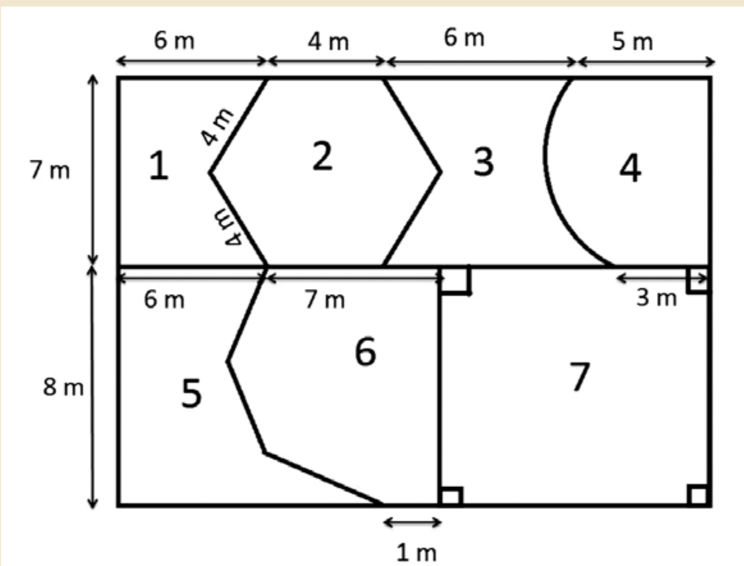
Ob koncu, ko so imeli že vsi cilji pouka v naši hiši znanja oznako, da jih sostanovalci dosegajo, smo pisali še **preverjanje znanja, ki so ga sestavili učenci sami**. Na lističe sem izpisala namene učenja (vsak namen na svoj listič) in jih dala v škatlo. Učenci so izžrebali vsak svoj listič. K namenu učenja so dopisali nalogo, ki je namen učenja preverjala. Nalogo so morali tudi rešiti.

Izdelke učencev sem nato zbrala in iz njih oblikovala skupno preverjanje znanja, ki so ga učenci pisali individualno. Pri vsaki nalogi je bil zapisan namen učenja, ki ga naloga preverja. Učenci so morali tudi tokrat oceniti, ali so zastavljeni cilj dosegli ali ne.

Naloge, ki so jih sestavili učenci, so dejansko ustrezale zapisanim ciljem. Seveda pa preverjanje znanja ni vsebovalo različnih taksonomskih stopenj, naloge niso bile različnih tipov, razmerje med lahkimi, srednjimi in težkimi nalogami ni bilo ustrezno. Povratna informacija je bila tako bolj kot ne v smislu doseganja oz. nedoseganja posameznih ciljev. Poleg povratne informacije posameznikom sem tokrat podala tudi povratno informacijo o tem, kako dobro se je odrezala posamezna skupina (torej vsi sostanovalci iste sobe). Zanimivo, da je ta učence mnogo bolj zanimala kot individualna povratna informacija.

Po preverjanju je sledilo še pisno ocenjevanje znanja. Učencem so bile naloge všeč. Njihova posebnost je bila, da so bile povezane z življenjem in delom sostanovalcev, kot npr.:

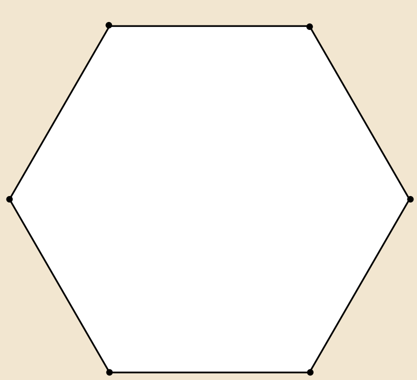
Prijatelji Maj, Maxim, Zala, Gala, Lara, Živa, Jan, Pia, Matej, Maruša, Klemen, Gaja, Sara, Brin, Jakob, Aljaž in Juta so živeli v čudovitem stanovanju, katerega tloris je prikazan na priloženem listu. Vse naloge se nanašajo na to stanovanje.



1. a) Katere izmed sob so v obliki večkotnikov? *Izpiši številke.*
   b) Soba številka 2 ima **vse stranice enako dolge** in **vse notranje kote skladne**. Kako rečemo večkotniku z omenjenimi lastnostmi?

2. Brin trdi, da ima ena izmed sob vsoto notranjih kotov 560°. Juta trdi, da to gotovo ni res. Računsko pokaži, kdo ima prav.

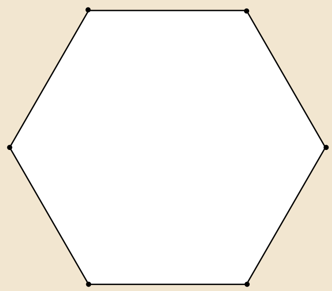
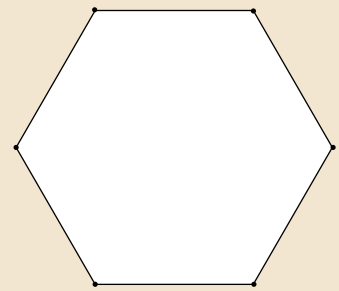
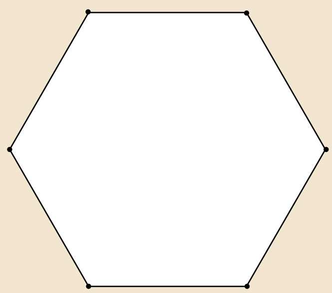
3. Na sliki je soba številka 2. **Vsaka njena stranica meri 4 m**.



a) Poimenuj narisani večkotnik.
b) Večkotniku označi oglišča.
c) Izpiši nesosednja oglišča oglišča *B*.
č) Nariši vse diagonale iz oglišča *E*.
d) Koliko diagonal ima prikazani lik?
e) Označi notranji kot α, pripadajoči zunanji kot, središčni kot.
f) Kolikšen je obseg tlorisa sobe?

g) V sobi številka 2 so stanovali Jakob, Aljaž in Brin. Razmišljali so, kako naj si sobo pravično razdelijo. Najprej so jo razdelili na dva skladna trapeza. Nato so jo razdelili na 3 skladne rombe. Nazadnje so jo razdelili na 6 skladnih trikotnikov. **Skiciraj njihove delitve:**

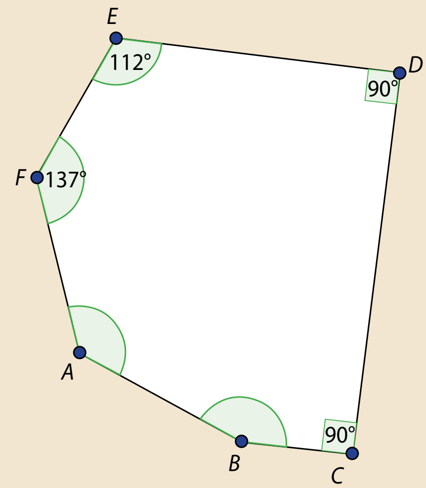
h)

2 skladna trapeza	**3 skladni rombi**
	
6 skladnih trikotnikov	
	

i) Natančno nariši pravilni šestkotnik s stranico 4 cm.

j) Šestkotnik, ki si ga narisal, predstavlja tloris sobe številka 2. **1 cm na sliki pomeni 1 m v resnici.** Tla sobe št. 2 nameravamo prekriti s talno oblogo. Koliko m^2 talne obloge bo pokrivalo tla?

3. Na sliki je soba številka 6.
   a) Kolikšna je vsota vseh notranjih kotov prikazanega večkotnika?
   b) V tem večkotniku meri zunanji kot $\beta' = 22°$. Koliko meri priležni notranji kot β ?
   c) Izračunaj, koliko meri kot α.



4. Obseg sobe številka 4 je 24 m. Kolikšen je obseg sobe številka 3?

5. Sostanovalci so primerjali svoje sobe in podatke vpisovali v spodnjo tabelo.

Št. oglišč	Št. stranic	Število diagonal	Vsota notranjih kotov (°)	Vsota zunanjih kotov (°)
4	4	2	360	360
5	5	5		
6	6	9		

Ugotovi pravilnost spodnjih ugotovitev. Če je ugotovitev pravilna, obkroži P, sicer obkroži N.

- *Če se število oglišč večkotnika poveča za 1, se število vseh diagonal poveča za 3.* P N
- *Če se število oglišč poveča za 1, se vsota notranjih kotov poveča za 180°.* P N
- *Če se število oglišč poveča za 1, se vsota zunanjih kotov poveča za 360°.* P N
- *Če bi bilo število oglišč 100, bi bilo število diagonal 100 · 97.* P N
- *Če bi bilo število diagonal 170, bi bilo število oglišč 20.* P N

Dosežki učencev pri pisnem ocenjevanju znanja so bili zelo dobri (vendar pa je za skupino 3. nivoja to nekaj običajnega). Za zaključek našega dela, našega prvega »spopada« z elementi formativnega spremljanja znanja, smo skupaj izdelali film z naslovom Sostanovalci, v katerega smo strnili vse izzive, ki so jih reševali sostanovalci, utrinke reševanja in ugotovitve. Ob ogledu se sostanovalci niso zgolj zabavali, pač pa so ponovili vse, kar so se pri tem učnem sklopu naučili.

Zaključek

Glede na to, da sem na področju formativnega spremljanja začetnica, težko podajam verodostojne ugotovitve in zaključke. Menim, da je ideja formativnega spremljanja ustrezna, rezultati pa se pokažejo čez nekaj časa in ne po zgolj enem poskusu.

Običajno poučujem na podoben način, torej preko izzivov, ki učence usmerijo v lastno odkrivanje novih matematičnih znanj. Sproti nastajajo številni izdelki, ki bi jih lahko uporabila kot dokaze o procesu učenja in znanja. Novosti, ki sem jih poskusno izvedla, so bile: oblikovanje namenov učenja skupaj z učenci; sistematično zbiranje dokazov o procesu učenja in znanja in kvalitetna povratna informacija.

Slednja mi je povzročala največ težav. Običajno jo podajam številčno, skopo. Razmislek o tem, kako naj jo oblikujem, da bo učencu res v pomoč, mi je vzel zelo veliko časa. Na tem področju me čaka še veliko dela, vendar pa sem skozi proces razmišljanja prišla do spoznanja, da je povratna informacija verjetno mišljena mnogo širše, kot sem jo doslej razumela sama.

Ne morem reči, da so učenci prevzeli odgovornost za svoje učenje; dejansko sem jo še vedno (skladno z navado) čisto po nepotrebnem prevzela sama. Pač pa so bili učenci izredno motivirani za delo. Z velikim veseljem so odkrivali nova znanja. Njihovi dosežki pri pisnem ocenjevanju znanja so bili primerljivi z običajnimi dosežki, menim pa, da so precej napredovali na področju refleksije. Napredek je bil viden tudi v aktivnem poslušanju drug drugega.

Prav je, da učitelji ves čas »rastemo«. To je mogoče le tako, da se tudi sami nenehno učimo, preizkušamo, odkrivamo; delamo iskreno samorefleksijo; si zastavljamo nove cilje, načrtujemo in izvajamo dejavnosti, s pomočjo katerih naj bi jih dosegli. Potem pa spremljamo povratne informacije in jim sledimo. Sliši se zelo podobno formativnemu spremljanju, mar ne? Kakorkoli že, mislim, da je prav, da vsak učitelj najde način poučevanja, ki mu ustreza, in gradi na njem. Le tako je lahko uspešen pri svojem poučevanju. ■

Viri

Sirnik, M., Suban, M., Pomen formativnega spremljanja za učenje in poučevanje matematike, http://www.matematika.hr/files/1814/6798/5265/Pomen_FS_za_učenje_matematike_Suban_Sirnik.pdf (pridobljeno 25. 8. 2017)

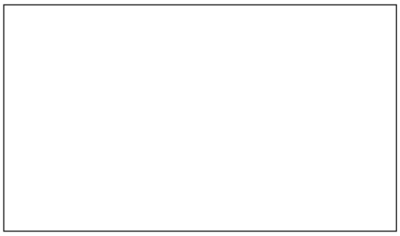
Predmetna skupina za matematiko, Študijska srečanja v šolskem letu 2016/2017, Prvo študijsko srečanje –jesen 2016, https://skupnost.sio.si/mod/page/view.php?id=303937 (pridobljeno 25. 8. 2017)

Žakelj, A. idr. (2011). *Učni načrt. Program osnovna šola. Matematika.* Ljubljana. ZRSŠ, http://www.mizs.gov.si/fileadmin/mizs.gov.si/pageuploads/podrocje/os/prenovljeni_UN/UN_matematika.pdf (pridobljeno 30. 4. 2018)

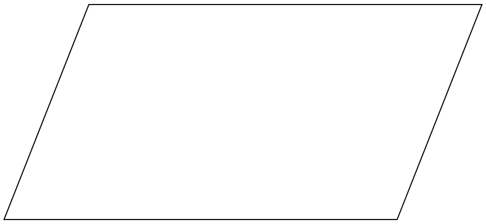
1. Štirikotnik deltoid predstavi na različne načine:

Skiciraj ga:	Opiši ga z besedami.
Zapiši primer iz vsakdanjega življenja, ki te spominja na deltoid	Skiciraj lik, ki NI deltoid

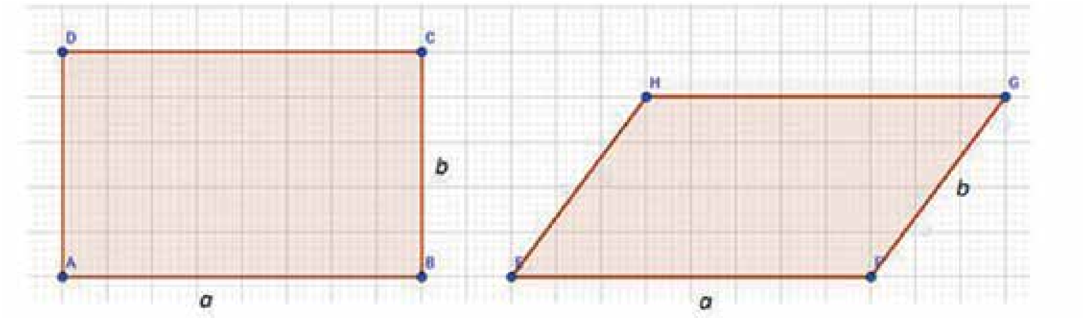
2. a) Liku označi oglišča, stranice, diagonali in kote.



b) Natančno poimenuj spodnji štirikotnik.



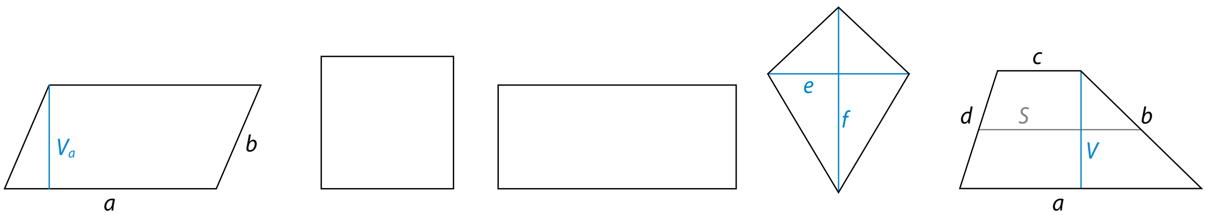
c) Oba lika na spodnji stranici imata enako dolgi stranici *a* in *b*.



Katera izjava je resnična? Obkroži P (pravilna izjava) oz. N (nepravilna izjava).

Obsega obeh likov sta enaka.	P	N
Ploščino obeh likov izračunamo po formuli $p = a \cdot b$.	P	N

3. Dani so štirikotniki, označeni z A, B, C, D in E. Izpiši vse:



a) osno somerne štirikotnike: ______________________________

b) središčno somerne štirikotnike: ______________________________

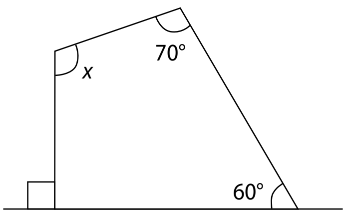
c) štirikotnike, ki imajo vsaj dve stranici vzporedni: ________________________

č) štirikotnike, pri katerih se diagonali sekata pod pravim kotom: ____________________

d) štirikotnike, pri katerih se diagonali razpolavljata: ________________________

4. Za kateri štirikotnik gre? Vse stranice ima enako dolge, a ni kvadrat. ____________________

5. Izračunaj velikost kota *x*.



6. V spodnji mreži nariši trapez, ki ima ploščino natanko 10 e^2, ter pravokotnik, ki ima obseg natanko 10 e.

obseg kvadrata

krak

ploščina romba

deltoid

srednjica

ploščina trapeza

trapez

ploščina kvadrata

pozitivna orientacija

paralelogram

ploščina pravokotnika

vsota notranjih kotov štirikotnika

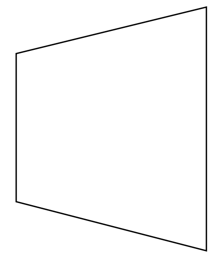
romb

obseg paralelograma

vsota notranjih kotov trikotnika

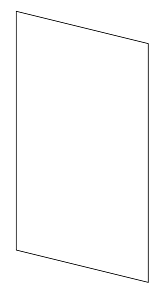
je osno
someren

vse stranice
so skladne



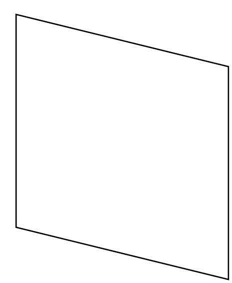
diagonali se
razpolavljata

po dva para
skladnih
kotov



diagonali
se sekata pod
pravim kotom

vsi notranji
koti so skladni



ploščina
deltoida

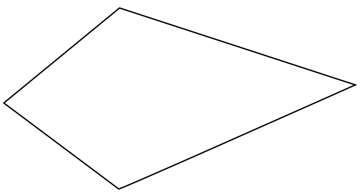
dva para
vzporednih
stranic

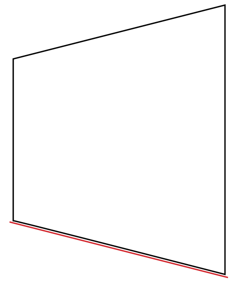
diagonali
sta skladni

ploščina
paralelograma

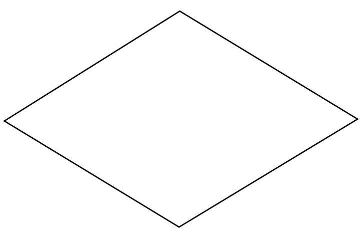
je središčno
someren

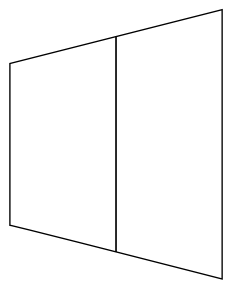
vsi notranji
koti so pravi

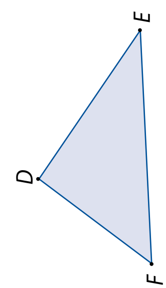


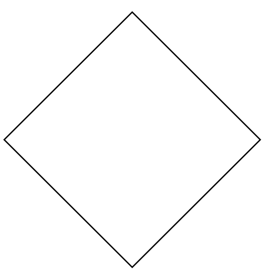


$\frac{a+c}{2}\cdot v$

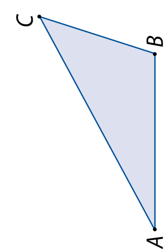


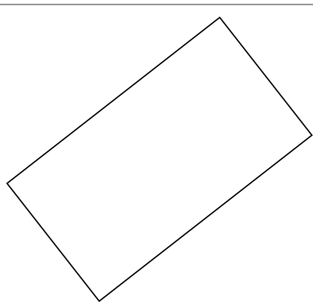






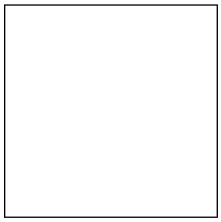
$a \cdot b$





$2a + 2b$

$360°$



$4 \cdot a$

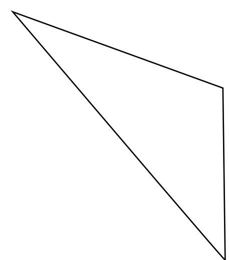
$180°$

pravilni večkotnik

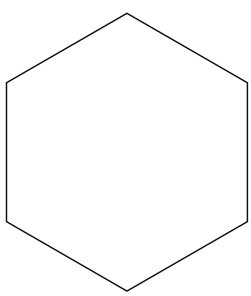
enakokraki pravokotni

$\frac{a \cdot v_a}{2}$

$6 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$



ploščina trikotnika



raznostranični topokotni

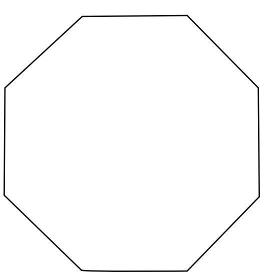
a^2

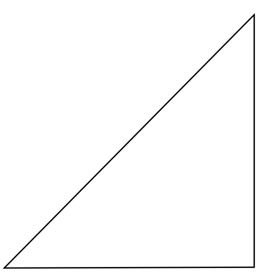
$a \cdot v_a$

višina

topokotni enakostranični

$\frac{e \cdot f}{2}$





Protokol za (samo)vrednotenje elementov formativnega spremljanja pri pouku

dr. Ada Holcar Brunauer [1] in Urška Margan
[1] Zavod RS za šolstvo

Obrazec nam je v pomoč pri samovrednotenju lastnega poučevanja in učenja učencev, pri medsebojnih hospitacijah.

	ELEMENTI FORMATIVNEGA SPREMLJANJA	DA/NE/NI RELEVANTNO	KAKO SE JE TO VIDELO?
1.	**Učenci so aktivno vključeni v učni proces:** • glede na predznanje in interes, ob povratni informaciji učitelja, znotraj določenega okvira postavijo svoje cilje, • sodelujejo pri načrtovanju dejavnosti in učnih korakov za doseganje ciljev, • sodelujejo pri oblikovanju kriterijev uspešnosti, • lahko predstavljajo znanje na način, ki ga izberejo sami, • vrednotijo svoje dosežke po izdelanih kriterijih/dajejo povratno informacijo učitelju, • …		
2.	**Spodbujam razmišljanje učencev:** • dejavnosti zahtevajo različne miselne procese (razumevanje, sklepanje, argumentiranje ... vprašanja so odprta, problemska …), • moje povratne informacije izhajajo/temeljijo na opredeljenih kriterijih uspešnosti in učence vodijo k izboljševanju dela/doseganju ciljev, • dokazi učencev o procesu učenja in znanja so raznoliki • ...		
3.	**Učenci so drug drugemu vir učenja/ poučevanja:** • vključeni so v skupne razprave, • učitelj v različnih učnih oblikah in metodah dela (npr. delo v dvojicah, recipročno in sodelovalno učenje …) učencem omogoča učenje drug od drugega, • drug za drugega oblikujejo naloge in vprašanja, • presojajo dosežke drug drugega in si dajejo povratne informacije, • ...		

Vir: Gradivo razvojne naloge Formativno spremljanje v podporo učenju (A. Holcar Brunauer).

Iz priročnika Formativno spremljanje pri matematiki

mag. Melita Gorše Pihler
Zavod RS za šolstvo

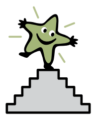
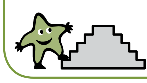
Primeri orodij v podporo učenju in poučevanju matematike

Obseg Kaj se spomnim o obsegu lika?	**Ploščina** Kaj se spomnim o ploščini lika?
Kaj imata skupnega obseg in ploščina?	
V čem se razlikujeta obseg in ploščina?	

Slika 10: Skupne značilnosti in razlike med pojmoma obseg in ploščina
Vir: Gradivo iz študijskega srečanja za učitelje matematike v osnovni šoli, 2015.

Tri stvari, ki so mi šle dobro, sem jih znal/-a.		
Dve stvari, kjer sem imel/-a težave.		
Ena stvar, ki je nisem znal/-a.		

Slika 47: Izhodni listič

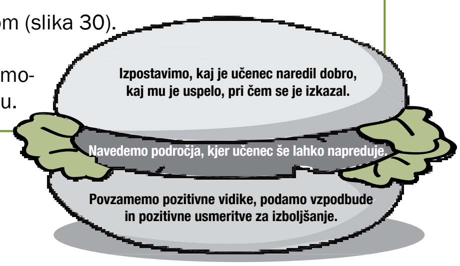
Dve zvezdi in ena želja	
	Izpostavi dve odlični stvari, ki sta bili prikazani: •
	•
	Izpostavi področje, ki bi ga sošolec/-ka še lahko izboljšal/-a: •

Slika 65: Vrstniško vrednotenje za vsebino oglata telesa s povratno informacijo

Vir: Gradivo iz študijskega srečanja za učitelje matematike v osnovni šoli, oktober, november 2016.

Povratna informacija učenca učencu

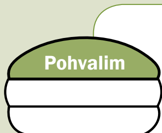
Učenci si pri vrstniškem vrednotenju pomagajo z učnim listom (slika 30). V učilnici na vidno mesto prilepimo plakat z nedokončanimi povedmi (sliki 31, 32), ki so učencem v pomoč pri zapisu samoevalvacije ali pri dajanju povratnih informacij sošolca sošolcu.



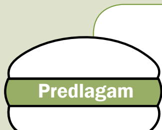
Povratna informacija prijatelju/-ici

Sem tvoj/-a kritični/a prijatelj/-ica in želim **vrednotiti** tvoje naloge in znanje.

____________________, odlično si opravil/-a, posebej želim **POHVALITI** ...
(ime prijatelja/-ice)



PREDLAGAM ti, da pri svojih naslednjih aktivnostih skušaš ...



Obenem **POVZEMAM POZITIVNO** pri tvojem delu ...

Tvoj/-a prijatelj/-ica ____________________

Slika 30: Povratna informacija učenca učencu

Avtorici: Andreja Sever in Karmen Škafar (2017).

Primerjava izdelkov

Učencem predložimo primere reševanj posameznih nalog (stare naloge, naloge učencev ...), primere preiskovanj, empiričnih ali matematičnih raziskav, primere modeliranj ... Opazujemo lahko samo en izdelek ali več izdelkov. Število izdelkov prilagodimo glede na vrsto nalog in vsebino, ki jo obravnavamo.
Ob opazovanju rešenih oz. izpolnjenih reševanj učenci individualno ali v paru ali v skupini ugotavljajo, kaj so prednosti oz. pomanjkljivosti posameznega izdelka. Iz zapisov izpeljejo kriterije uspešnosti oz. merila uspešnosti.
Učni list lahko uporabimo tudi za podajanje povratne informacije, samovrednotenje oz. za vrstniško vrednotenje.

Primerjaj(te) primere reševanj (učenca A in učenca B) s tvojim reševanjem. Razmišljaj(te) o prednostih in pomanjkljivostih posameznega reševanja in jih zapiši(te) v preglednico.

Vsebina:

	Prednosti	**Pomanjkljivosti**
Reševanje učenca A		
Reševanje učenca B		
Tvoje reševanje		

Iz ugotovljenih prednosti in pomanjkljivosti (zapisanih v zgornji preglednici) izpelji(te)/zapiši(te) kriterije uspešnosti.

Slika 24: Primerjava različnih primerov reševanja
Avtorica: Jerneja Bone.

Matematika v šoli, št. 1., letnik 24, 2018

Število 41

dr. Marko Razpet

Posamezna naravna števila imajo lahko prav zanimive lastnosti. Dobro znana so nam soda in liha števila, praštevila, sestavljena števila, večkotniška (trikotniška, kvadratna, petkotniška …) števila, središčna večkotniška števila, podolžna števila, uglajena števila itd. Lahko pa imajo zanimive lastnosti tudi števke števila v izbranem številskem sistemu mestnih vrednosti.

Oglejmo si nekaj primerov, v katerih sodeluje praštevilo 41, ki s praštevilom 43 sestavlja praštevilski dvojček.

1. Leonhard Euler (1707–1783) je leta 1772 našel trinom $P(n) = n^2 + n + 41$, ki nam da veliko praštevil, ko vanj vstavljamo po vrsti $n = 0, 1, 2, \ldots, 39$:

   41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151, 173, 197, 223, 251, 281, 313, 347, 383, 421, 461, 503, 547, 593, 641, 691, 743, 797, 853, 911, 971, 1 033, 1 097, 1 163, 1 231, 1 301, 1 373, 1 447, 1 523, 1 601. To je seznam 40 praštevil, ki je prekinjen s $P(40) = 1\,681 = 41^2$. Na seznamu ni vseh praštevil med 40 in 1 602. Teh je 240. Manjka jih kar 200, na primer 59, 67, 73, 79, 89, 101.

   Preproste polinomske formule za n-to praštevilo ni, je pa Euler vzpodbudil druge matematike, da so začeli resno študirati praštevila.

   Opomba. Za naravno število n izraz $n^2 + n = n(n + 1)$ v $P(n)$ definira tako imenovano n-to podolžno število. Polovica n-tega podolžnega števila je n-to trikotniško število $T_n = n(n + 1)/2$.

2. Število 41 lahko, če se ne oziramo na vrstni red sumandov, na en sam način zapišemo kot vsoto dveh in treh kvadratov, to je
   $$41 = 4^2 + 5^2,\ 41 = 1^2 + 2^2 + 6^2;$$
   z uporabo treh zaporednih faktoriel pa tudi v obliki
   $$41 = 1!^2 + 2!^2 + 3!^2.$$

   Število 41 je hipotenuza primitivnega pitagorejskega trikotnika s katetama 9 in 40, ker je $9^2 + 40^2 = 41^2$. To sledi iz splošnih formul
   $$a = m^2 - n^2,\ b = 2mn,\ c = m^2 + n^2,$$
   s katerimi s primerno izbiro naravnih števil m in n dobimo stranice pitagorejskega trikotnika. Za $m = 5$ in $n = 4$ res dobimo $a = 9$, $b = 40$ in $c = 41$.

3. Število 41 lahko, če se ne oziramo na vrstni red sumandov, na en sam način izrazimo kot vsoto dveh zaporednih naravnih števil:
   $$41 = 20 + 21.$$

   Naravnim številom, ki se dajo izraziti kot vsota dveh ali več zaporednih naravnih števil, pravimo ***uglajena števila***. Število načinov zapisa vsote, pri čemer se ne oziramo na vrstni red sumandov, meri uglajenost števila. Število 41 je uglajeno število z uglajenostjo 1. Vsa naravna števila razen potenc števila 2 so uglajena. Zaradi tega so najbolj zanimive njihove uglajenosti in postopek, kako dano število zapisati kot vsoto zaporednih naravnih števil.

4. Število 41 lahko na dva načina izrazimo kot vsoto zaporednih praštevil:
   $$41 = 11 + 13 + 17,\ 41 = 2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13.$$

5. Kub števila 41 se da zapisati kot vsoto treh kubov na dva načina:
   $$41^3 = 40^3 + 17^3 + 2^3,\ 41^3 = 33^3 + 32^3 + 6^3.$$

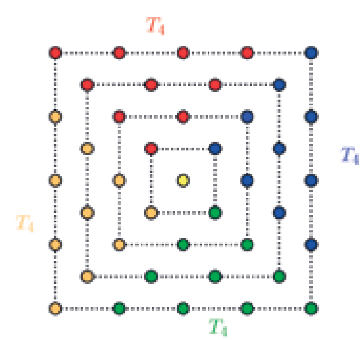
6. Število 41 je vsota treh sumandov oblike $n! + n^n$:
   $$41 = (1! + 1^1) + (2! + 2^2) + (3! + 3^3).$$

7. Števki 4 in 1 v desetiškem zapisu imata nekaj zanimivih lastnosti:
   $$4! + 1! = 5^2,\ 4^2 + 1^2 = 17 \text{ (praštevilo)}.$$

   Število 41 v petiškem sistemu zapišemo kot 131, kar pomeni $1 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 1$, kar je res 41. Ker se 131 prebere naprej in nazaj enako, je v petiškem sistemu 41 ***palindromno število***.

8. Število 41 je za 1 povečan štirikratnik četrtega trikotniškega števila:
   $$41 = 4 \cdot T_4 + 1 = 4 \cdot 4 \cdot 5/2 + 1.$$

   Ker trikotniška števila ponazorimo s številom enakih krožcev, zloženih v trikotnik, lahko 4 take trikotnike z 10 krožci zložimo v kvadrat, ki mu na sredini dodamo še en krožec. Zato je 41 peto središčno kvadratno število. Lahko pa si mislimo tudi pet koncentričnih kvadratnih okvirov z 1, 4, 8, 12 in 16 krožci (slika 1). Vseh krožcev je $1 + 4 + 8 + 12 + 16 = 41$.

   Slika 1: Peto središčno kvadratno število.

9. Število 41 je ***kongruentno***. Po definiciji je naravno število k ***kongruentno***, če obstaja pravokotni trikotnik z racionalnimi stranicami a, b, c ($a^2 + b^2 = c^2$), ki ima ploščino enako k ($k = ab/2$). Števila a, b, c s k niso natančno določena, celo nešteto jih je. Najmanjše kongruentno število je 5. Pitagorejski trikotnik iz točke 2 ima ploščino $180 = 6^2 \cdot 5$. Če njegove stranice delimo s 6, dobimo pravokotni trikotnik s stranicami $a = 3/2$, $b = 20/3$, $c = 41/6$, za katere je $a^2 + b^2 = c^2$ in $ab/2 = 5$. Zato je 5 kongruentno število.

   Odgovor, kdaj je k kongruentno število, ni preprost. Z veliko truda ugotovimo, da za $a = 40/3$, $b = 123/20$, $c = 881/60$ velja $a^2 + b^2 = c^2$ in $ab/2 = 41$. Torej je 41 tudi kongruentno število.

   Zgodi se lahko, da kongruentnemu številu k ustreza pravokotni trikotnik, katerega stranice se izražajo z okrajšanimi ulomki, ki imajo ogromne števce in imenovalce. ■

Strategije štetja in računanja pri učencih z gibalno oviranostjo

Anja Vidmar, dr. Janez Jerman[1] in Erna Žgur
[1] Pedagoška fakulteta, Univerza v Ljubljani

Povzetek

Matematika pomembno vpliva na posameznikovo uspešnost in zadovoljstvo na šolskem in življenjskem področju. Številske predstave so ključnega pomena za uspešno obvladovanje matematike. Učenci z lažjimi motnjami v duševnem razvoju imajo pri razvoju številskih predstav več težav, saj počasneje usvajajo šolska znanja in potrebujejo za pridobivanje teh predstav bistveno več časa. Kognitivni in motorični razvoj potekata vzporedno in povezovalno, zato lahko sopojavljanje gibalne oviranosti ob prisotni motnji v duševnem razvoju predstavlja dodatno oviro pri razvoju številskih predstav. Strategije štetja in računanja so temelj, na katerem učenci gradijo in rešujejo številske in aritmetične probleme. V raziskavi se je potrdilo, da imajo učenci z gibalno oviranostjo pomanjkljivo razvite številske predstave ter strategije štetja in računanja v primerjavi z učenci brez gibalne oviranosti. Zato posledično potrebujejo bistveno več prilagojenih in specifičnih osebnih izkušenj, strategij in aktivnosti.

Ključne besede: številske predstave, strategije, gibalna oviranost, lažje motnje v duševnem razvoju

Counting and Calculation Strategies in Children with Impairment in Movement

Abstract

Mathematics has an important effect on learners' performance and satisfaction in school as well as life in general. The concept of numbers is crucial for successful mastering of mathematics. Students with mild intellectual disabilities have more difficulty in understanding numbers due to their slower assimilation of school material, therefore they need much more time to grasp these concepts. Cognitive and motor development are parallel and connected, which means that impairment in movement with a simultaneous intellectual disability represent an additional obstacle in the understanding of numbers. Counting and calculation strategies are the foundation upon which students build and solve numerical and arithmetic problems. The research confirmed insufficiently developed understanding of numbers and counting and calculation strategies in students with impairment in movement compared to those not impaired in movement. Consequently, their learning process requires substantially more personalized and specific individual experiences, strategies and activities.

Keywords: concept of numbers, strategies, impairment in movement, mild intellectual disabilities

Uvod

Matematika je »univerzalen jezik, ki presega kulturne, socialne in civilizacijske razlike« (J. Vipavc in M. Kavkler, 2015, str. 9). Dobro razvite matematične spretnosti in sposobnosti pripomorejo k uspešnemu delovanju posameznika v družbi, saj se z matematiko srečujemo na vsakem koraku – vsakič, ko pogledamo na uro, na koledar, iščemo pravo številko avtobusa, plačujemo položnice ali kupujemo, se soočamo s količinami, števili, štetjem, računanjem (Van Rooijen, Verhoeven in Steenbergen, 2010; Vipavc in Kavkler, 2015). Vsak dan torej matematiko uporablja večina ljudi, ne glede na okoliščine, možnosti, sposobnosti, ki jih posameznik ima, in ne glede na to, ali se prisotnosti matematike v svojih početjih zaveda ali ne (Tomšič idr., b.d.). Slabše razvite matematične sposobnosti in spretnosti lahko pomembno vplivajo na poznejše matematične dosežke, šolsko in delovno uspešnost posameznika ter tudi na posameznikov standard življenja (Geary, 1994; Bymes in Wasik, 2009; Van Rooijen idr. 2010).

M. Kavkler (2007) opozarja, da je za uspešno obvladovanje aritmetike treba učencu v prvih letih šolanja razviti osnovne predpogoje, kot so: sposobnost primerjanja količin, velikostnih odnosov, razumevanje pojma števila, obvladovanje različnih vrst štetja, razvoj potrebnega matematičnega pojmovnega in proceduralnega znanja itd. Usvajanje teh znanj in spretnosti je dolgotrajen proces in se zdi marsikateremu učencu abstrakten in težak, kar je po mnenju strokovnih delavcev eden glavnih razlogov, zaradi katerega imajo številni učenci težave pri matematiki in doživljajo ob učenju matematike hude stiske (Vipavc in Kavkler, 2015). Matematika mnogo pogosteje kot drugi predmeti učencem povzroča težave in čutijo do nje strah in odpor. Slabše številske predstave so ena izmed najpogostejših ovir, ki otežujejo učenje matematike (Žakelj in Valenčič Zuljan, 2014).

Prisotnost lažje motnje v duševnem razvoju (LMDR) lahko predstavlja dejavnik neuspeha pri ustreznem razvoju številskih predstav. Učenci, ki imajo LMDR, imajo pomembno znižane intelektualne sposobnosti ter znižane sposobnosti za učenje in usvajanje splošnih znanj. Pri njih se kažejo odstopanja na področju konceptualnih, socialnih in praktičnih veščin (Colnerič in Zupančič, 2005; Vovk-Ornik, 2015).

Matematika ima v prilagojenem programu vzgoje in izobraževanja z nižjim izobrazbenim standardom (NIS), kamor se vključujejo učenci z LMDR, pomembno mesto, saj je na urniku od 4 do 5 ur na teden. V skladu s predpisanim kurikulum je tako potrebno, da se v tem obdobju posveti dovolj pozornosti razvoju številskih predstav tudi učencem z LMDR, saj ima pojav zadostne razvitosti zgodnjih številskih spretnosti pomemben vpliv na poznejše akademske in tudi druge vseživljenjske dosežke posameznika.

Vpliv gibalne oviranosti na področje številskih predstav

Učenci z gibalno oviranostjo (GO) se lahko zaradi posledic specifičnega gibalnega razvoja srečujejo s številnimi težavami na različnih področjih kognitivnega in konativnega razvoja. Pojavljajo se lahko težave pri branju, pisanju, govoru ter pri matematiki (Haskell in Barrett, 1993; Vrlič Danko, 2005). Od vseh naštetih področij je po mnenju različnih avtorjev (Haskell in Barrett, 1993; Van Rooijen idr., 2010; Erkoç Gecü in Erkoç, 2013) najmanj raziskan vpliv posledic GO na matematičnem področju.

Učne težave pri matematiki so pogosto povezane s slabo razvitimi številskimi predstavami in pojmi ter primanjkljaji na področju štetja (Kalan, 2015). Jean Piaget je menil, da so dejavnosti, kot so razvrščanje, manipuliranje, urejanje in prirejanje, predpogoj za usvajanje koncepta števila (Labinowicz, 2010). Pri otrocih z GO so lahko zaradi omejitev v gibanju (orientaciji) omenjene spretnosti zmanjšane ali odsotne (Haskell in Barrett, 1993). Od najzgodnejših razvojnih obdobij dalje otrok z raziskovanjem fizičnih karakteristik objektov pridobiva osnovne predstave o teži, obliki, velikosti, hitrosti in prostorskih odnosih (prav tam, 1993). Preko razvrščanja, urejanja, prirejanja in manipuliranja s predmeti otrok razvija pojem števila. Če je gibalni razvoj moten in otrok nima dovolj priložnosti in izkušenj za raziskovanje, lahko prihaja do pomanjkljivih, nepopolnih, napačnih ali neustreznih predstav. Da otrok razvije abstraktne koncepte, kot je npr. sposobnost konzervacije števila, potrebuje veliko praktičnih vaj preurejanja, opazovanja, preiskovanja in preverjanja značilnosti in posledic spremenjenega vzorca, ki je nastal kot posledica preurejanja določenih predmetov v prostoru. Otroci z GO imajo bistveno zmanjšane zmožnosti samostojnega manipuliranja s predmeti (Haskell in Barret, 1993).

Na težave pri aritmetiki lahko vplivajo različne oblike GO, ki jih spremlja različna stopnja motene senzorične integracije: razne oblike cerebralne paralize, spina bifida, mišične distrofije, kongenitalne deformacije udov … Raziskovalci (Arp, Taranne in J. Fagard, 2006; Dellatlos, Filho,; Jenks, de Moor, van Lieshout, Maathuis, Keus in Gorter 2007, v Van Rooijen idr. 2010) ugotavljajo, da učenci z GO v primerjavi s kontrolnimi skupinami učencev brez GO dosegajo slabše rezultate na področju ocenjevanja količine, na področju vizualno-prostorskih in številskih sposobnosti, pri reševanju nalog seštevanja in odštevanja do 100 ter imajo slabši občutek za števila. Vzroke za takšne rezultate avtorji pripisujejo slabšemu vizualno-prostorskemu kratkotrajnemu spominu pri učencih z GO, šibkejši vizualno-motorični koordinaciji, šibkejšim vizualno-prostorskim in številnim spretnostim ter pomanjkanju osnovnega aritmetičnega znanja. Vzrokov pa je lahko še več: primanjkljaji s področja zaznavanja telesa, delov telesa, dojemanja telesne sheme, razvoja lateralizacije, prehod čez srednjo linijo … (Žgur, 2017).

Strategije štetja in računanja pri učencih z gibalno oviranostjo

Otroci navadno začnejo reševati aritmetične probleme seštevanja s pomočjo strategij, ki temeljijo na štetju. Pri tem si največkrat pomagajo z različnimi predmeti in s prsti (materialne strategije). Postopoma preidejo na verbalno štetje, s katerim si pomagajo pri reševanju računov seštevanja in odštevanja (verbalne strategije), pozneje pa dejstva memorirajo in jih prikličejo iz dolgotrajnega spomina (miselno računanje) (Geary, 1994). Normalen potek razvoja strategij v času osnovnošolskega izobraževanja poteka od nezrelih, neučinkovitih strategij, preko verbalnega štetja k priklicu aritmetičnih dejstev (Kavkler, 2007).

Geary (1994) po več virih (Ginsburg, 1982; Saxe, 1982; Geary, Fan in Bow-Thomas, 1992) povzema, da v različnih kulturah prva strategija, ki jo otroci uporabljajo za reševanje aritmetičnih problemov, temelji na štetju. Zato je obvladovanje štetja ključnega pomena, da se lahko razvijejo višje, naprednejše in hitrejše strategije. Če se otrok pri štetju moti, bo v dolgotrajni spomin uskladiščil napačno aritmetično dejstvo (prav tam, 1994).

M. Kavkler (1997) navaja, da je temeljni cilj aritmetike dosežen, ko je otrok iz dolgotrajnega spomina sposoben brez napak priklicati osnovna, bazična aritmetična dejstva. Tako se lahko posveti reševanju kompleksnejših in zahtevnejših aritmetičnih problemov in ne izgublja časa in energije z nižjimi in zamudnejšimi strategijami. M. Kavkler (1997, po Geary, 1994) navaja naslednje strategije štetja in računanja:

Strategije štetja nazaj: 1. nima strategije; 2. pomaga si s konkretno oporo, a šteje nazaj; 3. pomaga si s štetjem naprej, brez opor; 4. šteje nazaj brez opor.

Strategije preštevanja predmetov: 1. nima strategije; 2. prime in premakne vsak predmet; 3. vsakega predmeta se dotika s prsti; 4. gleda in prešteva predmete.

Seštevanje: 1. nima strategije; 2. šteje vse na prste; 3. začne s prvim številom, ne glede na velikost, in prišteje drugo; 4. začne z večjim številom in prišteje drugo; 5. prikliče aritmetično dejstvo.

Odštevanje: 1. nima strategije; 2. prešteje večje število na prste, odšteje manjše in prešteje preostanek; 3. šteje nazaj po ena od večjega števila; 4. šteje po ena naprej od manjšega števila; 5. priklic aritmetičnega dejstva.

V nadaljevanju predstavljamo izsledke raziskave avtorice A. Vidmar (2017), v katero je bilo vključenih 44 učencev 2. in 3. razreda prilagojenega vzgojno-izobraževalnega programa z NIS (od tega 22 učencev z različnimi oblikami in stopnjami GO). Raziskava je pokazala, da imajo učenci z GO bistveno slabše razvite številske predstave pri reševanju nalog, ki merijo razvitost številskih predstav, in da se glede na učence razlikujejo v rabi strategij. Interpretirali bomo najpomembnejše razlike med obema vzorcema.

Rezultati (Tabela 1) kažejo, da kar 68,2 % učencev z GO nima razvite **strategije štetja nazaj**. Med učenci brez GO je teh učencev skoraj polovica manj (36,4 %). V primerjavi s celotnim vzorcem več kot polovica učencev nima ustrezne strategije štetja nazaj (52,3 %), 40,9 % učencev pa uporablja šteje nazaj brez opor. Med temi učenci je velika večina učencev (59,1 %) brez prisotne GO. Izračunani Kruskal-Wallisov test razlik je pokazal, da **ni** statistično značilne razlike v rabi strategij štetja nazaj med učenci z GO in med učenci brez GO ($\chi^2 = 7{,}234$; $df = 3$; $2p = 0{,}065$), se pa dobljeni rezultat statistični zanesljivosti ($2p = 0{,}05$*) močno približa ($2p = 0{,}065$).

* Velja pri vseh vrednostih Kruskall-Wallisovega testa.

Analiza **strategij preštevanja predmetov** (Tabela 2) je pokazala, da med učenci z GO 22,7 % učencev nima strategije preštevanja predmetov, medtem ko med učenci brez GO ni nobenega takega učenca. Pri celotnem vzorcu je v največji meri (47,7 %) zastopana strategija »vsakega predmeta se dotika s prsti«, sledi uporaba strategije »prime in premakne vsak predmet« (22,7 %). 18,2 % učencev uporablja najvišjo strategijo »gleda in prešteva predmete«, v najmanjši meri (11,4 %) učenci ne uporabljajo nobene strategije, med temi učenci pa ni nobenega učenca brez GO. Test razlik Kruskal-Wallis je pokazal, da **obstajajo** statistično značilne razlike ($\chi^2 = 8{,}625$; $df = 3$; $2p = 0{,}035$) v rabi strategij preštevanja predmetov med učenci z GO in med učenci brez GO (v korist slednjih).

Tabela 1: Vrsta strategij **štetja nazaj** glede GO

			Gibalna oviranost		Skupaj
			da	**ne**	
Strategije štetja nazaj	nima strategije	*f*	15	8	23
		%	68,2	36,4	52,3
	pomaga si s konkretno oporo, a šteje nazaj	*f*	1	0	1
		%	4,5	0,0	2,3
	pomaga si s štetjem naprej, brez opor	*f*	1	1	2
		%	4,5	4,5	4,5
	šteje nazaj brez opor	*f*	5	13	18
		%	22,7	59,1	40,9
Skupaj		*f*	22	22	44
		%	100,0	100,0	100,0

Tabela 2: Vrsta strategij **preštevanja predmetov** glede na gibalno oviranost

			Gibalna oviranost		Skupaj
			da	**ne**	
Strategije preštevanja predmetov	nima strategije	*f*	5	0	5
		%	22,7	0,0	11,4
	prime in premakne vsak predmet	*f*	3	7	10
		%	13,6	31,8	22,7
	vsakega predmeta se dotika s prsti	*f*	10	11	21
		%	45,5	50,0	47,7
	gleda in prešteva predmete	*f*	4	4	8
		%	18,2	18,2	18,2
Skupaj		*f*	22	22	44
		%	100,0	100,0	100,0

Rezultati (Tabela 3) kažejo, da kar polovica učencev z GO (50,00 %) **nima razvite strategije seštevanja**, medtem ko je med učenci brez GO takšnih učencev zgolj 18,2 %. Test razlik Kruskal-Wallis je pokazal, da **obstajajo** ($\chi^2 = 13{,}333$; $df = 4$; $2p = 0{,}010$) statistično značilne razlike med učenci brez GO in med učenci z GO v rabi strategij seštevanja v prid učencem brez GO.

Rezultati (Tabela 4) kažejo, da 54,5 % učencev z GO nima prisotne **strategije odštevanja**. Pri učencih brez GO je takšnih učencev 22,7 %. Več kot polovica učencev brez GO (54,5 %) uporablja strategijo »prešteje večje število na prste, odšteje manjše in prešteje preostanek«, kar uporablja 36,4 % učencev brez GO. Strategije »priklic aritmetičnega dejstva« ne uporablja nobeden od učencev z GO ter trije učenci (13,6 %) brez GO. Test razlik Kruskal-Wallis je pokazal, da **ni** statistične značilnosti ($\chi^2 = 7{,}934$; $df = 4$; $2p = 0{,}094$) med obema skupinama učencev.

Pri vseh opazovanih strategijah štetja in seštevanja (Tabela 1, Tabela 2, Tabela 3 in Tabela 4), razen pri strategijah preštevanja predmetov, je med učenci z GO vsaj polovica učencev, ki nima prisotne nobene strategije. Pri učencih brez GO je takšnih učencev bistveno manj (največ pri strategijah štetja nazaj – 36,4 %). Več učencev brez GO uporablja višje razvite strategije štetja nazaj (več kot polovica jih šteje nazaj brez opor). Med *strategijami preštevanja predmetov* je najvišja strategija »gleda in prešteva predmete« med obema vzorcema zastopana v enaki meri, vendar imajo, za razliko od učencev z GO, vsi učenci brez GO razvito vsaj

Tabela 3: Vrsta strategij **seštevanja** glede na gibalno oviranost

			Gibalna oviranost		Skupaj
			da	ne	
Strategije seštevanja	nima strategije	*f*	11	4	15
		%	50,0	18,2	34,1
	šteje vse na prste	*f*	1	1	2
		%	4,5	4,5	4,5
	začne s prvim številom, ne glede na velikost, in prišteje drugo	*f*	1	8	9
		%	4,5	36,4	20,5
	začne z večjim številom in prišteje drugo	*f*	7	3	10
		%	31,8	13,6	22,7
	prikliče aritmetično dejstvo	*f*	2	6	8
		%	9,1	27,3	18,2
Skupaj		*f*	22	22	44
		%	100,0	100,0	100,0

Tabela 4: Vrsta **strategij odštevanja** glede na gibalno oviranost

			Gibalna oviranost		Skupaj
			da	ne	
Strategije odštevanja	nima strategije	*f*	12	5	17
		%	54,5	22,7	38,6
	prešteje večje število na prste, odšteje manjše in prešteje preostanek	*f*	8	12	20
		%	36,4	54,5	45,5
	šteje nazaj po ena od večjega števila	*f*	1	1	2
		%	4,5	4,5	4,5
	šteje po ena naprej od manjšega števila	*f*	1	1	2
		%	4,5	4,5	4,5
	priklic aritmetičnega dejstva	*f*	0	3	3
		%	0,0	13,6	6,8
Skupaj		*f*	*f*	22	44
		%	100,0	100,0	100,0

eno strategijo preštevanja predmetov. Učenci brez GO uporabljajo v večji meri višje razvite *strategije seštevanja* (treba je omeniti, da več učencev z GO uporablja strategijo »začne z večjim številom, ne glede na velikost, in prišteje drugo«, vendar pa več učencev brez GO prikliče aritmetično dejstvo pri seštevanju). Prav tako je pri *strategijah štetja nazaj* več učencev, ki prikličejo aritmetično dejstvo (13,6 %), med učenci z GO pa ni nobenega učenca, ki bi uporabljal to strategijo. Razloge za omenjena dejstva pripisujemo predvsem vplivu spremljajočih posledic GO. Učenci z GO imajo zaradi specifičnega poteka motoričnega razvoja pogosto zmanjšane zmožnosti samostojnega manipuliranja s predmeti, pomanjkljivo je razvita tako groba kot tudi fina motorika (Žgur, 2017), tako učenci posledično razvijejo tudi manj spontanih predštevilskih dejavnosti. Gibalno oviranost pogosto spremljajo pridružene senzorno-perceptivne motnje, motnje zaznavanja lastnega telesa in telesne sheme, motnje pomnjenja in pozornosti, težave pri zaznavanju predmetov, težave z organizacijo učenja, dela …, dodatne težave pa lahko povzroča še pogosta odsotnost od pouka (zaradi postopkov zdravljenja ali rehabilitacije, utrujenost zaradi fizičnih ovir ipd.), kar vse lahko vpliva na učenje in usvajanje šolskega znanja ter učenje aritmetičnih strategij. Učenci z GO in LMDR potrebujejo bistveno več utrjevanja in ponavljanja. Iz rezultatov sklepamo, da učenci 2. in 3. razreda še niso zadovoljivo usvojili in avtomatizirali vseh strategij štetja in računanja ter potrebujejo pri tem še mnogo vodenih izkušenj in usmerjenih ter konkretnih vaj.

Strategije pomoči in podpore pri razvijanju številskih predstav

Strokovni delavci lahko pomagajo učencem pri razvijanju številskih predstav z naslednjimi **splošnimi strategijami** (Hodnik Čadež, 2002; Kavkler, 2011):

- Pred začetkom vsake nove ure naredimo povzetek prejšnje snovi.
- Uporabljamo čim bolj različne primere matematičnih problemov, ki naj bodo povezani z življenjskimi situacijami.
- Učencem zagotovimo različne konkretne in grafične materiale, ki jim pomagajo pri razumevanju matematičnih vsebin in konceptov.
- Učencem matematične vsebine in probleme v čim večji meri verbaliziramo.
- Učenje in poučevanje naj bo aktivno, multisenzorno, povezano z učenčevimi izkušnjami.
- Delovni listi naj bodo prostorni in ne prenatrpani s preveč vizualnimi informacijami.
- Potrebno je načrtno spodbujanje rabe prstov ali drugih predmetov pri usvajanju količin in pri računanju.
- V čim večji meri naj se spodbuja predštevilske dejavnosti urejanja, razvrščanja.
- Potreben je sistematičen prehod od naravnih predmetov, preko grafične ponazoritve do simbolov.

Predstavljamo še nekaj praktičnih primerov razvijanja **specifičnih strategij (z avtorsko določenimi cilji)** za pomoč pri razvijanju številskih predstav, ki so nastale kot rezultat magistrskega dela (Vidmar, 2017).

Strategija za obravnavo novega števila

Tabela 5 prikazuje korake strategije za obravnavo novega števila do 10.

Tudi pri obravnavi števil do 20 in naprej lahko prav tako sledimo tem korakom, le da uporabljamo razne materiale, ki ponazarjajo enice in desetice ter nadalje stotice. Pomembno je tudi, da sproti, ko obravnavamo nova števila, izgrajujemo številsko vrsto.

Tabela 5: Strategija za obravnavo novega števila

1. korak	Pred obravnavo novih števil uporabimo čim več različnih predštevilskih dejavnosti razvrščanja, prirejanja, urejanja.
2. korak	Ob obravnavi novega števila glasno povemo število, ki ga bomo obravnavali, ga ponazorimo s konkretnimi predmeti (nastavljamo množice istovrstnih predmetov števila 4 – nastavimo 4 svinčnike, 4 radirke, 4 flomastre itd.).
3. korak	Utrjujemo količinsko predstavo o novo spoznanem številu (nastavljamo množice z raznovrstnimi predmeti, z isto močjo – za število 4 to pomeni v eni množici npr. 1 kemik, 1 radirka, 1 zvezek, 1 kamenček. Predmeti med množicami naj se dobro razlikujejo, da učenec razliko opazi). Uporabimo čim več različnih naravnih predmetov, ki jih učenci poznajo. Učenec najprej nastavi predmete zase, nato pogleda pri ostalih sošolcih.
4. korak	Število ponazorimo z didaktičnim materialom (npr. kockami, kroglicami).
5. korak	Število zapišemo s številsko sliko (npr. pikicami, ki ponazarjajo količino tega števila). Številsko sliko damo zraven ali jo prilepimo na konkretno ponazorjeno količino tega predmeta (na kamenčke, kocke, flomastre ipd.).
6. korak	Število zapišemo tudi z besedo.
7. korak	Število zapišemo s številskim simbolom: • Najprej zapis učitelj demonstrira in verbalizira, lahko s pomočjo pesmice (npr. za številko 5 lahko po korakih, ob demonstraciji, pove: »Moj vrat kratek je in raven, trebušček okrogel in napet, na vrhu pa še streha, to sem jaz, številka 5!«.) • Sledi zapis števila na veliko podlago, učenci lahko po njem hodijo, se vozijo z vozički, sledijo z avtomobilčki itd. • Število zapišemo na manjšo predlogo, učenci jo prevlečejo z raznimi barvicami, rišejo npr. mavrico, ji sledijo z različnimi predmeti, jo okrasijo, izdelajo iz plastelina. • Število lahko zapišemo v sipke materiale: riž, moko, peno za britje, zdrob, mivko ipd. • Sledi zapis na še manjšo predlogo, po katerem učenci vlečejo mavrico, polagajo predmete ipd. • Na koncu sledi prost zapis števila – najprej na večje, nato na manjše ploskve.

Morske zvezde

Cilj aktivnosti je prirejanje morskih zvezd k pikam (slika 1). Učenci priredijo po eno

Slika 1: Aktivnost prirejanja. (Living Montessori Now, b.d.)

morsko zvezdico k vsaki piki. V poznejših korakih na bele številke položijo še peščene številke, s tem utrjujejo simbolni zapis števila. Prirejanje je pomembna sposobnost za razvoj občutka za števila in štetje, pomembno je, da jo učenci v čim večji meri urijo.

Opomba: Morske zvezde so primer praktičnega materiala, lahko jih nadomestimo z drugimi predmeti, ki so večji in lažji za prijemanje (npr. kocke, ploščice, zamaški iz plute, kostanji, kamenčki ipd.), saj nekateri učenci z GO potrebujejo več prilagoditev. *Opomba velja za vse nadaljnje aktivnosti in strategije.*

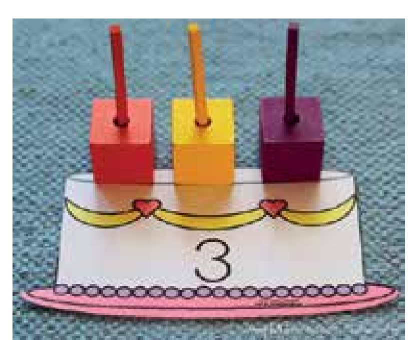
Rojstnodnevno število

Cilj aktivnosti je, da učenci utrjujejo povezavo med količino, številskim simbolom ter štetjem.

Pripomočki (Slika 2):
- torte iz papirja ali kartona,
- več svečk različnih barv, sestavljene iz dveh delov.

Navodilo: Ob praznovanju rojstnega dne v razredu vsi učenci dobijo torte iz papirja, na katerih je zapisano, koliko let ima učenec, ki praznuje rojstni dan. Na torte (sami ali ob pomoči) postavijo svečke (Slika 3).

Slika 2: Rojstnodnevno število. (Living Montessori Now, b.d.)



Slika 3: Rojstnodnevno število. (Living Montessori Now, b.d.)

Poišči par

1. primer: Polovici učencev nalepimo na sprednjo stran majice števila (1–10 ali 1–20), drugi polovici pa količinske ponazoritve teh zapisanih števil (npr. pike, krogce, kapljice), ponazoritev naj bo nestandardna (drugačna od standardne ponazoritve na igralni kocki). Učenci morajo poiskati svoj par, tako utrjujejo povezavo med količino in številskim simbolom.

2. primer: Učencem nalepimo na sprednjo stran majice številke (1–10 ali 1–20). Po dva učenca imata na majici enako številko. Naloga učencev je, da poiščejo svoj par, tako lahko utrjujejo vizualno podobo zapisanih števil.

3. primer: Aktivnost je namenjena utrjevanju računov seštevanja in odštevanja. Polovici učencev zalepimo na sprednjo stran majice račune v obsegu 1–5 ali 1–10, drugi polovici pa vsoto ali razliko za pripadajoči račun. Učenci morajo poiskati svoj par.

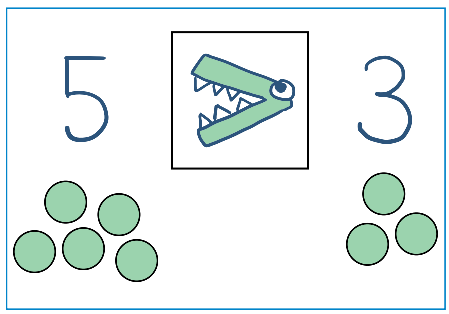
Na enak način lahko igramo igro spomin s kartami, za vse tri primere.

Koga bo pojedel krokodil?

Cilji:
- Učenci s pomočjo konkretnega materiala določijo večje in manjše število.
- Učenci s pomočjo grafične ponazoritve določijo večje in manjše število.
- Učenci določijo večje in manjše število na simbolnem nivoju.

Pripomočki (Slika 4, Slika 5, Slika 6):
- kartice z vpisanimi števili,
- narejena krokodilova usta iz lesa,
- slika krokodilovih ust,
- cofki, kamenčki ali drug material.

Navodila:
1. **Korak:** Učenec si pod vsako število nastavi ustrezno število frnikol/cofkov. Povemo mu, da krokodilček vedno poje večje število, in ga vprašamo, na katero stran se bo torej obrnil.
2. **Korak**: Postopoma opuščamo konkretni nivo (cofke in lesenega krokodilčka) in učenec vadi na grafičnem nivoju (nariše ali pobarva določeno število krogcev ter vriše krokodilčka v prazno okence).



Slika 5: Večje in manjše število – 2. korak.

3. **Korak**: Učenec vadi na simbolnem nivoju.

$$5 \boxed{>} 3$$

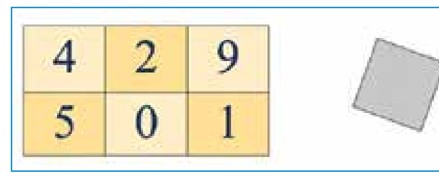
Slika 6: Večje in manjše število – 3. korak.

Didaktična igra: Bingo

Cilji:
- Učenci utrjujejo simbolni zapis števila.
- Učenci povezujejo simbolni zapis števila z verbalno oznako.
- Učenci utrjujejo branje števil do 10.

Pripomočki:
- igralne podloge (Slika 7),
- manjši kartončki za pokrivanje števil.

Navodila igre: Vsak učenec dobi svojo igralno podlogo s šestimi polji, na kateri so števila od 0 do 10 (Slika 7). En učenec ali odrasla oseba je zadolžena za žrebanje števil. Tisto število, ki ga izžreba, glasno prebere (vendar ga ne pokaže). Zmagovalec je tisti, ki prvi prekrije vsa polja. Igro se lahko igra, dokler vsi ne prekrijejo svojih polj.



Slika 7: Bingo.

Opomba: Igralna podloga lahko vsebuje števila poljubnega številskega obsega.

Različice igre: Igra se lahko izvaja tudi z drugačnimi cilji (npr. utrjevanje preprostih računskih operacij seštevanja in odštevanja). V tem primeru namesto žreba ene številke izžrebamo kartico, na kateri so zapisani računi ali uganke (Slika 8).

1. Številu 3 dodaj število 2. Katero število dobiš?

2. Pred mano je število 6, za mano pa število 8. Katero število sem?

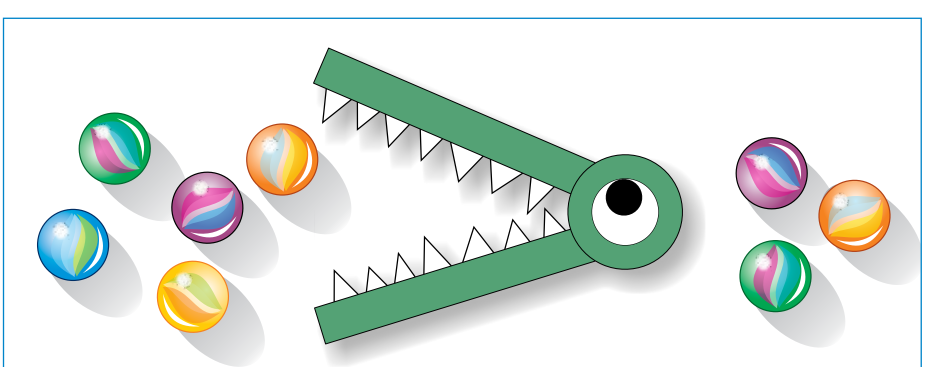
3. Sem za 3 številke večje od števila 4. Katero število sem?

4. Če od mene odštejeº 2, dobiš število 1. Katero število sem?

5. Za mano sta števili 9 in 10. Katero število sem?

6. Pred mano ležita števili 7 in 8. Katero število sem?

Slika 8: Bingo – različica igre.



Slika 4: Večje in manjše število – 1. korak.

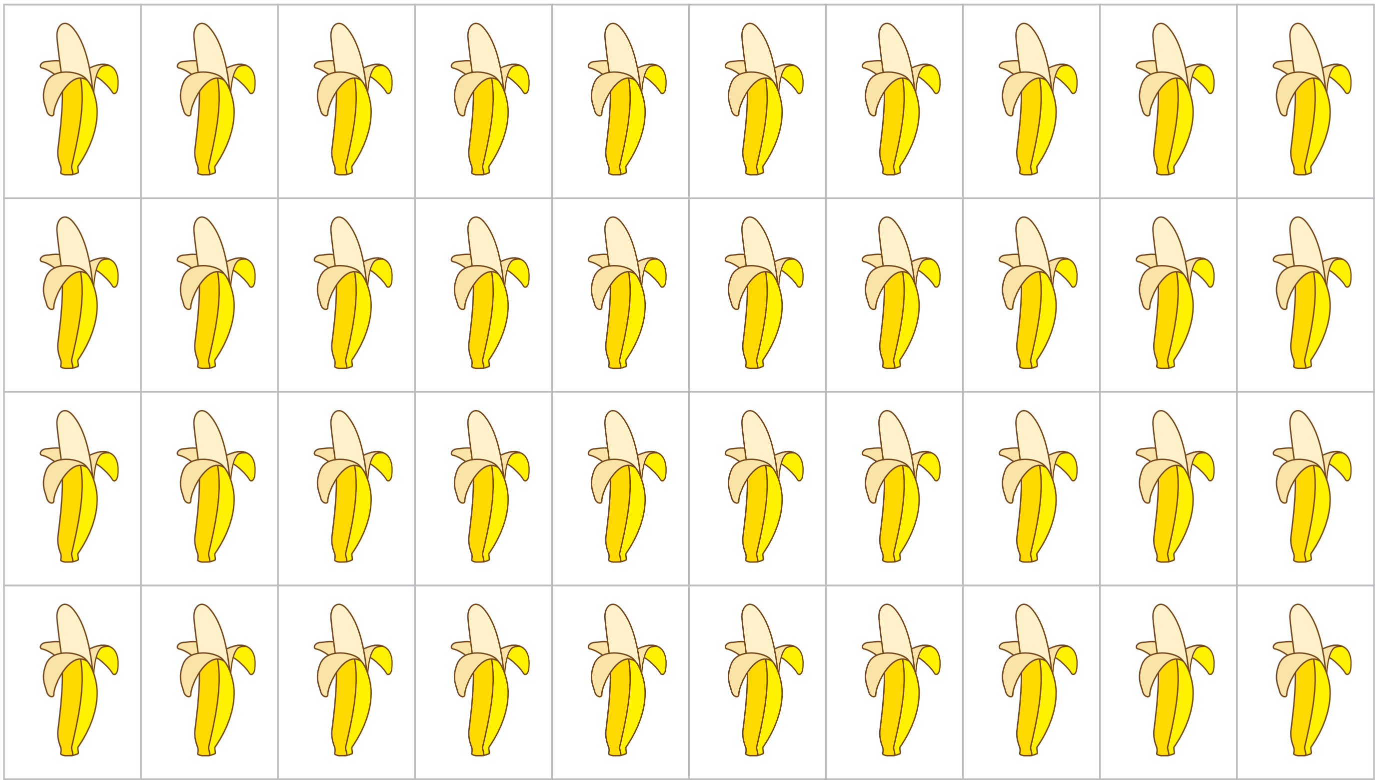
Didaktična igra: Nahrani opico

Cilji:
- Učenci štejejo do 5.
- Učenci utrjujejo količinske predstave o številih.

Pripomočki:
- igralna podloga (Slika 9),
- barvna kocka,
- igralne figure (poljubne),
- kartice z bananami (približno 40 kartic za dva igralca) (Slika 10).

Navodila :
Vsak igralec dobi igralno figurico in enako število kartic z bananami. Prvi igralec vrže barvno kocko. Premakne se na tisto polje, kot kaže barva na kocki. Pogleda, katera številka je zapisana na njegovem polju. Nato, glede na to številko, nahrani opico z bananami, tako da opici položi v usta določeno število banan (npr. če je na polju zapisana številka tri, položi opici v usta tri banane). Zmaga tisti, ki prvi porabi vse kartice.

Slika 9: Nahrani opico.



Slika 10: Igralne karte za igro Nahrani opico.

Zaključek

Na osnovi dobljenih raziskovalnih podatkov povzemamo, da obstajajo razlike med učenci z GO in učenci brez GO pri rabi strategij štetja in računanja. Učenci z GO večinoma nimajo izdelanih strategij, s katerimi bi si lahko pomagali pri štetju in računanju. Statistično značilne razlike so se izkazale pri rabi strategij preštevanja predmetov in seštevanja. Pri preštevanju predmetov se je največja razlika pokazala v tem, da imajo vsi učenci brez GO določeno strategijo pri preštevanju predmetov, pri učencih brez GO je skoraj četrtina takšnih, ki strategije nimajo. Največja razlika pri seštevanju se med obema skupinama učencev kaže v tem, da veliko več učencev brez GO nima ustrezne strategije seštevanja, manj jih tudi prikliče aritmetično dejstvo. Slednje nakazuje, da še nimajo usvojene avtomatizacije priklica.

Potrjene so opazne razlike med učenci z GO in učenci brez GO pri uporabi strategij, zato bi bilo v praksi smiselno več časa posvetiti konkretni dejavnosti in ponazoritvi pri razvoju številskih in prostorskih strategij pri učencih z GO. Pri poučevanju pa je treba uporabljati čim več konkretnih, realističnih, z življenjem povezanih dejavnosti ter ostati na nivoju konkretnega poučevanja, vse dokler posamezen učenec to potrebuje, in šele postopno, s primerno zahtevnostjo preiti na grafični in simbolni nivo. S tem namenom smo v prispevku zbrali nekaj dejavnosti in strategij, s katerimi lahko izboljšamo proces poučevanja in učenja strategij. Številske in prostorske predstave so temelj za nadaljnjo uspešnost na matematičnem področju, zato je smiselno, da jim v praksi posvetimo dovolj časa in učencem, še posebej učencem z GO, nudimo dovolj realnih, zabavnih in konkretnih izkušenj. ■

Literatura

Arp, S., Taranne, P. in Fagard, J. (2006). Global Perception of Small Numerosities (Subitizing) in Cerebral-palsied Children. *Journal of Clinical and Experimental Neuropsychology, 28*(3), 405–419. doi: 10.1080/13803390590935426

Bymes, J. in Wasik, B. (2009). Factors predictive of mathematics achievement in kindergarten, first and third grades: An opportunity–propensity analysis. *Contemporary Educational Psychology 34*(2), 167–183. doi: 10.1016/j.cedpsych.2009.01.002

Erkoç, M. F., Gecü, Z., in Erkoç, C. (2013). The Effects of Using Google SketchUp on the Mental Rotation Skills of Eighth Grade Students. *Educational Science: Theory & Practice, 13*(2), 1285–1294. Pridobljeno s http://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1017248.pdf

Geary, D.C (1994). *Children's Mathematical Development: Research and practical applications.* Washington, DC: American Psychological Association.

Haskell, S. in Barrett, E. (1993). *The Education of Children with Physical and Neurological Disabilities.* London: Chapman & Hall.

Kalan, M. (2015). *Strategije reševanja aritmetičnih besednih problemov pri učencih z učnimi težavami pri matematiki.* (Doktorska disertacija, Pedagoška fakulteta Ljubljana). Pridobljeno s http://pefprints.pef.uni-lj.si/2812/1/Doktorska_naloga_2015_Marko_Kalan.pdf

Kavkler, M. (1997). *Latentna struktura specifičnih učnih težav pri matematiki* (Doktorska disertacija). Pedagoška fakulteta Ljubljana.

Kavkler, M. (2007). Specifične učne težave pri matematiki. V M. Kavkler in M. Košak Babuder (ur.), *Učenci s specifičnimi učnimi težavami: Skriti primanjkljaji – skriti zakladi* (77–113). Ljubljana: Društvo Bravo.

Labinowicz, E. (2010). Izvirni Piaget. *Učenje – Mišljenje – Poučevanje.* Ljubljana: DZS.

Tomšič, G. idr. (b.d.). *Učni načrt za prilagojen izobraževalni program z nižjim izobrazbenim standardom. Matematika.* Pridobljeno s http://www.mizs.gov.si/fileadmin/mizs.gov.si/pageuploads/podrocje/posebne_potrebe/programi/ucni_nacrti/pp_nis_matematika.pdf

Van Rooijen, M., Verhoeven, L. in Steenbergen, B. (2011). Early numeracy in cerebral palsy: review and future research. *Developmental Medicine & Child Neurology*, 53, 202 – 209. doi: 10.1111/j.1469-8749.2010.03834.x

Vidmar, A. (2017). Številske in prostorske predstave pri učencih z gibalno oviranostjo in lažjimi motnjami. v duševnem razvoju. (Magistrsko delo). Pedagoška fakulteta Ljubljana.

Vipavc, J. in Kavkler, M. (2015). Konceptualne osnove obravnave učencev z učnimi težavami pri matematiki. V M. Kavkler in M. Košak Babuder (ur.), *Težave pri učenju matematike: strategije za izboljšanje razumevanja in učnih dosežkov učencev* (9–24). Ljubljana: Bravo, društvo za pomoč otrokom in mladostnikom s specifičnimi učnimi težavami.

Vovk-Ornik, H. (ur.), *Kriteriji za opredelitev vrste in stopnje primanjkljajev, ovir oziroma motenj otrok s posebnimi potrebami* (str. 23–31). Ljubljana: Zavod RS za šolstvo. Pridobljeno s http://www.zrss.si/pdf/Kriteriji-motenj-otrok-s-posebnimi-potrebami.pdf**.**

Vrlič Danko, A. (2005). *Gibalno ovirani otroci in otroci z nevrološko poškodbo v vrtcu in v šoli.* Maribor: Svetovalni center za otroke, mladostnike in starše Maribor.

Žakelj, A. in Valenčič Zuljan, M. (2015). *Učenci z učnimi težavami pri matematiki: prepoznavanje učnih težav in model pomoči.* Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo.

Žgur, E. (2017). Vloga razvoja motorike pri otroku in njena vpetost v predšolski kurikul - pomen zgodnje obravnave. V B. Vrbovšek, D. Belak in S. Žnidar, Simona (ur.), Različni otroci – enake možnosti (str. 28–40). Ljubljana: Supra.

Žgur, E. (2017). Aspects of motor development in children with cerebral palsy. Innovative issues and approaches in social sciences. *Innovative Issues and Approaches in Social Sciences, 10*(1), 117–126. Pridobljeno s http://pefprints.pef.uni-lj.si/4358/1/Zgur.pdf

Nadarjeni otroci na matematičnem področju

Tanja Črnivec
Osnovna šola Stična

Povzetek

Matematična sposobnost je osnova za matematično nadarjenost in je zmožnost spretnega in hitrega operiranja s števili in odnosi med njimi (Kavaš v Blažič, 2002). Cilj raziskave z uporabo anketnega vprašalnika je ugotavljanje razlik med matematično nadarjenimi in ostalimi učenci 8. in 9. razreda. Sodelovalo je 35 evidentiranih matematično nadarjenih in 86 ostalih učencev. Odgovorili so na 5 vprašanj s področja računanja, pomena matematike, grafičnega ponazarjanja in udeležbe na tekmovanju Mednarodni matematični kenguru. Rezultati so prikazani z odstotki, ločeno za deklice in dečke. Bistvene ugotovitve raziskave so, da ocene niso odraz nadarjenosti. Tudi učenci, ki niso identificirani kot matematično nadarjeni, so lahko uspešni na matematičnem tekmovanju. (Črnivec, 2009).

Opomba: V prispevku z besedno zvezo ***matematično nadarjeni učenci*** mislimo učence, ki so identificirani kot nadarjeni na matematičnem področju.

Ključne besede: nadarjenost, matematično nadarjeni učenci, raziskava

Mathematically Talented Children

Abstract

Mathematical skills as the basis of mathematical talent are the ability to quickly and easily operate with numbers and their relationships (Kavaš and Blažič, 2002). The purpose of the research using questionnaires was to determine the differences between mathematically talented students and other eighth and ninth grade students. The research included 35 documented mathematically talented students and 86 other students who answered 5 questions relative to calculation, mathematical significance, graphic representation and the international mathematical competition Mathematical Kangaroo. The results are given in percent separately for girls and boys. The most important research findings are that grades do not reflect talent. Even students who are not considered mathematically talented can be successful in mathematical competitions (Črnivec, 2009).

Note: The term ***mathematically talented students*** in the article refers to students who were recognized as talented in mathematics.

Keywords: talent, mathematically talented children, research

Uvod

Nadarjenost je prirojena sposobnost. Otrok jo lahko podeduje od enega ali obeh staršev. Vendar je sam potencial premalo, če ga ne razvijamo. Pomembno je tudi okolje, v katerem otrok odrašča. Matematična nadarjenost se pri otroku kaže že zelo zgodaj. Matematično nadarjen otrok postavlja smiselna vprašanja že v zgodnjem otroštvu (do 8 let). V obdobju pubertete ga odlikuje samostojno učenje ter interes za fiziko in matematiko. Pri obeh predmetih navadno dosega boljše ocene. Veliko vlogo imajo učitelji in starši nadarjenega. Brez njihove podpore se nadarjenost ne bi razvila. Zelo pomembno je tudi njihovo medsebojno sodelovanje ter že zgodnje odkrivanje nadarjenih učencev pri pouku. Osnovna šola naj bi dopuščala nadarjenemu učencu zgodnejši vstop v šolo, preskok razreda, zunanjo, notranjo in fleksibilno diferenciacijo, dodatni pouk ter izbirne predmete.

Nekateri nadarjeni imajo pogosto težave pri socialnih odnosih s sovrstniki. Navadno bolj zrelo razmišljajo, tako da jih sovrstniki ne morejo razumeti. Veliko je tudi zbadanja na račun drugačnosti. Ena izmed večjih težav je pomanjkljiva motivacija za šolsko delo in slabe učne navade, saj jih rutinske naloge dolgočasijo. Tudi pri izbiri poklica se srečajo s težavo, saj jih navadno zanima več stvari, ali jih omejuje učni uspeh, ki ni nujno odličen (Bezić, 2006).

Značilnosti matematično nadarjenih otrok

Značilnosti matematično nadarjenih otrok lahko razdelimo po področjih (Kavaš v Blažič, 2002):

Učne značilnosti: Učenci hitro spoznajo načela, na katerih temeljijo stvari, mislijo jasno in precizno, kritično presojajo podatke in dokaze, hitro si zapomnijo dejstva, iščejo skupne značilnosti in razlike, hitro analizirajo različne vsebine in probleme.

Motivacija: Učenci si prizadevajo, da bi naloge vedno rešili, radi delajo neodvisno, določenim problemom se povsem predajo, ob rutinskih nalogah se dolgočasijo; če jih naloga zanima, ne potrebujejo nobene zunanje motivacije.

Ustvarjalnost: Učenci veliko sprašujejo o različnih stvareh, svoje mnenje jasno izrazijo, pri reševanju problemov tudi tvegajo, imajo veliko idej in problemskih rešitev.

Vpliv spola na matematično nadarjenost

V literaturi zasledimo več vzrokov za različno distribucijo matematičnih sposobnostih med dečki in deklicami.

Razlike so posledica različne zgradbe možganov pri ženski oz. moškem, pomembnosti funkcije leve možganske hemisfere in pomembnosti moških hormonov za razvoj matematične sposobnosti.

Razlike so posledica različnih kulturnih in socialnih pogojev, kot so razlike v vzgoji in socializaciji interesov glede na spol. Deklice so že od najzgodnejšega otroštva usmerjene na socialne in estetske vrednote, dečki na materialno-tehnično-znanstvene vrednote (Kavaš v Blažič, 2002).

Najpomembnejši dejavniki nadarjenih otrok

Do trenutka, ko začne otrok hoditi v šolo, so v glavnem starši odgovorni za to, da bodo odkrili njegove posebne sposobnosti. Pomembno je, da otrokovo vedoželjnost in voljo do storilnosti že v predšolskem obdobju spodbujajo, mu pomagajo, da s svojo storilnostjo nadaljuje tudi po vstopu v šolo in ga bodrijo. Paziti morajo, da ne gojijo prevelikih pričakovanj (Knafelc v Blažič, 2003).

Učitelj, ki ima v razredu nadarjene učence, mora biti dovolj zrel in hkrati sposoben sprejemati otroke z vrhunskimi sposobnostmi. Za nadarjene otroke mora najti in oblikovati pogoje za njihov razvoj. Razumeti mora njihove občutke osamljenosti in frustracije, ki so posledica prehitrega intelektualnega razvoja.

Sodelovanje staršev in učiteljev pripomore k razvoju otrokove nadarjenosti, hkrati pomeni združevanje tistih akterjev, ki jih nadarjeni otrok potrebuje ob sebi. Nudijo mu veliko podporo, dajejo možnost za izražanje in mu pomagajo pri reševanju osebnih problemov.

Raziskovalni del

Glavni cilj raziskovalnega dela je primerjati interese in načine reševanja nalog med matematično nadarjenimi in ostalimi učenci. Anketiranih je bilo 121 učencev – 63 deklic in 58 dečkov.

Od 121 učencev je bilo 35 matematično nadarjenih, in sicer 18 deklic in 17 dečkov. Ostalih je bilo 86 učencev.

Anketne vprašalnike so reševali učenci 8. in 9. razreda dveh podeželskih osnovnih šol. Z njimi sem skušala ugotoviti, kako se nadarjeni učenci razlikujejo od ostalih. Zanimale so me razlike med nadarjenimi dečki in deklicami pri reševanju nalog z več rešitvami, razlike v grafičnih ponazoritvah, kdo se udeležuje tekmovanja Mednarodni matematični kenguru. Primerjala sem tudi zaključene ocene pri matematiki v preteklem šolskem letu.

Ugotovitve

Vprašanje je bilo, **na koliko različnih načinov lahko sestavijo** številski izraz **iz števk 2 in 5** z uporabo osnovnih računskih operacij. Vse možne številske izraze, tj. 8, je napisalo 27 matematično nadarjenih učencev (77 %) in 47 ostalih učencev (55 %), kar sem tudi pričakovala. Sestavili so naslednje številske izraze oziroma enakosti:

$2 + 5 = 7$; $5 + 2 = 7$; $5 - 2 = 3$; $2 - 5 = -3$; $5 \cdot 2 = 10$; $2 \cdot 5 = 10$; $5 : 2 = 2{,}5$; $2 : 5 = 0{,}4$

Med učenci, zajetimi v raziskavo, so matematično nadarjeni učenci napisali več različnih rešitev pri nalogi z več rešitvami kot ostali učenci.

Več različnih načinov sestavljanja številskih izrazov je napisalo 15 matematično nadarjenih dečkov (88 %) in 17 matematično nadarjenih deklic (94 %).

Med učenci, zajetimi v raziskavo, so matematično nadarjene deklice napisale več rešitev pri nalogi z več rešitvami kot matematično nadarjeni dečki.

Na vprašanje, **zakaj mislijo, da je matematika koristna**, so matematično nadarjeni napisali več odgovorov kot ostali učenci. Največ, tj. 5 odgovorov, je napisal 1 nadarjen deček (6 %). Med nadarjenimi so se največkrat pojavili naslednji odgovori:

- za vsakdanjo rabo (v trgovini in na banki),
- v gradbeništvu (za načrtovanje in gradnjo hiš),
- za medsebojno razumevanje (logika je tista, ki jo potrebujemo za pravične odnose).

Ostali učenci so največkrat napisali odgovor, da matematiko potrebujemo:

- za vsakdanjo rabo (v trgovini in na banki),
- za službo in za način razmišljanja.

Med učenci, zajetimi v raziskavo, so matematično nadarjene deklice napisale manjše število odgovorov (72 %) na postavljeno vprašanje kot matematično nadarjeni dečki (82 %).

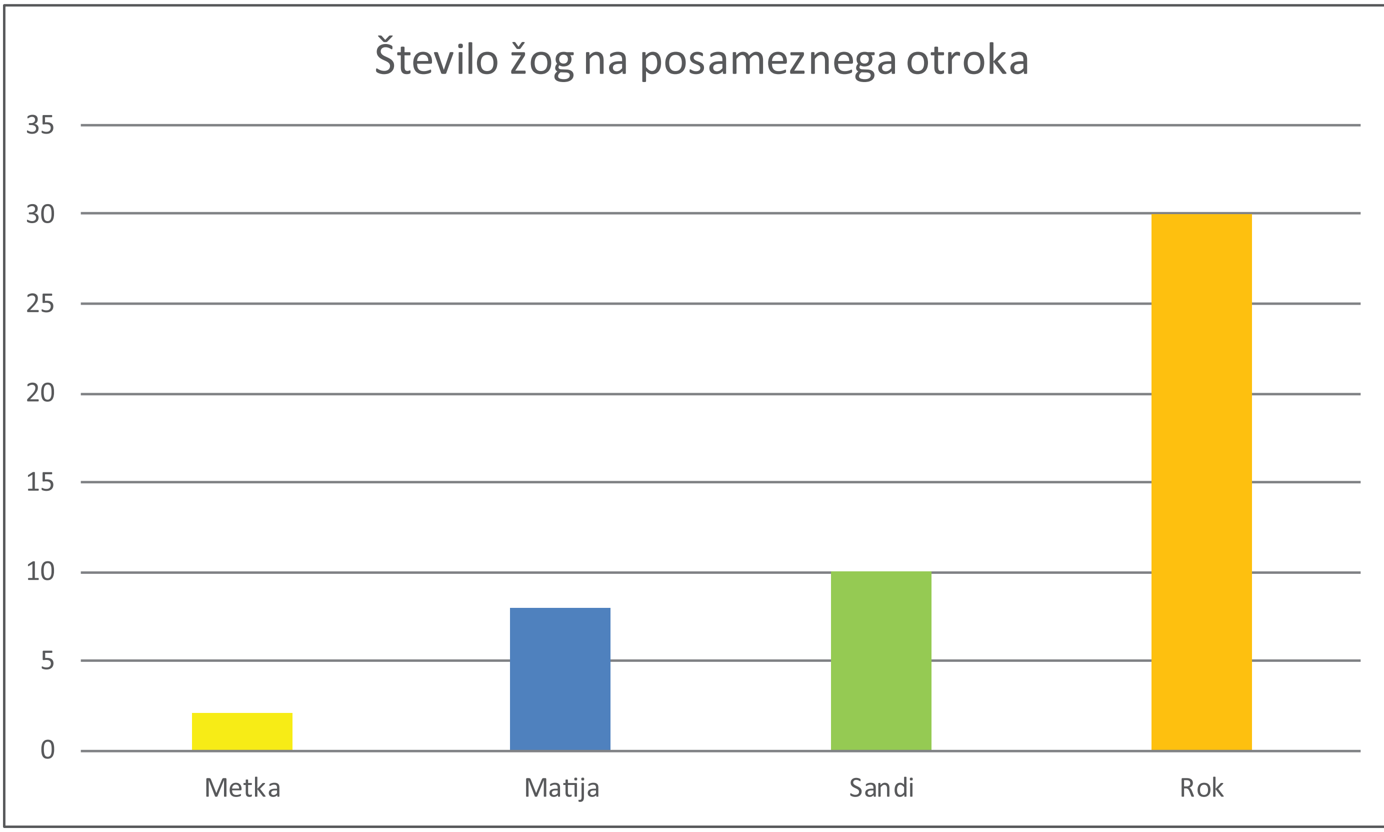
Naloga, ki so jo morali učenci grafično ponazoriti: *Metka ima 2 celi žogi, Matija 3 cele žoge in 5 poškodovanih, Sandi 8 celih žog in 2 poškodovani. Rok ima x žog in vse so cele. Koliko žog ima Rok, če jih imajo vsi skupaj 50.*

Deklice so pogosto pretirano natančne, dečki nasprotno pogosto ustvarjajo intuitivne, hitre rešitve. Tudi v tem primeru so bile deklice bolj natančne pri grafični ponazoritvi.

Nalogo je pravilno grafično ponazorilo 16 matematično nadarjenih deklic (89 %) in 13 matematično nadarjenih dečkov (76 %).

Pri grafični ponazoritvi matematične naloge so bile matematično nadarjene deklice uspešnejše kot matematično nadarjeni dečki.

Na **vprašanje o udeležbi na tekmovanju Mednarodni matematični kenguru** je 18 matematično nadarjenih učencev (51 %) obkrožilo odgovor, da so se vsako leto



udeležili tekmovanja, vendar niso vedno dobili priznanja. Eden (3 %) se tekmovanja ni nikoli udeležil.

Med ostalimi 86 učenci je 32 (37 %) takih, ki se niso nikoli udeležili tekmovanja. Samo eden (1 %) se je udeležil tekmovanja vsako leto in vedno dobil tudi priznanje.

Kot zanimivost velja izpostaviti, da je med matematično nadarjenimi učenci 1 učenec, ki se ni nikoli udeležil tekmovanja, med ostalimi pa učenec, ki se je vsako leto udeležil tekmovanja in dobil priznanje. Torej so lahko na matematičnem tekmovanju uspešni tudi tisti učenci, ki niso identificirani kot nadarjeni.

Med učenci, zajetimi v raziskavo, matematično nadarjeni učenci na tekmovanju Mednarodni matematični kenguru niso dobili vedno priznanja.

Zaključene ocene iz matematike v preteklem šolskem letu so vidne v Tabeli 1.

Med učenci, zajetimi v raziskavo, je nadarjenost za matematiko vplivala na zaključeno oceno iz matematike, saj je imelo 17 učencev (48,6 %) zaključeno oceno v preteklem letu odlično.

Med učenci, zajetimi v raziskavo, veljajo naslednje sklepne ugotovitve:

- Med matematično nadarjenimi učenci je več deklic kot dečkov.
- Matematično nadarjeni učenci napišejo več različnih rešitev pri nalogi z več rešitvami kot ostali učenci.
- Matematično nadarjene deklice napišejo več rešitev pri nalogi z več rešitvami kot matematično nadarjeni dečki.
- Matematično nadarjeni učenci napišejo več odgovorov na zastavljeno vprašanje kot ostali.
- Matematično nadarjene deklice so uspešnejše pri grafični ponazoritvi matematične naloge kot matematično nadarjeni dečki.
- Matematično nadarjeni učenci ne dobijo vedno priznanja na tekmovanju Mednarodni matematični kenguru.
- Tudi učenci, ki niso identificirani kot matematično nadarjeni, se udeležujejo tekmovanja Mednarodni matematični kenguru.
- Poleg matematično nadarjenih otrok imajo tudi nekateri učenci, ki niso identificirani kot matematično nadarjeni, zaključeno oceno iz matematike odlično ali prav dobro.

Tabela 1: Zaključene ocene iz matematike v preteklem šolskem letu

Ocena	Nezadostno (1)	Zadostno (2)	Dobro (3)	Prav dobro (4)	Odlično (5)	Skupaj
Matematično nadarjeni učenci	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (2,9 %)	17 (48,6 %)	17 (48,6 %)	35 (100 %)
Ostali učenci	0 (0 %)	29 (33,7 %)	31 (36 %)	19 (22,1 %)	7 (8,1 %)	86 (100 %)
Skupaj	0 (0 %)	29 (24 %)	32 (26,4 %)	36 (29,8 %)	24 (19,8 %)	121 (100 %)

Zaključek

Med učenci, zajetimi v raziskavo, je bilo med matematično nadarjenimi učenci več deklic kot dečkov, matematično nadarjeni učenci so napisali več različnih rešitev pri nalogi z več rešitvami in več odgovorov na postavljena vprašanja. Matematično nadarjene deklice so bile uspešnejše pri grafični ponazoritvi matematične naloge kot matematično nadarjeni dečki. Matematično nadarjeni učenci niso dobili vedno priznanja v tekmovanju Mednarodni matematični kenguru in zaključeno oceno odlično so imeli tudi tisti učenci, ki niso bili identificirani kot matematično nadarjeni.

Vsak dober pedagog mora vedeti, da ocena ni nujno odraz učenčeve nadarjenosti. Vsakemu učencu, še posebno pa nadarjenim, je treba omogočiti vključevanje v različne dejavnosti, kot so: tekmovanja, nastopi na prireditvah, interesne dejavnosti ... Učitelji se moramo zavedati svojega pedagoškega poslanstva, svojega vpliva na otrokove odločitve in moči svojega zgleda. Prav je, da učenca spodbujamo, ga opogumljamo, za uspehe pohvalimo, usmerjamo, mu omogočamo učenje iz lastnih napak, predvsem pa v njem iščemo dobro. ■

Viri in literatura

Bezić, T., idr. (2006). Odkrivanje nadarjenih učencev in vzgojno-izobraževalno delo z njimi. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.

Črnivec, T. (2009). Nadarjeni otroci pri pouku matematike. Diplomsko delo, Pedagoška fakulteta, Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta.

Kavaš, B. (2002). Matematično nadarjeni učenci v osnovni šoli, Pedagoška obzorja, l. 17, št. 3-4, str. 38–50.

Knafelc, B. (2003). Pomen in vloga družine pri spodbujanju nadarjenega otroka, V: Blažič, M. (ur.). Nadarjeni med teorijo in prakso. Ljubljana: NUK, str. 207–218

O dr. Ivanu Vidavu

Dijaki Srednje trgovske šole Ljubljana z mentorico Anico Hočevar

Dijaki Srednje trgovske šole Ljubljana so s svojimi izdelki sodelovali na natečaju:

»IVAN VIDAV – pomemben soustvarjalec matematike v Sloveniji«.

Namen natečaja je bil ozaveščanje o pomembnosti odkritij na področju znanosti, spoznavanje zgodovinskega razvoja matematike in znanih matematikov ter ustvarjanje na razpisano temo.

Letos poteka 100-ta obletnica rojstva slovenskega matematika Ivana Vidava. Največ je raziskoval na področju diferencialnih enačb, funkcionalne analize in algebre. Razen po njegovih znanstvenih razpravah ga poznamo tudi po strokovnih člankih, predvsem s področja teorije števil in geometrije, kot npr.:

- O praštevilih.
- Število π na deset tisoč decimalk.
- Racionalna in iracionalna števila.
- …

Napisal je tudi veliko poljudnoznanstvenih člankov, npr.:

- O številu 13.
- O delitvi dediščine.
- Številka Tonetove osebne izkaznice.
- Kako razrežemo kvadrat na same ostrokotne trikotnike.
- Kako ugotovimo, da je naravno število sestavljeno, preden ga razstavimo.

Objavljamo nekaj izdelkov, ki so bili razstavljeni na 4. mednarodni konferenci o učenju in poučevanju matematike KUPM 2018 v Laškem. ■

Bor Pavlin

Ivan Vidav se je dobro spoznal na
Veliko področji matematike-
Algebre, diferencialne enačbe in razne analize
Napisal je veliko učbenikov-saj ni poznal matematične krize.

Višja matematika 1 in 2 sta mu prinesli Prešernovo nagrado, a
Izjemna nadarjenost ne bo šla v pozabo-kot
DMFA-jev predsednik in častni član,
Avtor številnih člankov in razprav
Vtisnil se je na slovensko matematično nebo-leta 2015 bilo je to.

Petra Grom: Pesem o dr. Vidavu

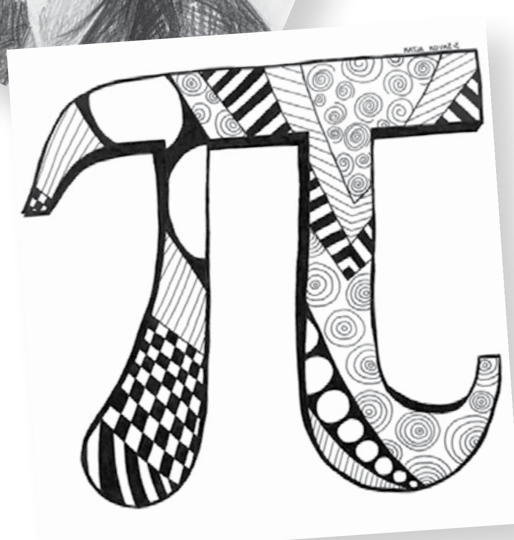
Nika Rihtaršič: Portret dr. Ivana Vidava

Tina Golič: Portret dr. Vidava na platnu

Nika Vesel: dr. Ivan Vidav se zabava

Valentina Kržišnik: Ivan Vidav – portret iz številk

Katarina Ivančič: dr. Vidav v jeseni svojega življenja



Katja Kovačič: Število PI

Katja Kovačič: Ivan Vidav – portret iz številk

Matematika v šoli, št. 1., letnik 24, 2018

Dogajalo se je v Hermanovem brlogu v Celju

Vodniki po razstavi, dijaki Gimnazije Celje - Center

V marcu so v Hermanovem brlogu potekale matematične delavnice. Otroci iz vse okolice Celja so se preizkusili v trinajstih nalogah. Da je bilo lažje, smo cel teden otroke spremljali dijaki Gimnazije Celje-Center. Smo dijaki predšolske vzgoje, zato smo delo animatorja z veseljem opravljali.

Naloge so bile raznolike in zanimive. Dijaki smo bili prisotni predvsem pri težjih matematičnih nalogah. Najprej smo skupino otrok razdelili v dve skupini, saj so bile naloge razdeljene v dveh prostorih. Nato smo jih najprej popeljali skozi naloge, nato pa so jih prosto reševali.

Najbolj so jim bile všeč naloge, ki so vsebovale milnico in seveda je bila miza vedno povsem mokra. Pri teh nalogah so spoznavali telesa. Najmanj pa so se zadrževali pri tistih, ki so bile bolj zahtevne, čeprav priznamo, da so bile nekatere tudi nam težko rešljive. Z nekaj pomoči so otroci rešili prav vsak izziv. Prav tako jim je bilo všeč, ko so morali z dotikom prepoznati kuhinjski pripomoček in razvrstiti slike.

Slika 2: Zrcalno pisanje - naloga otrok je bila, da z gledanjem v zrcalo obrišejo dano obliko (ribica ali zvezda).

Slika 1: Senčno mesto - naloga otrok je, da iz danih lesenih teles sestavijo mesto, katerega senco vidijo v ozadju.

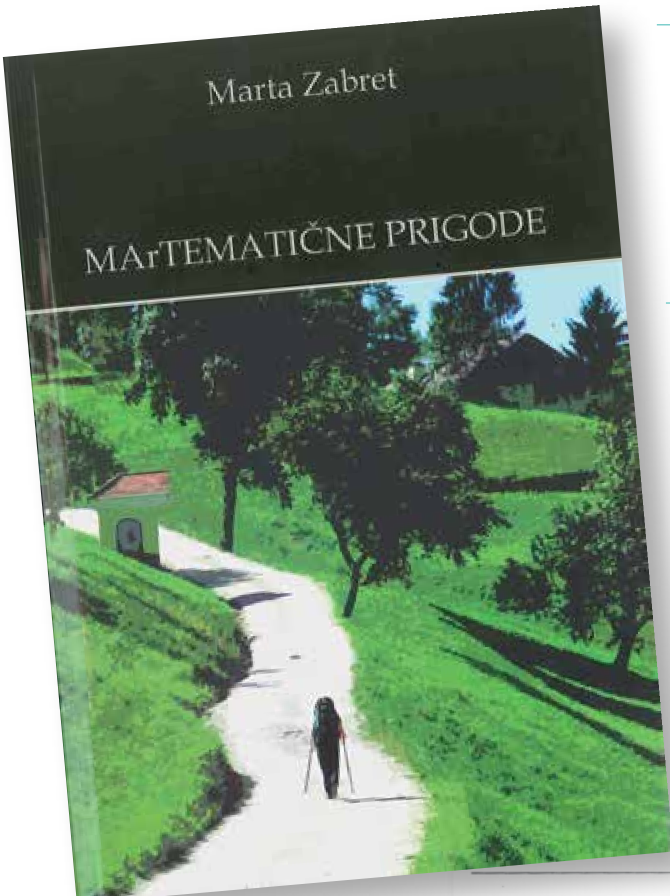
Poleg vseh nalog pa je bil prostor, v katerem so bile razstavljene igrače, ki smo jih izdelali dijaki. Otroci so se z njimi radi igrali, mi pa smo jim jih z veseljem predstavljali.

Teden je hitro minil, mi pa smo pridobili ogromno izkušenj. Sami smo ugotovili, da matematika ni vedno tako težka in nezanimiva.

Slika 3: Most - naloga otrok je bila, da sestavijo most iz danih gradnikov.

Matematika v šoli, št. 1., letnik 24, 2018

Predstavitev nove knjige:
MArTEMATIČNE PRIGODE



Marta Zabret
DMFA-Založništvo
Ljubljana, 2017
148 strani
Cena: 12,50 €

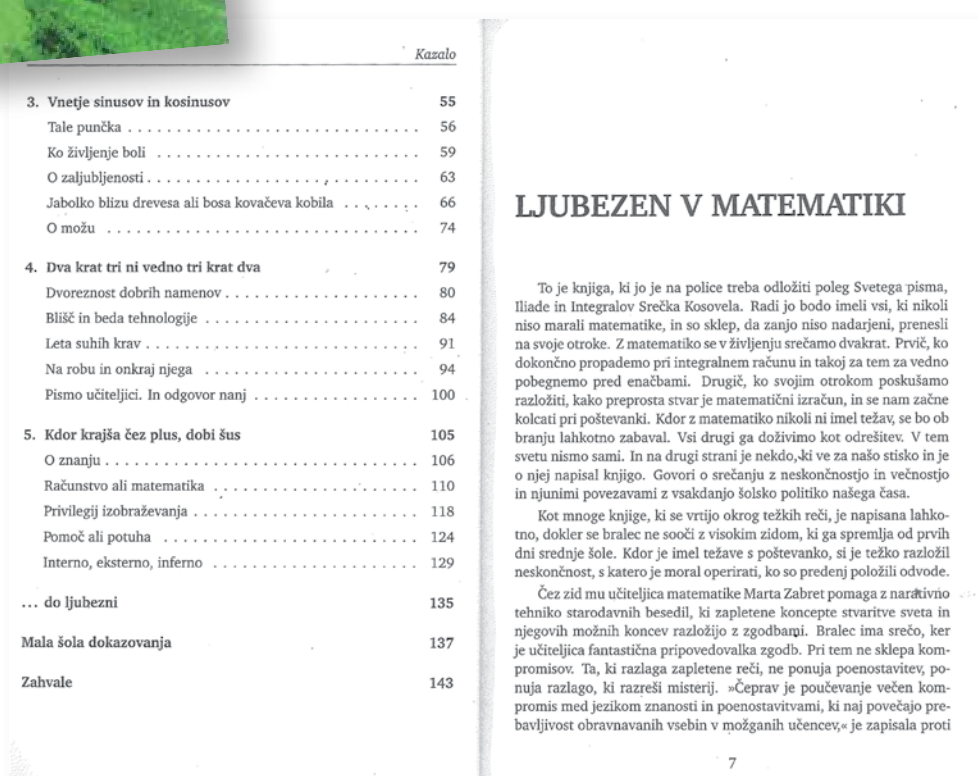
Knjiga je množica kratkih zgodb, v katerih so strnjene mnoge pisateljičine življenjske izkušnje. Vse se vrti okrog matematike in šole. Zvemo za avtoričino življenjsko pot do naziva profesorica matematike in specialistka matematičnega izobraževanja.

Jedro knjige pa so zgodbe o njenih dijakinjah in dijakih. Besedila so napisana zelo lepo in strnjeno, v njih je tudi precej humorja. Zgodbe lahko beremo samostojno; nekatere so prav kratke. Vsi smo tako ali drugače bili deležni matematičnega izobraževanja. (Nekateri smo matematiko tudi poučevali.) Vsebina je zato zanimiva za vse. Marsikatera izkušnja iz knjige pa velja tudi za pouk pri drugih predmetih. Najdemo tudi strnjen, dobro premišljen in humoren prikaz problemov z notranjim ocenjevanjem na šolah in s preskusi znanja na državnem nivoju. Knjiga ima tudi nekaj čisto matematične vsebine, denimo v obliki zanimivo predstavljenih problemov na srednješolskem nivoju.

Naslovnico je lepo oblikovala Neža Vavpetič, matematično navdihnjene izvirne, posrečene ilustracije in vinjete sta prispevali Ariana Godicelj in Ana Hafner.

Knjiga je nadvse dobrodošla novost. Mislim, da jo bodo skoraj vsi bralci priporočili tudi drugim.

dr. Peter Legiša,
Fakulteta za matematiko
in fiziko, Univerza v Ljubljani



Kazalo

LJUBEZEN V MATEMATIKI

To je knjiga, ki jo je na police treba odložiti poleg Svetega pisma, Iliade in Integralov Srečka Kosovela. Radi jo bodo imeli vsi, ki nikoli niso marali matematike, in so sklep, da zanjo niso nadarjeni, prenesli na svoje otroke. Z matematiko se v življenju srečamo dvakrat. Prvič, ko dokončno propademo pri integralnem računu in takoj za tem za vedno pobegnemo pred enačbami. Drugič, ko svojim otrokom poskušamo razložiti, kako preprosta stvar je matematični izračun, in se nam začne kolcati pri poštevanki. Kdor z matematiko nikoli ni imel težav, se bo ob branju lahkotno zabaval. Vsi drugi ga doživimo kot odrešitev. V tem svetu nismo sami. In na drugi strani je nekdo, ki ve za našo stisko in je o njej napisal knjigo. Govori o srečanju z neskončnostjo in večnostjo in njunimi povezavami z vsakdanjo šolsko politiko našega časa.

Kot mnoge knjige, ki se vrtijo okrog težkih reči, je napisana lahkotno, dokler se bralec ne sooči z visokim zidom, ki ga spremlja od prvih dni srednje šole. Kdor je imel težave s poštevanko, si je težko razložil neskončnost, s katero je moral operirati, ko so predenj položili odvode.

Čez zid mu učiteljica matematike Marta Zabret pomaga z narativno tehniko starodavnih besedil, ki zapletene koncepte stvaritve sveta in njegovih možnih koncev razložijo z zgodbami. Bralec ima srečo, ker je učiteljica fantastična pripovedovalka zgodb. Pri tem ne sklepa kompromisov. Ta, ki razlaga zapletene reči, ne ponuja poenostavitev, ponuja razlago, ki razreši misterij. »Čeprav je poučevanje večen kompromis med jezikom znanosti in poenostavitvami, ki naj povečajo prebavljivost obravnavanih vsebin v možganih učencev,« je zapisala proti

7

Mathematics in school

1 2018, Volume 24

CONTENTS

IZ ZALOŽBE ZAVODA RS ZA ŠOLSTVO

Formativno spremljanje v podporo učenju

Priročnik za učitelje in druge strokovne sodelavce

Priročnik obsega **7 zvezkov**, zbranih v mapi, cena 12,40 €

- **Zakaj formativno spremljati**
- **Nameni učenja in kriteriji uspešnosti**
- **Dokazi**
- **Povratna informacija**
- **Vprašanja v podporo učenju**
- **Samovrednotenje, vrstniško vrednotenje**
- **Formativno spremljanje v vrtcu**

Priročniki po predmetih in področjih

Formativno spremljanje na RAZREDNI STOPNJI

Formativno spremljanje pri MATEMATIKI

Napovedujemo:

Formativno spremljanje pri ZGODOVINI

Formativno spremljanje pri DELU SVETOVALNIH DELAVCEV

Formativno spremljanje kot PODPORA UČENCEM S POSEBNIMI POTREBAMI

izid 2018

Zavod Republike Slovenije za šolstvo

Naročanje:
P Zavod RS za šolstvo, Poljanska c. 28, 1000 Ljubljana
T 01 300 51 00
F 01 300 51 99
E zalozba@zrss.si
S www.zrss.si

revije ZRSŠ

facebook ZRSŠ

twitter ZRSŠ

ISSN 1318-010X