PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **29** (2001/2002)
Številka 3
Strani 134–139

Peter Legiša:

RISANJE KOCK IN KVADROV

Ključne besede: matematika, geometrija, kvader, projekcija.

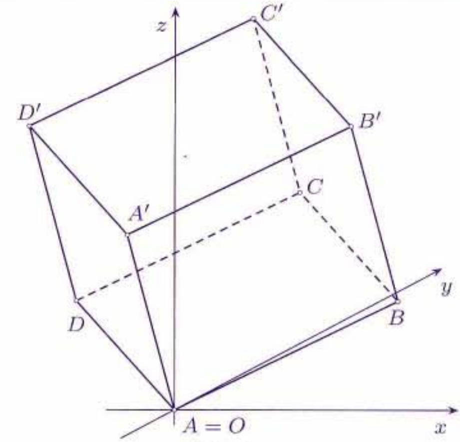
Elektronska verzija: http://www.presek.si/29/1478-Legisa.pdf

RISANJE KOCK IN KVADROV

Z vektorskim računom se lahko lotimo naslednje pomembne naloge tehničnega risanja:

Narišimo pravokotno projekcijo kocke tako, da bodo dolžine projekcij robov v razmerju $1 : 1 : \frac{1}{2}$.

Rešitev.
Kocko $ABCDA'B'C'D'$ z robom dolžine 1 bomo projicirali na ravnino xy. Kocko lahko togo premaknemo tako, da bo oglišče A v izhodišču, pravokotni projekciji A_1B_1 ter A_1D_1 robov AB in AD pa bosta ležali simetrično glede na os y (sliki 1 in 2).



Slika 1.

Po predpostavki privzamemo $|A_1B_1| = |A_1D_1|$. Zato lahko zapišemo

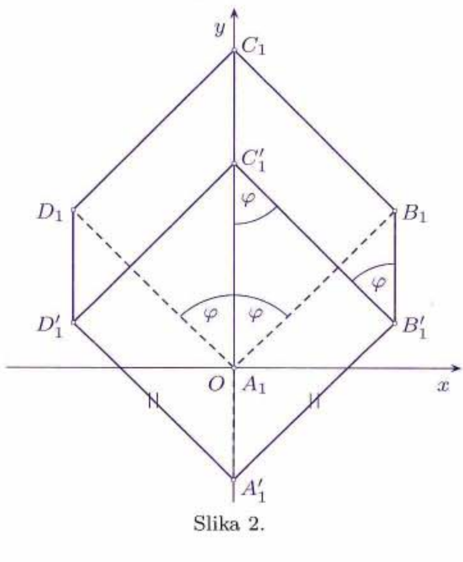
$$\overrightarrow{A_1B_1} = (a_1, a_2, 0)$$
$$\overrightarrow{A_1D_1} = (-a_1, a_2, 0)\,.$$

Od tod sledi $\overrightarrow{AB} = (a_1, a_2, a_3)$ in $\overrightarrow{AD} = (-a_1, a_2, b_3)$. Ker je $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}| = 1$, je seveda

$$\begin{aligned} &a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \\ &= (-a_1)^2 + a_2^2 + b_3^2 = 1 \end{aligned} \tag{1}$$

in od tod $a_3 = \pm b_3$. Privzamemo lahko, da je $a_3 = b_3 > 0$ (slika 1). Torej je

$$\overrightarrow{AB} = (a_1, a_2, a_3)\,,$$
$$\overrightarrow{AD} = (-a_1, a_2, a_3)\,.$$



Slika 2.

Vektorja $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AD}$ sta pravokotna, zato je

$$-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0\,. \tag{2}$$

Iz (1) in (2) sledi

$$2a_1^2 = 1\,,$$

in po sliki 2 je $a_1 > 0$, zato

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$
$$a_2^2 + a_3^2 = \frac{1}{2}\,.$$

Vektor $\overrightarrow{AA'} = (c_1, c_2, c_3)$ je pravokoten na $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AD}$. Torej velja

$$\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0$$

in

$$\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{\sqrt{2}}c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0\,.$$

Odštejmo obe enačbi, pa dobimo $c_1 = 0$ in

$$a_2c_2 + a_3c_3 = 0\,,$$

torej

$$c_3 = -\frac{a_2c_2}{a_3}\,. \tag{4}$$

Od tod sledi

$$\overrightarrow{AA'} = (0, c_2, c_3)\,.$$

Ker je $|AA'| = 1$, je

$$c_2^2 + c_3^2 = 1\,. \tag{5}$$

Projekcija vektorja $\overrightarrow{AA'}$ na ravnino xy je

$$\overrightarrow{AA'} = (0, c_2, 0)\,.$$

Po (3), (4) in (5) je

$$1 = c_2^2 + c_3^3 = c_2^2 + \frac{a_2^2 c_2^2}{a_3^2} = \frac{a_2^2 + a_3^2}{a_3^2} c_2^2 = \frac{1}{2a_3^2} c_2^2 \,.$$

Tako je $c_2^2 = 2a_3^2$. Po sliki 1 je $c_2 < 0$ in $a_3 > 0$, zato

$$c_2 = -\sqrt{2} a_3 \,. \tag{6}$$

Začetna predpostavka o razmerjih dolžin projekcij pravi, da je

$$|A_1 A_1'| = \frac{1}{2} |A_1 B_1|$$

ali

$$|c_2| = \frac{1}{2} |(a_1, a_2, 0)| \,,$$

torej po (1)

$$4c_2^2 = a_1^2 + a_2^2 = 1 - a_3^2 \,.$$

Toda po (6) je $4c_2^2 = 8a_3^2$ in od tod

$$8a_3^2 = 1 - a_3^2 \,.$$

Vidimo, da je $a_3 = \frac{1}{3}$, saj je $a_3 > 0$. Iz (3) dobimo

$$a_2^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{9} = \frac{7}{18} \,.$$

Ker je $a_2 > 0$, je

$$a_2 = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{7}{2}} \,.$$

in

$$c_2 = -\sqrt{2} a_3 = -\frac{\sqrt{2}}{3} \,.$$

Od tod sledi

$$\overrightarrow{A_1 B_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{3} \sqrt{\frac{7}{2}}, 0 \right)$$

in

$$\overrightarrow{A_1'A_1} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{3}, 0\right).$$

Izračunamo

$$g = |A_1B_1| = 2|A_1'A_1| = \frac{2\sqrt{2}}{3} \doteq 0{,}943\,.$$

Točki B_1 in D_1 ležita simetrično glede na os y (slika 2), zato je

$$|B_1D_1| = 2a_1 = \sqrt{2}\,.$$

Od tod sledi

$$|B_1D_1| = \frac{3}{2}g$$

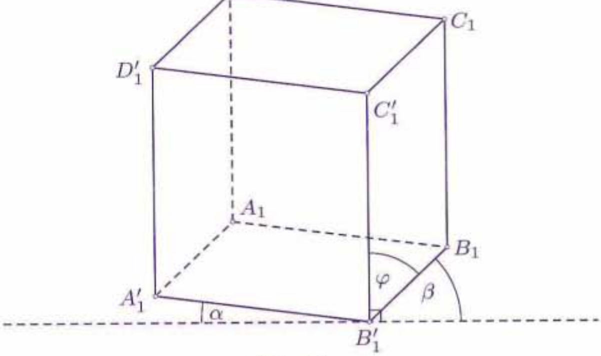
in

$$\sin\varphi = \frac{a_1}{|A_1B_1|} = \frac{3}{4}$$

ter

$$\varphi \doteq 48{,}59^\circ\,.$$

Izračunamo kot $\sphericalangle A_1'B_1'C_1' = 180^\circ - 2\varphi \doteq 82{,}82^\circ = 90^\circ - 7^\circ 18'$. Obrnimo zdaj sliko tako, da bo daljica $A_1'D_1'$ navpična. Dobimo sliko 3, na kateri je črtkana črta vodoravna.

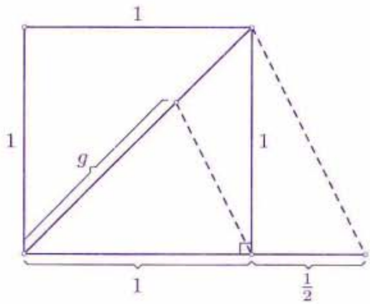


Slika 3.

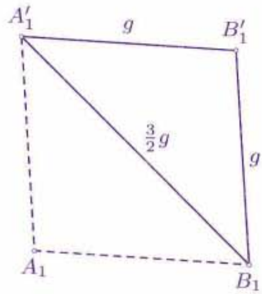
Tu kot α znaša približno 7,18°, kot β pa je $90° - \varphi \doteq 41{,}41°$. Na ta način projiciramo tudi kvadre. Razložili smo enega standardnih načinov upodabljanja togih teles.

Kot sem prebral v nemškem priročniku elementarne matematike [1], so si tehnični risarji včasih (po dogovoru) privoščili malce ohlapnosti. Vzeli so $|A_1B_1| = |AB|$ in $|A_1A_1'| = \frac{1}{2}|AA'|$. To je pomenilo kakih 6% napake v merilu. Za kot α so vzeli 7°, za β pa 42°. (Mimogrede, v tem priročniku piše, da je $\alpha = 7°10'$, čeprav je prava vrednost bliže $7°11'$.) Danes, v dobi računalniške grafike, take poenostavitve niso več potrebne.

Te ohlapnosti so tudi sicer odveč – vsaj za matematike. Oglišča kocke bomo označili standardno. Narišemo kvadrat s stranico 1 in vzamemo $\frac{2}{3}$ njegove diagonale (slika 4). To razdaljo g narišemo navpično kot projekcijo stranice BB'.

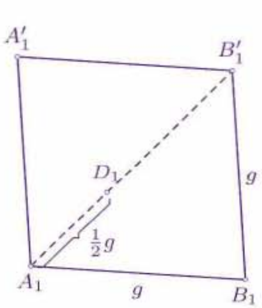


Slika 4.

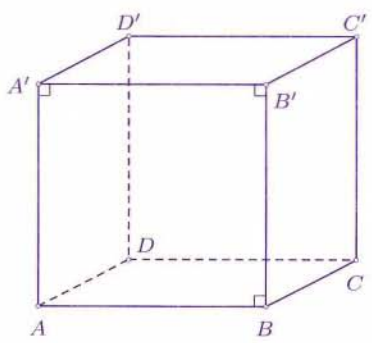


Slika 5.

Nato narišemo romb $A_1B_1B_1'A_1'$ s stranico g in z diagonalo $\frac{3}{2}g = \sqrt{2}$ (slika 5). Zvežemo A_1 in B_1' ter od A_1 odmerimo $\frac{1}{2}g$ (slika 6), da dobimo D_1. Preostanek konstrukcije je jasen.



Slika 6.



Slika 7.

Bolj enostavno kocko upodabljamo z vzporedno projekcijo. Projiciramo na ravnino Σ kvadrata $DCC'D'$ (slika 7), in sicer vzdolž premice, ki ni niti vzporedna niti pravokotna na Σ. Pri tem se tudi kvadrat $ABB'A'$ upodobi kot skladen kvadrat, preostale stranske ploskve pa kot paralelogrami. Tako projekcijo bi v vsakdanjem življenju lahko videli kot senco. To se zgodi bolj redko. Zato je pravokotna projekcija bolj naravna – zahteva pa več dela.

Literatura

1. H. Krenl, K. Kulke, H. Pester, R. Schroedter: *Lehrgang der Elementarmathematik*, 20. Auflage, VEB Fachbuchverlag Leipzig, Leipzig 1988.

Peter Legiša