

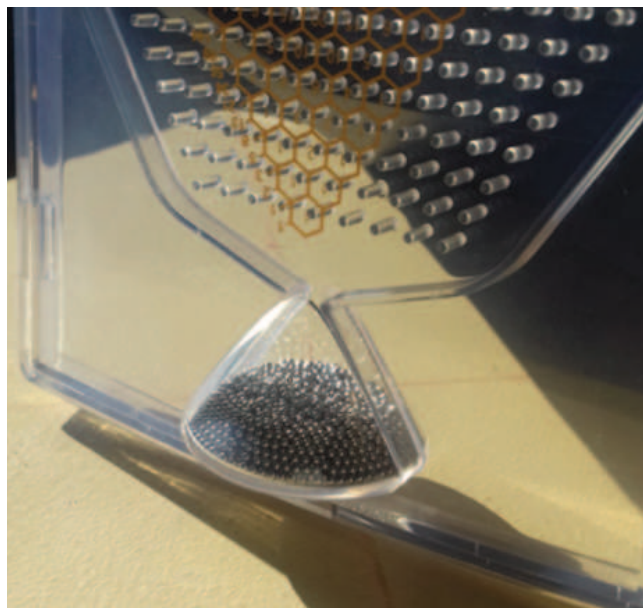
Galtonova plošča



ANDREJ LIKAR

→ Nedavno mi je prišla v roke industrijsko izdelana Galtonova plošča (glej sliko na naslovnici). Včasih smo jo naredili sami. V desko smo enakomerno pribili žebličke v več vrstah. Ti so predstavljali mrežo ovir za kroglice, ki smo jih spuščali po malo nagnjeni deski navzdol. Kroglice so pri tem trkale ob žebličke, se pri tem preusmerjale sem in tja in končno, ko so se izvile iz mreže, pristale v žlebičkih na dnu.

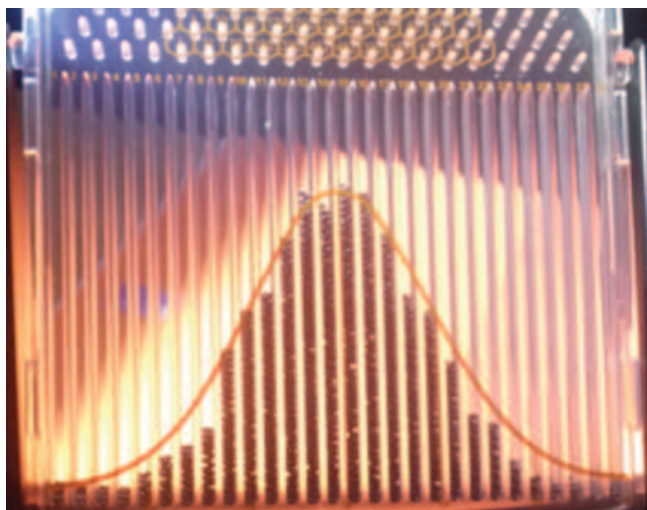
Čeprav smo kroglice spuščali z istega mesta, je vseeno vsaka izbrala svojo pot skozi žebličke. Sedaj lahko tako ploščo kupimo v kakšni spletni trgovini. Kupljena plošča deluje enako kot doma narejena, le da je mreža ovir iz plastičnih valjčkov, plošča pa je zaprta, da množica majhnih jeklenih kroglic ne more pobegniti iz nje. Ko je plošča obrnjena na glavo, se kroglice zberejo v stožčasti posodici na dnu skozi drobno luknjico na njenem vrhu (glej sliko 1). Ko ploščo obrnemo, da je posodica na vrhu, se iz nje začnejo vsipavati kroglice na mrežo ovir. Kroglice se prebijajo skozi mrežo, se od ovir odbijajo in se končno ujamejo v enakomerno nastavljene kanalčke vzdolž plošče. Ko so vse kroglice v kanalčkih, opazimo, da so se porazdelile v obliki zvonaste krivulje. V kanalčkih dlje od sredine jih je malo, v kanalčkih blizu sredine pa več. V srednji kanalček se običajno ujame največ kroglic. S ponovnim obratom se kroglice iz kanalčkov vsujejo nazaj v posodico in poskus lahko ponovimo. Pri vsakem poskusu opazimo zelo podobno porazdelitev kroglic v kanalčke. Včasih je v izbranem kanalčku malo več, včasih malo manj kroglic, a njihovo število je vedno blizu povprečne vrednosti v tem kanalčku, ki je vrisana na plošči (glej sliko 2).



SLIKA 1.

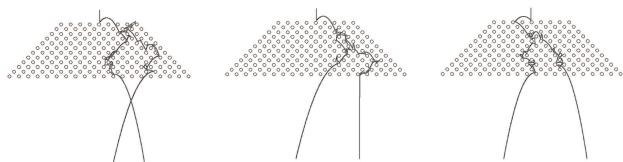
Na glavo obrnjena Galtonova plošča s kroglicami v posodici

Ko iztekajo kroglice skozi drobno odprtino posodice, nimajo vse povsem enakega startnega mesta. Tudi njihove hitrosti na mestu prvih ovir niso povsem enake. Res so si startna mesta zelo blizu, a tudi še tako majhne razlike se sčasoma, ko se kroglice prebijajo skozi ovire, močno povečajo. Na Galtonovi plošči je tirom posameznih kroglic zelo težko slediti. Zato smo jo »preselili« v računalnik. Kroglice se tudi v programu skoraj elastično odbijajo od nepremičnih valjastih ovir, kot se to dogaja pri realni plošči. Sedaj lahko sledimo tiru dveh kroglic, ki iz mirovanja startata zelo blizu druga drugi. Na sliki 3 vidimo, da se tira na začetku poti tako malo razlikujeta, da razlike niti ne opazimo. Potem pa se njuna tira začneta močno razlikovati in sta po izhodu iz

**SLIKA 2.**

Število kroglic se v posameznih kanalčkih pri vsakem poskusu nekoliko spremeni, a zvonaste krivulje kljub temu ne moremo spregledati

mreže povsem različna. Gibanje kroglic skozi ovire je torej zelo nepredvidljivo. Pojav spominja na tegobe vremenoslovcev. Iz skoraj enakih začetni razmer se vreme lahko nepredvidljivo obrne v katerokoli smer. Zato se vremenske napovedi, večinoma sicer presenetljivo točne, včasih povsem ponesrečijo. Govorimo o vplivu metulja, ki lahko z zamahom kril v nestabilnem ozračju v oddaljenem kraju povzroči nevihto.

**SLIKA 3.**

Kaotična tira dveh kroglic pri njunih zelo bližnjih startnih mestih - trije poskusi

S kupljeno Galtonovo ploščo ne moremo opazovati vpliva manjšega števila ovir na porazdelitev kroglic po kanalčkih. Radi verjamemo, da porazdelitev kroglic le pri eni oviri še ne bo zvonasta. Toda kakšna je potem? Narediti bi morali ploščo, kjer bi vr-

ste z ovirami postopoma dodajali. A z računalnikom je kakršnokoli dodajanje ali odstranjevanje ovir pač najpreprostejše.

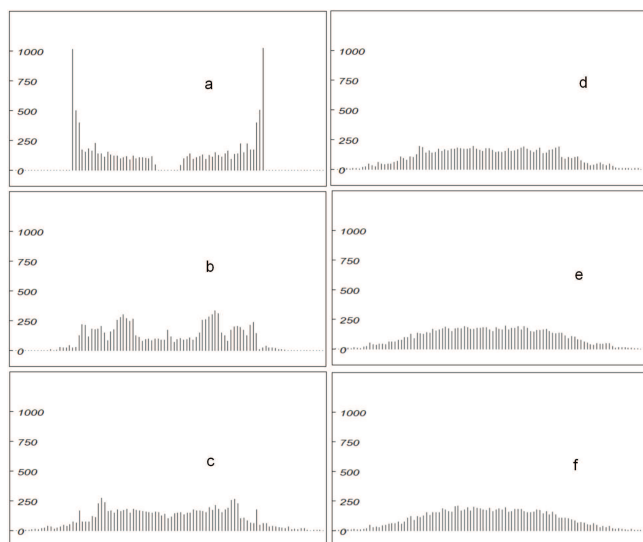
Najprej imejmo le eno valjasto oviro pod odprtino, skozi katero zaporedoma spuščamo 10000 kroglic. Kroglicam z enakim polmerom, kot ga imajo ovire, smo sledili in ugotovili, v kateri kanalček se je določena kroglica ujela. Vse kroglice so spočetka mirovale, potem pa smo jih spuščali iz enake višine. Naključno smo spreminjali le njihovo začetno lego levo-desno, vendar tako, da so vse zadele oviro. Potem smo po vrsti dodajali vedno več vrstic z ovirami in opazovali končne porazdelitve kroglic (glej sliko 4). Na sliki 5 smo prikazali porazdelitve pri eni oviri (a), oviri in dodani vrsti ovir (b) do dodanih petih vrstic ovir. Vrstice z ovirami so vedno širše, kot je to videti pri otipljivi plošči na sliki na naslovnici. Pregledno vidimo, kako se porazdelitve kroglic bližajo zvonasti obliki. Tej končni porazdelitvi pravimo normalna ali Gaussova porazdelitev. Srečamo jo pri številnih pojavih, kjer so pomembni naključni vplivi, denimo pri opisu difuzije delcev. Kroglice pri padanju in odbijanju od ovir dobivajo različno velike sunke, za izid poskusa so pomembne le komponente sunkov v vodoravni smeri levo-desno. Da bi to ugotovitev podkrepili, smo naredili še en računalniški poskus. Na sliki 6 je porazdelitev desetstisočih kroglic, ki so prvotno bile vse v izhodišču (tega označuje zelena pika) in smo jih z naključno velikimi sunki sem in tja tisočkrat preusmerili. Po vsakem sunku so se kroglice ustavile, potem pa je sledil nov sunek. Spet vidimo, da je porazdelitev kroglic po zadnjem sunku prepričljivo zvonasta. Poskus priča, da na porazdelitev podrobnosti o naravi trkov ne vplivajo. Zato normalno porazdelitev v fiziki, pa tudi na drugih področjih, zelo pogosto srečamo.

Do matematične oblike zvonaste krivulje pridemo z naslednjim razmišljanjem. Denimo, da spuščamo z balkona na lepljiva tla lahke stiroporne kroglice. Zaradi vetra, ki naključno popihlja zdaj sem zdaj tja, vse kroglice ne padajo proti tlu enako, čeprav jih spuščamo s kolikor se da istega mesta. Na tla postavimo mrežo drobnih predalčkov, kamor padajo kroglice. Predalčki naj imajo kar se da tanke stene in naj so tesno skupaj (glej sliko 7). Narišimo na tla še pravokotni koordinatni sistem (x,y) , ki naj ima izhodišče natančno pod mestom, odkoder spuščamo kroglice. Sredina vsakega predalčka ima sedaj določeni koor-



**SLIKA 4.**

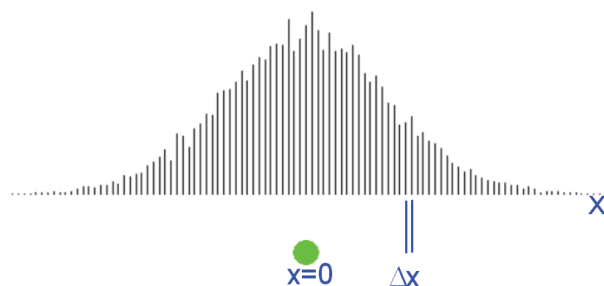
Mreža treh vrst ovir (polni krožci) pod najvišjo oviro pri naših računalniških poskusih. Prazen krožec predstavlja trenutno lego ene od kroglic, ki se prebija skozi mrežo ovir

**SLIKA 5.**

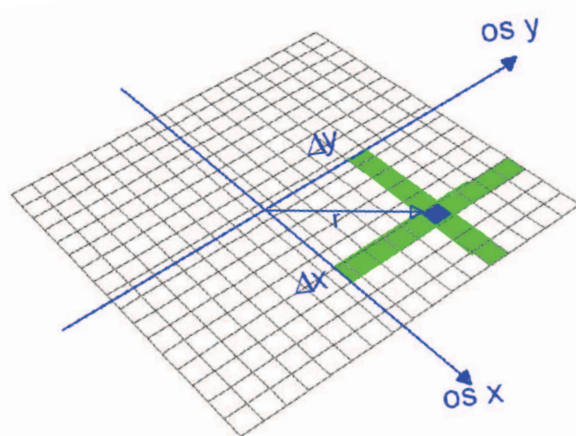
Porazdelitve kroglic pri eni oviri (a), eni dodani vrsti ovir (b), dveh dodanih (c)..., petih dodanih vrsticah (f)

dinati x in y , predalčki pa naj imajo vsi dolžino Δx in vsi širino Δy . V teh predalčkih se sedaj nabirajo kroglice.

Radi verjamemo, da mora biti porazdelitev kroglic v predalčkih z dano ordinato y in različnimi x neodvisna od te ordinate, saj smo predpostavili, da veter pihlja v vse smeri z enako verjetnostjo, torej nobena smer, torej tudi nobena koordinata, ni na boljšem. Sedaj pa pogledjmo, kako daleč od sredine našega ko-

**SLIKA 6.**

Porazdelitev kroglic po tisočih naključnih sunkih v vodoravni smeri sem in tja. Višina daljic je sorazmerna s številom kroglic v danem intervalu Δx , ki je za x oddaljen od izhodišča, ki ga nakazuje zelen krožec

**SLIKA 7.**

Koordinatni sistem in izbrani pravokotni predalček s stranicama Δx in Δy

ordinatnega sistema padajo kroglice. Ker velja po Pitagorovem izreku $r^2 = x^2 + y^2$, vemo, kako daleč od izhodišča je padla. Označimo število kroglic, ki so padle med $x - \frac{\Delta x}{2}$ in $x + \frac{\Delta x}{2}$ ne glede na koordinato y s $p(x)\Delta x$, tiste, ki so padle med $y - \frac{\Delta y}{2}$ in $y + \frac{\Delta y}{2}$ ne glede na koordinato x , pa s $p(y)\Delta y$. Tu smo vpeljali porazdelitveni funkciji $p(x)$ in $p(y)$, saj ni vseeno,

kako daleč od osi x ali osi y je izbrani predalček. Daleč od katerekoli osi je v predalčkih zelo malo kroglic ali pa je predalček celo prazen. Tudi ni vseeno, kako velik je predalček, to upoštevamo z Δx in Δy . Število kroglic, ki so padle v prav izbrani predalček s koordinatama x in y , je potem $p(x)\Delta x p(y)\Delta y$. To je zato, ker za kroglico pri danem x ta x ne vpliva na njen y in za kroglico pri danem y ta y ne vpliva na njen x . Sedaj pa odločilni sklep: porazdelitev kroglic po r mora imeti enako odvisnost, kot velja za porazdelitev po predalčkih z x ali po predalčkih z y . Če sta namreč porazdelitvi za x in za y neodvisni, je porazdelitev po r ravno enaka porazdelitvi po x , ko je $y = 0$. Na splošno mora torej veljati:

$$p(r)\Delta x\Delta y = p(x)\Delta x p(y)\Delta y,$$

ali

$$p(r) = p(x)p(y).$$

Velja tudi:

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Edina odvisnost $p(x)$, ki zmore zadovoljiti obe zgornji zahtevi, je:

$$p(x) = Ae^{kx^2}.$$

Ker se mora število kroglic v kanalčkih z naraščajočim x zmanjševati, mora biti k negativen, torej

$$p(x) = Ae^{-|k|x^2}.$$

Tu je A sorazmeren s številom kroglic. Z deljenjem $p(x)$ s tem številom preidemo na verjetnost, kar pa za nas niti ni pomembno.

Plošča nosi ime po angleškem polihistorju Francisu Galtonu (1822–1911), ki je občudoval lastnost kroglic, da se vedno porazdelijo po zvonasti krivulji. Ploščo je sam izdelal in z njo navdušeno prikazoval to lastnost svojim učencem. Znan je tudi po tem, da je v statistiko vpeljal pojem korelacijskega koeficienta, ki pove, če ena meritev kako vpliva na drugo in priporočal uporabo krivulj, ki se meritvam najbolj tesno prilagajajo, namesto zgolj povprečnih vrednosti, ki so bile do tedaj v uporabi. Vpeljal je statistične metode v meteorologijo in humanistične vede.

× × ×

Križne vsote

↓↓↓

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števki od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratu na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse številke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

	4	13			
11			11		
14				16	
		8			12
			8		
			15		

↓↓↓

REŠITEV KRIŽNE VSOTE

7	8	15			
5	3	8			
12	5	3	8		
	16	8	5	1	14
		11	8	3	11
		13	4		

3

× × ×