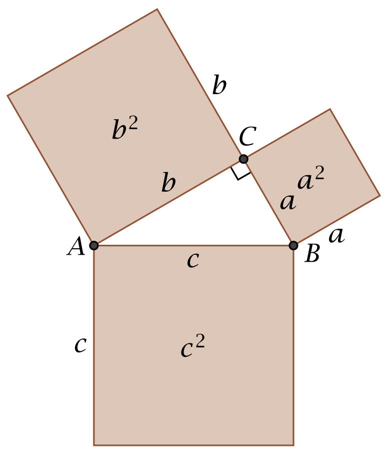
Pitagorov izrek

Aljoša Peperko in Janez Šter

→ Pitagorov izrek je eden najslavnejših rezultatov antične matematike in se glasi:

Izrek. Naj bo dan pravokotni trikotnik ABC in naj bo c dolžina njegove hipotenuze, a in b pa dolžini njegovih katet. Potem je ploščina kvadrata s stranico dolžine c enaka vsoti ploščine kvadrata s stranico dolžine a in ploščine kvadrata s stranico dolžine b. V matematičnih oznakah:

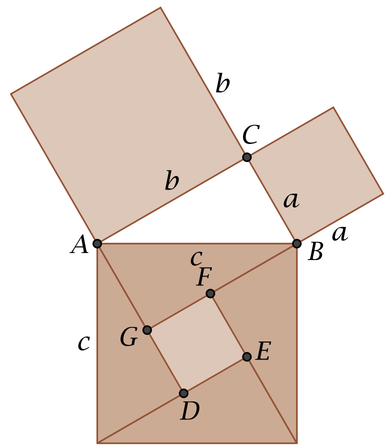
- $c^2 = a^2 + b^2$.



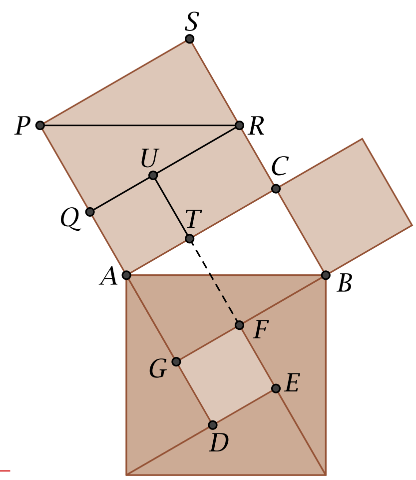
SLIKA 1.
Pitagorov izrek

Znanih je mnogo različnih dokazov Pitagorovega izreka, več kot sto izmed njih je zbranih na spletni strani [2]. Namen tega prispevka je predstaviti tri dokaze geometrijske narave. Ti dokazi sledijo iz aksiomov elementarne geometrije in za njih poznavanje algebrskih operacij, kot so seštevanje, odštevanje, množenje ali deljenje, ni potrebno. V vseh treh dokazih bomo brez škode za splošnost privzeli, da je b večje ali enako a (kot na sliki 1).

Dokaz 1. Kot kaže slika 2, v kvadrat s stranico dolžine c vrišemo štiri pravokotne trikotnike, skladne trikotniku ABC. Ker je vsota manjših dveh notranjih kotov trikotnika ABC pravi kot, se vrisani štirje trikotniki stikajo brez prekrivanja, kot nakazuje slika 2, oglišča vrisanih trikotnikov pa tvorijo nov manjši kvadrat $DEFG$.



SLIKA 2.



SLIKA 3.

Potrebno je torej premisliti, da je vsota ploščin vrisanih štirih skladnih trikotnikov in kvadrata $DEFG$ enaka vsoti ploščin kvadratov, narisanih nad katetama z dolžinama a in b. Slednje lahko zaključimo z naslednjim korakom, kot prikazuje slika 3.

V kvadrat nad kateto AC z dolžino b vrišemo dva pravokotna trikotnika PRS in RPQ, skladna prvotnemu trikotniku ABC. Ker sta dolžini stranic AP in DA enaki in sta dolžini QP in GA enaki, sta tudi dolžini QA in GD enaki. Torej lahko v pravokotnik $ACRQ$ vrišemo kvadrat $ATUQ$, ki je skladen kvadratu $DEFG$.

Zadošča torej le še premisliti, da je dvakratnik ploščine trikotnika ABC (ki je enak ploščini pravokotnika $AGBC$) enak vsoti ploščine pravokotnika $TCRU$ in ploščine kvadrata nad stranico BC. Dolžina daljice TC je enaka a. Torej lahko pravokotnik $AGBC$ razdelimo na kvadrat $FBCT$ z dolžino stranice a in na pravokotnik $AGFT$. Pravokotnika $AGFT$ in $TCRU$ pa sta skladna, saj imata stranici enakih dolžin. S tem je dokaz zaključen. ■

Opomba. Zaključni korak zgornjega geometrijskega dokaza je možno nadomestiti z naslednjim računskim zaključkom. Iz slike 2 sledi, da je ploščina kvadrata s stranico dolžine c enaka vsoti ploščin štirih trikotnikov, skladnih prvotnemu trikotniku ABC, in ploščine kvadrata z dolžino stranice $|DE| = b - a$. Torej je

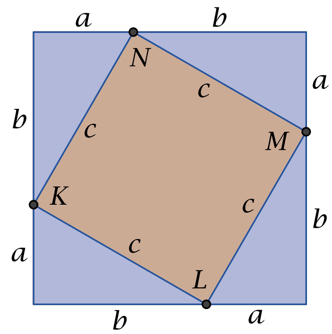
$$c^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + (b-a)^2 = 2ab + b^2 - 2ab + a^2 = a^2 + b^2.$$

Ta alternativni računski zaključek dokaza je objavljen kot dokaz 3 v [2] in ga je prvemu avtorju tega članka v času študija predstavil dr. Damjan Kobal, za kar se mu avtor iskreno zahvaljuje. Geometrijska verzija zaključka dokaza je plod dela avtorjev tega članka.

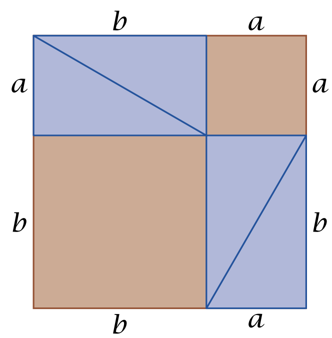
Naslednji dokaz je morda eden najbolj znanih geometrijskih dokazov Pitagorovega izreka in je na spletu opisan v [1] in kot dokaz 9 v [2].

Dokaz 2. Kvadrat s stranico dolžine $a + b$ razdelimo na dva načina. Najprej v tak kvadrat vrišemo štiri pravokotne trikotnike, skladne prvotnemu trikotniku ABC, kot je to predstavljeno na sliki 4.

Ker so ti trikotniki pravokotni in skladni, je štirikotnik $KLMN$ kvadrat s stranico dolžine c. Kvadrat s stranico dolžine $a + b$ pa lahko razdelimo tudi na naslednji način, kot to prikazuje slika 5.



SLIKA 4.
Prva delitev.



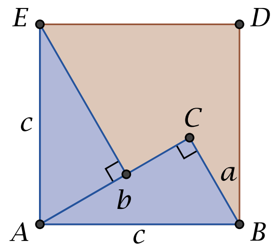
SLIKA 5.
Druga delitev kvadrata s stranico dolžine $a + b$.

V nasprotni oglišči tega kvadrata vrišemo kvadrat z dolžino stranice b in kvadrat z dolžino stranice a. Znotraj prvotnega kvadrata ostaneta še dva pravokotnika s stranicama dolžin a in b, ki ju lahko razdelimo na štiri trikotnike, skladne trikotniku ABC. Iz primerjave slik 4 in 5 sledi, da je ploščina kvadrata z dolžino stranice c enaka vsoti ploščine kvadrata z dolžino stranice a in ploščine kvadrata z dolžino stranice b, kar zaključuje dokaz. ■

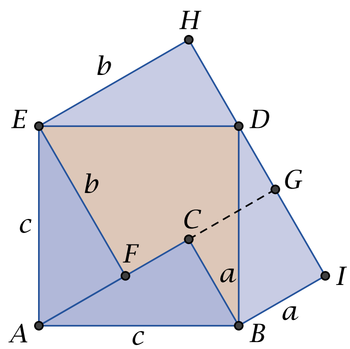
Tretji dokaz, ki ga bomo predstavili, je plod dela drugega avtorja pričujočega članka. Uporabljene ideje so podobne tistim v dokazu 2 iz [2].

Dokaz 3. Prvotnemu pravokotnemu trikotniku ABC obrišemo kvadrat $ABDE$ z dolžino stranice c. V ta kvadrat narišemo še en pravokotni trikotnik, skla- →

den trikotniku ABC, kot prikazuje slika 6. Nato dorišemo še dva pravokotna trikotnika, skladna trikotniku ABC, kot prikazuje slika 7.



SLIKA 6.



SLIKA 7.

Skupna ploščina dveh trikotnikov, narisanih znotraj kvadrata $ABDE$, je enaka skupni ploščini dveh trikotnikov, narisanih zunaj kvadrata $ABDE$. Zato je ploščina kvadrata $ABDE$ s stranico dolžine c enaka vsoti ploščin kvadratov $EFGH$ in $BIGC$. Ker je dolžina stranice kvadrata $EFGH$ enaka b in je dolžina stranice kvadrata $BIGC$ enaka a, to dokazuje želeno. ■

Literatura

[1] E-um, 8. razred, *Geometrija v ravnini, Pitagorov izrek – dokaz*, `http://www.e-um.si/`, ogled 29. 1. 2016.

[2] Pythagorean Theorem, `http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/`, ogled 29. 1. 2016.

× × ×

Nemogoč problem

Ivan Vidav

→ Peter je izbral dve naravni števili, večji od 1. Svojemu znancu Janezu je povedal, kolikšna je vsota teh števil, Mirku pa, kolikšen je produkt.

Mirko si ogleda produkt in telefonira Janezu: »Vem, kolikšna je tvoja vsota.«

Kmalu nato pa še Janez sporoči Mirku: »Tudi jaz vem, kolikšen je produkt.«

Ugani, kateri števili je izbral Peter, če izdamo, da je vsota večja od 21 in manjša od 31. Vnaprej seveda ne vemo, ali je Peter izbral različni ali enaki števili. Podobna toda precej težja pa je naslednja naloga:

Peter je izbral dve naravni števili, večji od 1. Svojemu znancu Janezu je povedal, kolikšna je vsota teh števil, Mirku pa, kolikšen je produkt.

Janez si ogleda vsoto in telefonira Mirku: »Ne vidim nobene možnosti, kako bi ti lahko določil vsoto.«

Toda glej, čez eno uro mu Mirko odgovori: »Vem, kolikšna je vsota.«

Kmalu nato pa še Janez sporoči Mirku: »Tudi jaz vem, kolikšen je produkt.«

Kateri števili je izbral Peter? Da bo naloga lažja, naj povemo, da vsota ni večja od 40. Vnaprej seveda ne vemo, ali je Peter izbral različni ali enaki števili.

Ta zanimiva naloga kroži zadnja leta na raznih srečanjih matematikov. Martin Gardner, ki jo je objavil v decembrski številki časopisa Scientific American, jo imenuje »nemogoč problem«, ker na videz v njem ni nobene informacije, ki bi omogočala reševanje. Omejitev, da vsota izbranih števil ni večja od 40, ni bistvena. Enako rešitev dobimo tudi v primeru, če vsota ni večja od 60, samo več dela je pri reševanju.

Bralec naj skuša rešiti najprej prvo, lažjo nalogo, nato pa naj se loti še druge.

× × ×