PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **16** (1988/1989)
Številka 6
Strani 321–327, XXI

Milena Strnad:

MÖBIUSOV TRAK

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/16/954-Strnad-Milena.pdf

© 1989 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
© 2010 DMFA – založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

MÖBIUSOV TRAK

Samoumevno se nam zdi, da uporabljamo matematiko pri reševanju številnih problemov z naravoslovnih in tehničnih področij. Prav tako nam je domača izjava številnih umetnikov: "O, matematika, z njo sem v sporu že od šolskih let!" Redkeje pomislimo na možnost, da matematična spoznanja lahko uporabijo tudi umetniki, na primer slikarji, kiparji, glasbeniki in celo pisatelji. Še redkeje se primeri, da prideta do istega odkritja matematik in umetnik neodvisno drug od drugega. Prav to se je dogodilo z Möbiusovim trakom.

Švicarski kipar Max Bill je leta 1935 v prizadevanju, da ustvari dovršeno umetnino, naredil kip z naslovom *Enostanski trak* (slika 1). Spoznanje, da je njegovo "odkritje" le umetniški prikaz matematikom že sto let znanega Möbiusovega traku, je umetnika možno prizadelo. Za več kot štiri desetljetja je opustil nadaljnja umetniška iskanja v tej smeri. Njegova vrnitev k proučevanju Möbiusovega traku po letu 1979 je bila sicer uspešna – ustvaril je več kipov velike umetniške vrednosti – vendar ni mogel prikriti razočaranja: "Čeprav nisem iznašel Möbiusovega traku, je bil študij tega matematičnega fenomena zame velikega pomena. V tej ploskvi sem našel svoj filozofski pogled na simbol neskončnosti."

Kaj je pravzaprav Möbiusov trak?

To je zelo zanimiva ploskev, ki ima eno samo stran, njen rob pa je sklenjena krivulja. Tri leta pred smrtjo, leta 1865, jo je našel nemški matematik in astronom August Ferdinand Möbius. S proučevanjem njenih lastnosti se ukvarja najmlajša veja geometrije – *topologija*. Topologija temelji na pojmu zveznosti in gradi na abstraktnih matematičnih pojmih. Že po tem se razlikuje od nazornih, starejših vej geometrije.

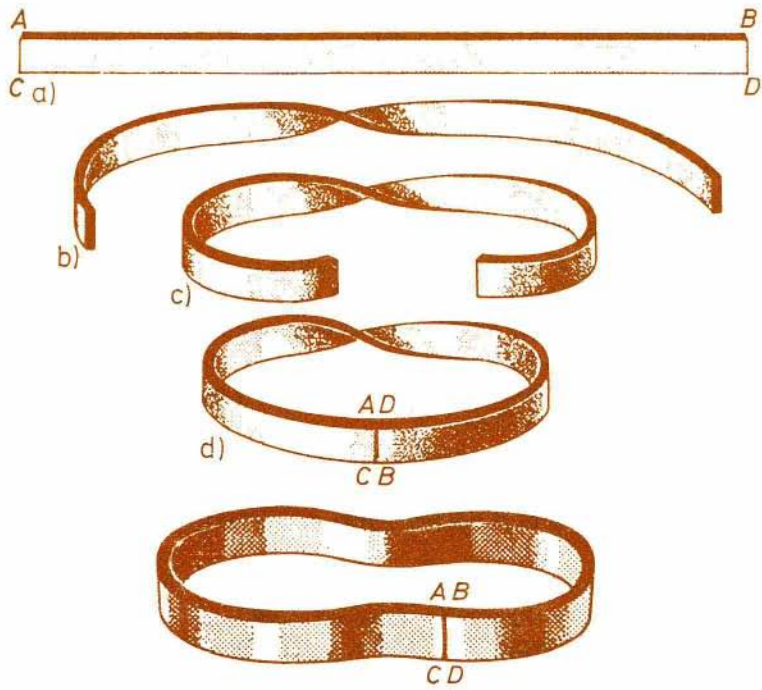
Möbiusov trak dobimo, če daljši trak pravokotne oblike z oglišči A, B, C in D najprej zvijemo, nato zlepimo oglišči A in D ter B in C. Če traku ne bi zvili, preden ga zlepimo, in bi zlepili kar oglišči A in B ter C in D, bi dobili krožni obroč (slika 2).

Premislimo trditev, da ima Möbiusov trak le eno stran. To pomeni, da s poljubne točke Möbiusovega traku lahko pri vzdolžnem potovanju po njem prispemo do točke na "drugi strani" traku, ne da bi prestopili njegov rob. Zato Möbiusovega traku ne moremo obarvati z dvema barvama, kar lahko naredimo

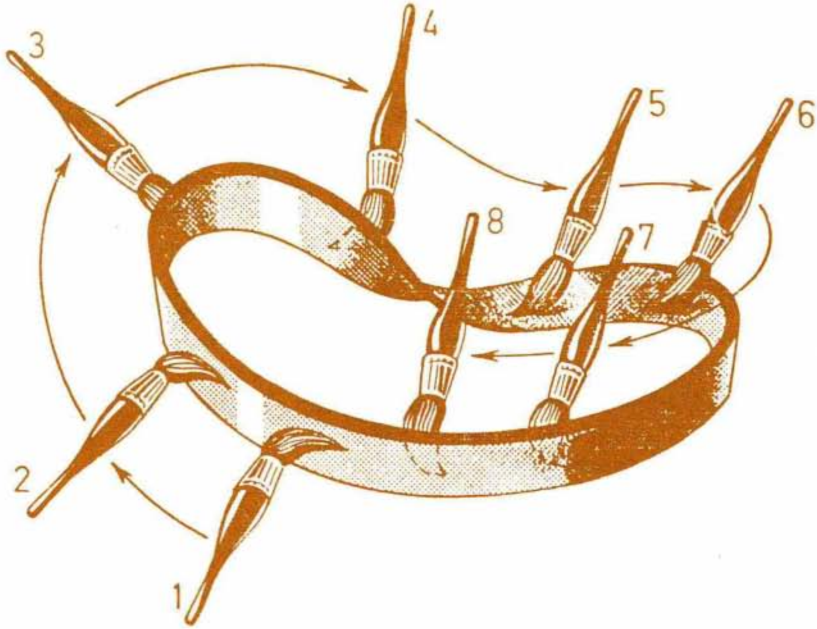
Slika 1. *Enostranski trak* M. Billa (1947/48) (glej prvo stran ovitka) s krožnim obročem. Temu lahko obarvamo notranjost z eno barvo zunanjost pa z drugo. Nasprotno pa Möbiusov trak lahko obarvamo le z eno barvo, in to pri dvakratnem obhodu čopiča (slika 3).

Möbiusov trak z matematičnega stališča nima debeline, zato njegovo lastnost, da ima eno samo stran, bolje kot z barvanjem pojasnimo z vektorji. V vsaki točki Möbiusovega traku si lahko predstavljamo dva nasprotno usmerjena vektorja, ki sta pravokotna na trak in določata normali. Izberimo normalo v neki točki, ki leži na sredini traku, in si mislimo, da se giblje po krožnici, vzporedni z robom. Ko naredi točka en obhod in se vrne v začetno lego, ima normala nasprotno smer. Šele po drugem obhodu ima normala v začetni točki tudi začetno smer (slika 4). Tako ploskev, na kateri lahko najdemo zvezno pot z začetkom in koncem v isti točki, vzdolž katere se smer normale obrne, imenujemo enostransko ploskev.

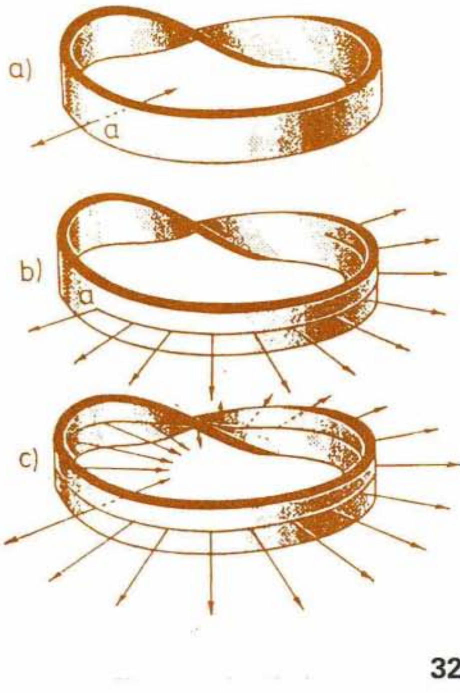
Rob Möbiusovega traku zato lahko z zvezno elastično deformacijo preoblikujemo v krožnico. Če pa bi hoteli rob Möbiusovega traku zalepiti na krožno



Slika 2. Z lepljenjem dobimo Möbiusov trak (levo) ali krožni obroč (desno).



Slika 3. "Barvanje" Möbiusovega traku

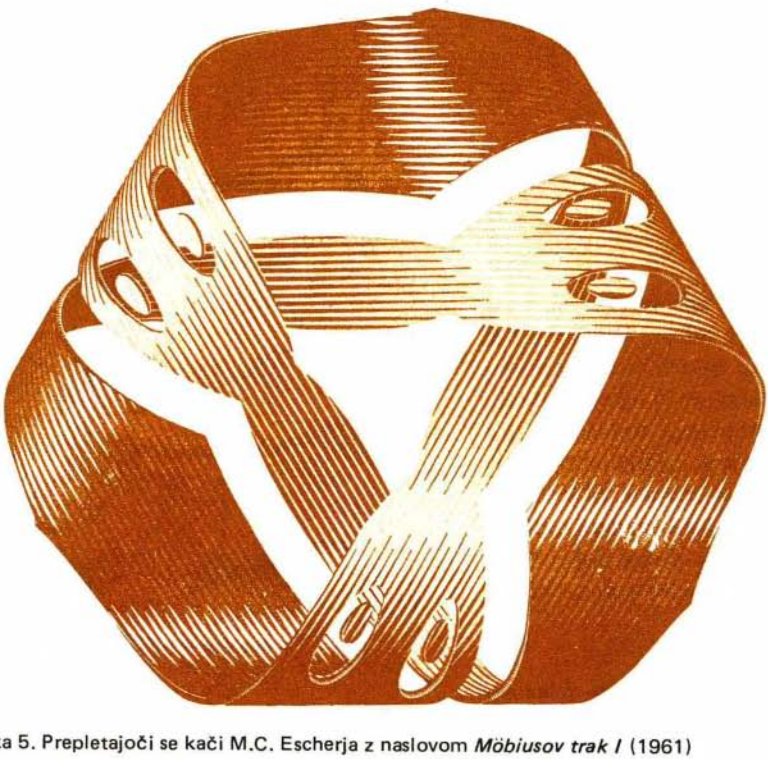


odprtino ne neki ploskvi, bi naleteli na težave. Möbiusov trak bi v ta namen morali deformirati tako, da bi njegov rob ležal v prostoru kot običajna krožnica, ves trak pa bi bil pri tem na eni strani ravnine te krožnice. To pa v trirazsežnem prostoru ni mogoče, če ne dopuščamo, da ploskev seka samo sebe.

Slika 4. Spreminjanje orientacije normalnega vektorja pri "potovanju" po Möbiusovem traku.

Posebnost Möbiusovega traku vidimo tudi, če ga poskušamo prerezati po njegovi dolžini na dva enaka dela. Če bi tako prerezali po sredini krožni obroč, bi dobili dva enaka, ločena krožna obroča, podobna prvotnemu. Če bi poskus ponovili z Möbiusovim trakom, bi po rezanju dobili le en povezan, dvakrat zasukan in daljši trak, ki bi imel dva robova in dve različni strani: "notranjo" in "zunanjo". Če pa bi Möbiusov trak prerezali po dolžini na tretjini širine, bi dobili dva prepletajoča se trakova. Eden od njiju bi bil pravi Möbiusov trak, drugi pa dvostranski trak z dvema polovičnima zasukoma.

Posebnosti Möbiusovega traku so navdihnile tudi več del nizozemskega umetnika Mauritiusa C. Escherja. Rezanje je upodobil z dvema prepletajočima se kačama, ki prehajata druga v drugo in izhajata druga iz druge (slika 5), enostranskost pa z neskončno četo konjenikov (slika 6) in z mravljami (slika 7). Za razliko od M. Billa je Escher zvedel za Möbiusov trak od svojih matematičnih prijateljev. Sicer pa tega umetnika poznamo zlasti po njegovih študijah, kako s podobnimi figurami popolnoma prekriti vso ploskev (slika 8). Ali je



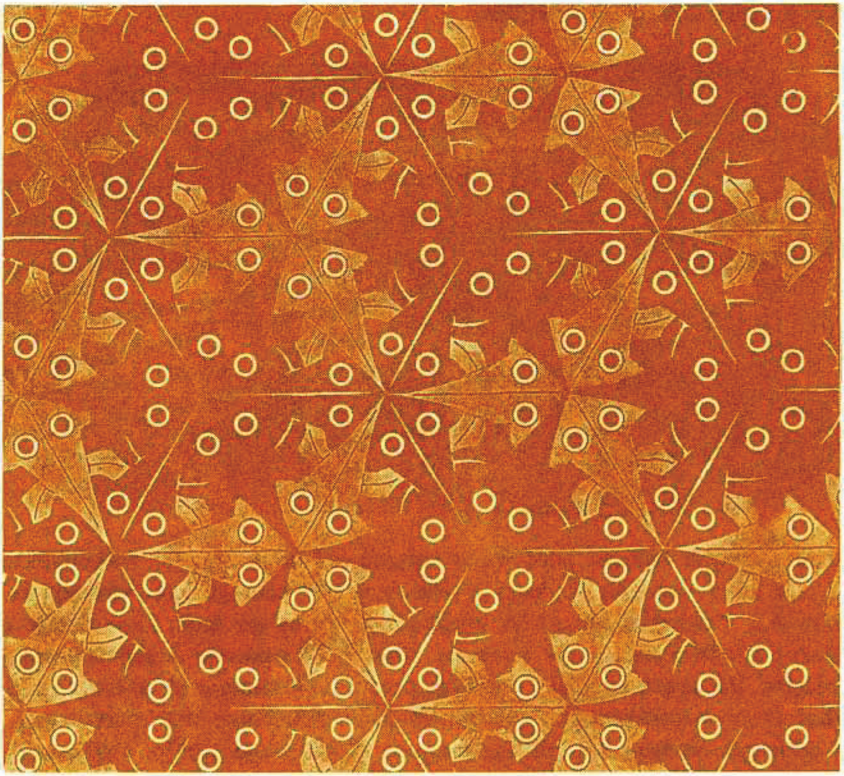
Slika 5. Prepletajoči se kači M.C. Escherja z naslovom *Möbiusov trak I* (1961)

Slika 6. *Konjeniki* M. C. Escherja (1964)

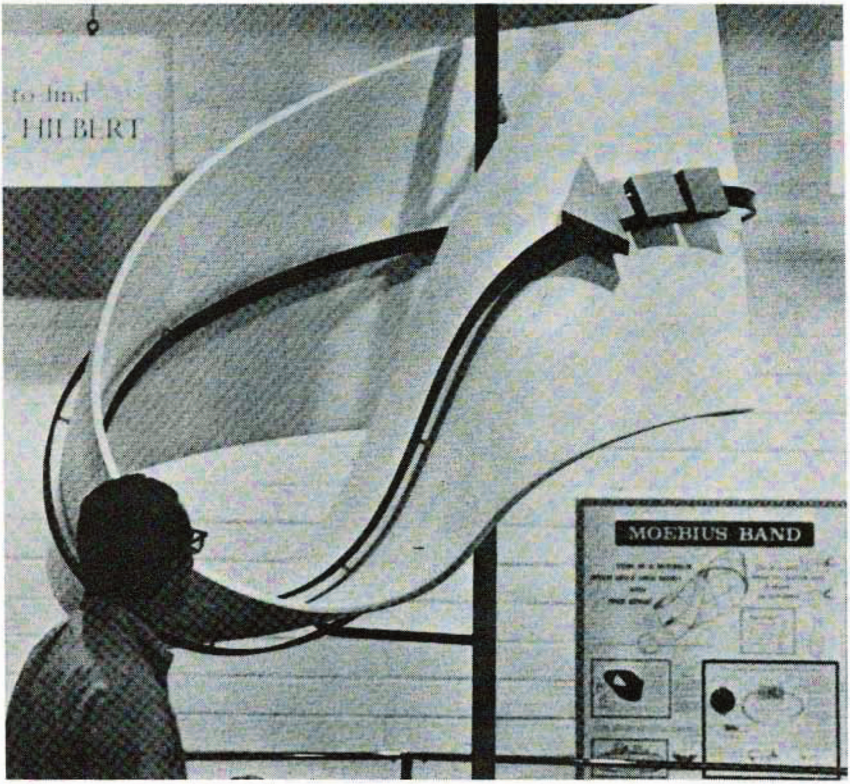
tokrat umetnik nakazal področje, s katerim naj bi se ukvarjali matematiki?

Ob koncu povejmo še, kako je posebnost Möbiusovega traku uporabil pisatelj A.J. Duetsch v fantastični zgodbi *Kam gremo od tod?,* ki se dogaja v mreži bostonske podzemske železnice. Vlak št. 86 s potniki odpelje s postaje in izgine. Vsi ga zaman iščejo, čeprav ga posamezniki večkrat slišijo nad ali pod seboj. Problem nenavadnega izginotja reši harvardski matematik Roger Tupelo, ki obupanim vodjem želežniškega prometa razloži svojo teorijo. Ker je podzemna železnica zelo kompleksna, je čisto mogoče, da je postala del enostan-

Slika 7. *Möbiusov trak II* M. C. Escherja (1963)



Slika 8. Prekritje ravnine z živalmi M. C. Escherja.



Slika 9. Möbiusova "železnica".

ske ploskve, torej ima obliko Möbiusovega traku. Zato je vlak izginil. Vse, kar lahko naredijo je le, da čakajo, da bo vlak dvakrat obvozil vso progo. In res! Po tednu dni se vlak spet prikaže z zdravimi, a hudo prestrašenimi in utrujenimi potniki (slika 9).

Milena Strnad


PRESEK
6