UDK (UDC) 528.33:528.14:681.3.06

TRIM - PROGRAM ZA IZRAVNAVO TRIANGULACIJSKIH MREŽ

Sandi Berk , Miran Janežič
FGG-Oddelek za geodezijo, Ljubljana
Prispelo za objavo: 1995-09-14
Pripravljeno za objavo: 1995-11-23

Izvleček

V članku je predstavljen računalniški program TRIM, ki je namenjen izravnavi triangulacijskih mrež z redukcijo opazovanj na Besselov elipsoid ter prehodu v Gauss-Kruegerjevo projekcijsko ravnino. Omogoča tudi iskanje grobih napak v mreži z uporabo statistične analize. Rezultat je poročilo o izravnavi ter skica mreže z elipsami napak na novih točkah.
Ključne besede: *groba napaka, izravnava, opazovanje, računalniški program TRIM, statistična analiza, triangulacijska mreža*

Abstract

In the article the TRIM computer program is presented, which is intended for adjustment of triangulation networks with reduction of observations to the Bessel ellipsoid and transition to the Gauss-Krueger projection plane. It is also enabled to find gross errors in networks using statistical analysis. The result is a report of adjustment and a sketch of a network with ellipses of errors for new points.
Keywords: *adjustment, gross error, observation, statistical analysis, triangulation network, TRIM computer program*

IZRAVNAVA TRIANGULACIJSKIH MREŽ

Obliko Zemlje najbolje opiše telo, ki ga imenujemo geoid. Ker je ničelna nivojska ploskev, ki ga omejuje, zelo kompleksna, jo moramo aproksimirati z neko matematično obvladljivo ploskvijo. V Sloveniji kot referenčno ploskev uporabljamo dvoosni (rotacijski) Besselov elipsoid s parametroma:

$a = 6377397{,}15500$ m (velika polos) in

$b = 6356078{,}96325$ m (mala polos).

Elementa a in b določata obliko in velikost rotacijskega elipsoida. Izvedeni elementi, ki jih bomo rabili v nadaljevanju, so:

e .... prva ekscentričnost meridianske elipse

e' ...... druga ekscentričnost meridianske elipse

M_φ..... radij ukrivljenosti meridiana na dani geografski širini

N_φ .... radij ukrivljenosti prvega vertikala na dani geografski širini

R_α...... radij ukrivljenosti elipsoida na dani geografski širini in v danem azimutu

R_φ .... srednji radij ukrivljenosti vseh normalnih presekov na dani geografski širini

φ .... geodetska (elipsoidna) širina točke in

λ .... geodetska (elipsoidna) dolžina točke.

Enačbe za te količine so v najnatančnejši obliki vzete iz literature (Borčić, 1976). Idealno postavljeni instrument na neki točki realizira tako imenovani horizontski (lokalni astronomski) koordinatni sistem. Vsa opazovanja se torej nanašajo na geoid. Ker so za redukcijo opazovanj z geoida na elipsoid potrebna astronomska ali gravimetrična opazovanja, to redukcijo v našem primeru zanemarimo.

Normala na stojišču in vizirana točka tvorita ravnino normalnega preseka. Prva stvar, ki jo moramo storiti, je redukcija smeri zaradi višine cilja (azimutalna redukcija), saj projekcija vizirane točke na elipsoid ne leži na ravnini normalnega preseka, pri dolžinskih opazovanjih pa iz poševno merjene dolžine izračunamo dolžino normalnega preseka.

Azimutalna redukcija (Čubranić, 1972)

$$\varepsilon = \frac{H \cdot e'^2 \cdot \cos^2 \varphi_1 \cdot \sin(2 \cdot A)}{2 \cdot M_{\varphi_1}}$$

Reducirana smer je $\alpha' = A + \varepsilon$, kjer je A orientirana smer, φ_1 je geografska širina stojišča, H pa elipsoidna višina vizirane točke.

Redukcija poševno merjene dolžine na elipsoid (Jenko, 1994)

$$r = 2 \cdot R_\alpha \cdot arcsin \sqrt{\frac{D^2 - (H_2 - H_1)^2}{4 \cdot (R_\alpha + H_1) \cdot (R_\alpha + H_2)}} - D$$

Reducirana razdalja je $S' = D + r$, kjer je D poševno merjena dolžina. H_1 in H_2 sta elipsoidni višini krajišč stranice.

Rezultati obeh redukcij se torej nanašajo na normalne preseke. Normalni presek je krivulja, ki jo dobimo s presekom elipsoida in ravnine, ki vsebuje normalo na opazovališču ter vizirano točko. Ker normalni preseki trikotnika ne zapirajo enolično, le-ti niso ustrezni za računanje na elipsoidu. Merjene kote reduciramo tako, da je vsota kotov v trikotniku enaka teoretični vrednosti $180^\circ + \varepsilon$, kjer je ε elipsoidni eksces. Stranica trikotnika, ki ustreza temu pogoju, je hkrati najkrajša spojnica dveh točk na elipsoidu in se imenuje geodetska linija. Opravka imamo torej z odklonom geodetske linije od normalnega preseka pri kotnih meritvah in z razliko dolžine geodetske linije in normalnega preseka pri dolžinskih meritvah.

Redukcija smeri z normalnega preseka na geodetsko linijo (Čubranić, 1972)

$$\delta_\alpha = \frac{S^2 \cdot e'^2 \cdot \cos^2 \varphi_m \cdot \sin(2 \cdot \alpha')}{12 \cdot N^2_{\varphi_m}}$$

Azimut geodetske linije je $\alpha = \alpha' + \delta_\alpha$, kjer je α' azimut normalnega preseka, φ_m je srednja geografska širina, S pa dolžina geodetske linije dane stranice. Redukcija smeri na geodetsko linijo je v večini primerov zanemarljiva tudi v mrežah prvega reda.

Redukcija dolžine z normalnega preseka na geodetsko linijo (Čubranić, 1972)

$$\delta_s = \frac{S'^5 \cdot e'^4 \cdot \cos^4 \varphi_m \cdot \sin^2(2 \cdot \alpha')}{360 \cdot N^2_{\varphi_m}}$$

Dolžina geodetske linije je $S = S' - \delta_S$, kjer je S' dolžina normalnega preseka. α je azimut geodetske linije dane stranice. Ta redukcija je zanemarljiva v vseh klasičnih triangulacijskih mrežah. S konformno preslikavo (Gauss-Kruegerjeva projekcija) geodetske linije z elipsoida na ravnino se ta preslika kot krivulja. Vsota kotov trikotnika v projekciji je zaradi konformnosti enaka kot na elipsoidu. Če hočemo izravnavo mreže izvršiti v projekciji (na ravnini), moramo preiti iz azimuta geodetske linije α na ravninski smerni kot ν in iz dolžine geodetske linije S na dolžino tetive geodetske linije v projekciji d. Določiti moramo torej smerno in dolžinsko redukcijo.

Smerna redukcija (Borčić, 1976)

$$\omega = \frac{\Delta \bar{x} \cdot (\bar{y}_1 + 2 \cdot \bar{y}_m)}{6 \cdot R^2_{\varphi_m}} + \frac{e'^2 \cdot \sin(2 \cdot \varphi_m) \cdot (\bar{y}_1 \cdot (\Delta \bar{x}^2 + \Delta \bar{y} \cdot \bar{y}_1) + 2 \Delta \bar{y} \cdot \bar{y}^2_m)}{6 \cdot R^3_{\varphi_m}}$$

Geodetski smerni kot je $\Theta = \nu + \omega$, kjer je ν ravninski smerni kot. Vrednost smerne redukcije narašča z oddaljevanjem od srednjega meridiana cone.

Dolžinska redukcija (Borčić, 1976)

$$u_d = \frac{d \cdot (\bar{y}_1^2 + \bar{y}_1 \cdot \bar{y}_2 + \bar{y}_2^2)}{6 \cdot R^2_{\varphi_m}} + \frac{d \cdot (\bar{y}_1^4 + \bar{y}_1^3 \cdot \bar{y}_2 + \bar{y}_1^2 \cdot \bar{y}_2^2 + \bar{y}_1 \cdot \bar{y}_2^3 + \bar{y}_2^4)}{24 \cdot R^4_{\varphi_m}}$$

Dolžina geodetske linije je $S = d + u_d$, kjer je d razdalja v projekciji (dolžina tetive geodetske linije v ravnini). Tudi vrednost dolžinske redukcije narašča z oddaljevanjem od srednjega meridiana cone. Z izvedbo obeh redukcij lahko torej izravnavo prenesemo iz elipsoida na ravnino (v projekcijo) in za koeficiente enačb popravkov uporabimo običajne enačbe (Jenko, 1994).

Za izravnavo mreže uporabimo tako imenovani Gauss-Markov model (Caspary, 1988). Predpostavimo, da so opazovanja porazdeljena normalno

$$l \sim \aleph\,(A \cdot x,\ \sigma_0^2 \cdot P^{-1}).$$

Matematično upanje za vektor popravkov je E(v)=0. Izračunamo vektor neznank (popravkov približnih vrednosti neznank) in vektor popravkov opazovanj

$$\hat{x} = (A^T \cdot P \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot P \cdot 1,$$

$$v = A \cdot \hat{x} - 1 .$$

Sledi ocena natančnosti izračunanih vrednosti neznank in a posteriori ocena natančnosti opazovanj. Ocenimo standardni odklon enote uteži

$$s_0 = \sqrt{\frac{v^T \cdot P \cdot v}{n - u}},$$

kjer je n število opazovanj, u pa število neznank v mreži. Vektorja neznank in popravkov sta porazdeljena normalno

$$\hat{x} \sim \aleph \; (x, \sigma_0^2 \cdot (A^T \cdot P \cdot A)^{-1}),$$

$$v \sim \aleph \; (0, \sigma_0^2 \cdot (P^{-1} - A \cdot (A^T \cdot P \cdot A)^{-1} \cdot A^T)).$$

Disperzijo normalno porazdeljenega vektorja neznank predstavlja variančno-kovariančna matrika le-tega, iz nje pa dobimo elipse napak na novih točkah. Za oceno zanesljivosti mreže izvedemo globalni preizkus modela (Caspary, 1988). Postavimo ničelno domnevo

$$H_0 : E(s_0^2) = \sigma_0^2.$$

Domnevamo, da je model pravilen in popoln; porazdelitvena domneva ustreza realnosti. Tvorimo testno statistiko

$$T = \frac{v^T \cdot P \cdot v}{\sigma_0^2},$$

ki je ob pogoju, da velja ničelna domneva, porazdeljena po Pearsonovi (χ^2) verjetnostni porazdelitvi z n-u (število nadštevilnih opazovanj) prostostnimi stopnjami, torej

$$T \sim \chi^2 \; (n - u) \quad | \; H_0.$$

Porazdelitvena funkcija Pearsonove verjetnostne porazdelitve je (Jamnik, 1980)

$$F_{\chi^2} (x, n) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \int_0^x t^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}} \cdot dt.$$

Globalni preizkus modela nam da realno oceno zanesljivosti le pri dovolj dobri a priori oceni natančnosti opazovanj. Z globalnim preizkusom modela tudi ne moremo odkriti, kje so grobe napake, lahko le ugotovimo njihovo prisotnost v mreži. Za samo iskanje grobih napak služi Popeova tau metoda (Caspary 1988). Z njo lahko ocenimo zanesljivost vsakega opazovanja posebej. Postavimo ničelno domnevo

$H_0 : E(v_i) = 0 \qquad \forall\, i \in \{1, 2 \ldots n\}.$

Domnevamo torej, da opazovanje nima grobe napake; matematično upanje popravka opazovanja je 0. Tvorimo testno statistiko

$$T_i = \frac{|v_i|}{s_{v_i}},$$

ki jo imenujemo tudi standardizirani popravek i-tega opazovanja. Ob pogoju, da velja ničelna domneva, je testna statistika porazdeljena po Popeovi (τ) verjetnostni porazdelitvi z n-u prostostnimi stopnjami

$$T \sim \tau\ (n - u) \quad |\ H_0.$$

Porazdelitveno funkcijo Popeove verjetnostne porazdelitve izrazimo s porazdelitveno funkcijo Studentove (t) verjetnostne porazdelitve

$$F_\tau\ (x, f) = F_t\left(\sqrt{\frac{(f-1)\cdot x^2}{f - x^2}},\ f - 1\right);\ x \in [0, \sqrt{f}),$$

porazdelitvena funkcija Studentove verjetnostne porazdelitve pa je (Jamnik, 1980)

$$F_t\ (x, n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n \cdot \pi} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \int_0^x \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \cdot dt.$$

Preizkus vsebuje n individualnih preizkusov, ki so med seboj statistično odvisni. To odvisnost pa eliminiramo s korekcijo dobljenega tveganja (Caspary, 1988):

$$\alpha_0 \approx 1 - \sqrt[n]{1 - \alpha}.$$

OPIS PROGRAMSKEGA PAKETA TRIM

Programski paket TRIM tvorita dva ločena dela. Prvi del je napisan v objektno orientiranem programskem jeziku C++ in predstavlja računski del – torej izravnavo mreže, drugi – grafični del pa omogoča izris skice mreže z elipsami napak na novih točkah in je zasnovan kot aplikacija znotraj programskega paketa AutoCAD. Vhodni podatki za izravnavo (ki jih vnesemo v vhodne datoteke) so:

- Gauss-Kruegerjeve koordinate ter nadmorske višine danih točk; rabimo modulirane koordinate (Baumgartnerjeva oblika) točk, ki so služile kot stojišča ali pa so bile le vizirane,
- Gauss-Kruegerjeve koordinate (približne) ter nadmorske višine novih točk; rabimo modulirane koordinate točk, ki jih lahko približno (na km natančno) odčitamo s primerne karte,
- opazovane smeri z a priori oceno natančnosti (standardni odklon opazovane smeri) in sicer sredine girusov po skupinah opazovanj,

- opazovane dolžine z a priori oceno natančnosti (standardni odklon opazovane dolžine), in sicer poševno merjene dolžine, ki so popravljene za atmosferske vplive in vplive inštrumenta,
- deformacija merila mreže, če ima mreža, v katero vklapljamo nove točke, deformirano merilo; gre za predvideno vrednost, ki je za dano območje določena z ekspertizami.

Obdelava podatkov, prebranih z vhodnih datotek, se začne z demodulacijo koordinat točk ter izvedbo opisanih redukcij opazovanj. Sledi del programa, ki predstavlja izravnavo opazovanj po metodi najmanjših kvadratov ter izračun definitivnih vrednosti neznank (Gauss-Markov model). Postopek je iterativen, ker funkcijske zveze med opazovanimi količinami in neznankami v triangulacijskih mrežah niso linearne; enačbe popravkov opazovanj lineariziramo. Definitivne koordinate novih točk iz prve iteracije služijo kot približne koordinate za drugo iteracijo, ves ostali postopek (redukcije opazovanj, izračun koeficientov enačb popravkov ...) pa se ponovi v vsaki iteraciji. Iterativni postopek je končan, ko so vsi popravki približnih vrednosti koordinatnih neznank manjši od 1 mm ali pa po deseti iteraciji (divergenca). Ko se iterativni del programa konča, razpolagamo z definitivnimi koordinatami novih točk ter definitivnimi vrednostmi orientacijskih kotov. Program izračuna še popravke opazovanj, vsoto kvadratov popravkov opazovanj, pomnoženih z ustreznimi utežmi (testna statistika za globalni preizkus modela; rezultat preizkusa je zanesljivost mreže iz a priori in a posteriori ocene natančnosti opazovanj), standardni odklon utežne enote ter variančno-kovariančno matriko neznank. S pomočjo slednje določi še varianci obeh koordinat ter njuno kovarianco za vse novo določene točke. Iz teh elementov določi obe polosi ter smerni kot velike polosi elipse napak. Na koncu izračuna še variančno-kovariančno matriko popravkov opazovanj ter standardizirane popravke opazovanj (testna statistika Popeove tau metode za iskanje grobih napak v mreži; rezultat preizkusa je zanesljivost posameznega opazovanja).

Na koncu program poišče najslabše opazovanje v mreži ter določi njegovo zanesljivost. Če je po izravnavi zanesljivost najslabšega opazovanja manjša od 50%, ga izločimo (iz vhodne datoteke) in ponovno zaženemo program. Tako lahko postopoma izločamo slaba opazovanja (grobe napake). Po našem kriteriju je torej slabo opazovanje tisto, katerega verjetnost, da ima grobo napako, je večja od 50%.

PRIMER IZRAVNAVE MREŽE

Datoteka rezultatov izravnave (izsek):

IZRAVNAVA KOMBINIRANE TRIANGULACIJSKE MREŽE
TRIM verzija 2.0, (C) 1995 Sandi Berk
Število kotnih opazovanj:
K = 18
Število dolžinskih opazovanj:
D = 3
Skupno število opazovanj:
N = K + D = 21
Število koordinatnih neznank:
C = 6
Število orientacijskih neznank:
O = 5
Skupno število neznank:
U = C + O = 11
Število nadštevilnih opazovanj:
R = N – U = 10
Definitivne vrednosti kotnih opazovanj:

STO	VIZ	AZM_R	R_SME	POPR	G_AZM	SME_R	S_KOT	S_P
374	747	-0.000000	131.393300	-0.000014	91.563258	-0.000008	91.563267	0.79
374	736	-0.000002	149.385798	0.000020	109.555791	-0.000053	109.555844	1.69
374	735c	0.000000	230.525501	-0.000010	191.095464	-0.000098	191.095561	0.55
374	101	-0.000004	359.595896	0.000003	320.165872	0.000103	320.165768	0.19
		D_O_K =	320.165973					
375	374	0.000002	0.000302	0.000018	13.450926	0.000243	13.450683	1.02
375	735c	0.000000	1.194401	-0.000027	15.044979	0.000155	15.044824	1.52
375	737	0.000000	28.131001	0.000027	41.581633	0.000129	41.581504	1.69
375	396	-0.000003	305.053097	-0.000018	318.503684	0.000086	318.503598	1.01
		D_O_K =	13.450605					
734c	736	-0.000002	23.373798	-0.000007	334.361507	0.000173	334.361334	0.71
734c	747	0.000000	57.223801	0.000007	8.211524	0.000249	8.211275	0.71
		D_O_K =	310.583716					
736	734c	-0.000000	-0.000000	0.000011	154.361167	-0.000167	154.361334	0.99
736	737	0.000000	60.101301	0.000013	214.462470	-0.000139	214.462609	0.88
736	735c	0.000001	95.314801	-0.000024	250.075934	-0.000068	250.080002	1.80
		D_O_K =	154.361156					
737	734c	-0.000000	-0.000000	-0.000003	94.101236	-0.000012	94.101248	0.28
737	375	0.000006	127.480106	0.000008	221.581353	-0.000151	221.581504	0.79

737	735c	-0.000002	207.345198	-0.000015	301.450422	0.000053	301.450369	1.30
737	374	-0.000004	244.292996	0.000013	338.394248	0.000168	338.394081	0.83
737	736	0.000003	300.361503	-0.000003	34.462739	0.000130	34.462609	0.24

D_O_K = 94.101239

Definitivne vrednosti dolžinskih opazovanj:

STO	VIZ	NIC_R	R_DOL	POPR	G_RAZ	DOL_R	N_RAZ	S_P
734c	736	-8.441	14366.260	0.001	14366.106	-0.472	14366.578	0.13
734c	737	-0.364	14479.799	0.008	14479.651	-0.405	14480.056	0.71
736	737	-7.647	14517.868	0.002	14517.713	-0.354	14518.067	0.16

D_M_M = -0.0000108

Definitivne koordinate novih točk:

TOC	Y	X	G_DOL	G_SIR
734c	5554742.656	5084265.614	15.42201139	45.54025051
736	5548581.781	5097242.552	15.37390020	46.01045382
737	5540302.380	5085318.474	15.31104217	45.54402032

Ocena natančnosti koordinat novih točk:

TOC	SY	SX	SK	A	B	TH
734c	0.0170	0.0208	0.0190	0.0214	0.0163	21.3708
736	0.0154	0.0159	0.0156	0.0180	0.0129	-42.2510
737	0.0124	0.0122	0.0123	0.0124	0.0121	10.1255

Standardni odklon enote uteži:

M0 = 0.3316

Zanesljivost mreže iz a priori in a posteriori ocene natančnosti opazovanj (globalni preizkus modela):

Z = 99.97%

Najslabše opazovanje je smer 736-735c.

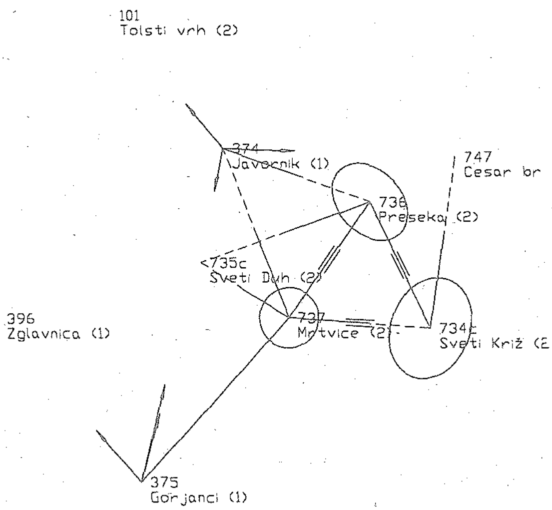
Njena zanesljivost:

Z = 76.72%

Legenda:

STO .... oznaka stojišča
VIZ .... oznaka vizirane točke
POPR .... popravek opazovanja
S_P .... standardizirani popravek opazovanja
AZM_R .... azimutalna redukcija (ter redukcija na geodetsko linijo)
NIC_R .... redukcija dolžine na ničelni nivo elipsoida (ter redukcija na geodetsko linijo)
R_SME .... opazovana smer reducirana na geodetsko linijo
R_DOL .... opazovana dolžina reducirana na geodetsko linijo
G_AZM .... geodetski azimut (smerni kot geodetske linije)
G_RAZ .... geodetska razdalja (dolžina geodetske linije)
SME_R .... smerna redukcija

DOL_R .... dolžinska redukcija
S_KOT .... smerni kot (v projekciji)
N_RAZ .... nemodulirana razdalja (v projekciji)
D_O_K .... definitivni orientacijski kot
D_M_M .... deformacija merila mreže
TOC .... oznaka točke
Y .... modulirana y-koordinata točke
X .... modulirana x-koordinata točke
H .... nadmorska višina točke
G_DOL .... geodetska (elipsoidna) geografska dolžina točke
G_SIR .... geodetska (elipsoidna) geografska širina točke
SY .... standardni odklon y-koordinate točke
SX .... standardni odklon x-koordinate točke
SK .... standardni koordinatni odklon točke
A .... velika polos elipse napak
B .... mala polos elipse napak in
TH .... smerni kot velike polosi elipse napak.



Skica mreže z elipsami napak:

Literatura:

Borčić, B., Gauss-Kruegerova projekcija meridijanskih zona. Zagreb, Geodetski fakultet, 1976
Caspary, W. F., Concepts of Network and Deformation Analysis. Kensington, The University of New South Wales, 1988
Čubranić, N., Viša geodezija II. dio. Zagreb, Tehnička knjiga, 1972
Ferlan, M., Posredna izravnava geodetskih mrež. Študij ob nalogi. Ljubljana, FAGG, 1987
Jamnik, R., Matematična statistika. Ljubljana, Državna založba Slovenije, 1980
Jenko, M., Predavanja pri predmetu Temeljne mreže na FAGG, Ljubljana, 1994

Recenzija: Tomaž Ambrožič
dr. Bojan Stopar