PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **3** (1975/1976)
Številka 4
Strani 163–165

Peter Petek:

KAKO SPRAVIMO ULOMEK V ŠKATLO

Ključne besede: matematika, aritmetika, teorija števil, verižni ulomki, Evklidov algoritem, približki.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/3/3-4-Petek.pdf

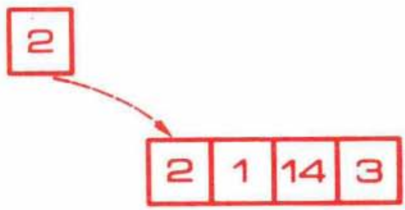
MATEMATIKA

KAKO SPRAVIMO ULOMEK V ŠKATLO

Ulomek v škatlo? Zakaj pa ne! Oglejmo si, kako to napravimo z ulomkom $\frac{135}{46}$

Najprej ga zapišemo kot mešano število

$$\frac{135}{46} = 2\frac{43}{46}$$



Dvojko skrbno odnesemo v prvi predalček škatle. Ostanek prekucnemo, da dobimo obratno (recipročno) vrednost

$$\frac{43}{46} \rightarrow \frac{46}{43} = 1\frac{3}{43}$$

Spet odnesemo pridelek - enico - v škatlo. Ostanek obrnemo

$$\frac{3}{43} \rightarrow \frac{43}{3} = 14\frac{1}{3}$$

Pospravimo 14 v škatlo in obrnemo ostanek

$$\frac{1}{3} \rightarrow \frac{3}{1} = 3$$

Še trojko damo v škatlo, ostanka ni več, ulomek je ves v škatli, štiri predalčke smo napolnili.

Naloga: Spravi v škatlo ulomke $\frac{9}{23}$, $\frac{1600}{563}$, $\frac{427}{312}$, $\frac{17}{550}$!

Oglejmo si zgornji postopek. V prvi predalček smo dali celi del števila, to je največje celo število, ki je še manjše od našega ulomka. Prav lahko bi se zgodilo, da bi bilo to celo število nič. Pač pa v naslednjih predalčkih ne more biti ničle, ker vsakič obrnemo ostanek, ki je manjši od 1 in je zato recipročna vrednost večja od 1. Števci in imenovalci se zmanjšujejo, ko dobimo v imenovalcu 1, je igre konec, ker ni več ostanka, s katerim bi jo nadaljevali. Pozorni bralec bo v igrici spoznal Evklidov algoritem.

Pred seboj imamo sedaj namesto ulomka škatlo, kamor smo spravili ulomek. Ali bi mogli spet sestaviti ulomek? O, seveda gre, le začeti moramo pri zadnjem predalčku in vso pot preiti v obratni smeri. Komentar najbrž ni potreben.

$$3 \to \frac{1}{3}$$

$$14\frac{1}{3} = \frac{43}{3} \to \frac{3}{43}$$

$$1\frac{3}{43} = \frac{46}{43} \to \frac{43}{46}$$

$$2\frac{43}{46} = \frac{135}{46}$$

$$\boxed{2}\,\boxed{1}\,\boxed{14}\,\boxed{3} \to \frac{135}{46}$$

Torej vsaki škatli z naravnimi števili - nič je dovoljena le v prvem predalčku - priredimo ulomek, racionalno število. Zapisu s pomočjo "škatle" rečemo *verižni ulomek*

$$\frac{135}{46} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{3}}}$$

Ime je res upravičeno, opazimo pa tudi, da utegne biti takle zapis precej dolg in neroden, saj imamo že v našem skromnem primeru trojni ulomek. Zato navadno uporabljamo zapis v eni sami vrsti: $\frac{135}{46} = [2, 1, 14, 3]$

Naloga: Izračunaj vrednosti verižnih ulomkov $[0, 1, 4, 3]$, $[5, 67, 8, 8, 3]$, $[a, b, c]$, $[a, b, c, d]$ (a, b, c, d so naravna števila)!

Recimo, da smo stresli in izgubili nekaj zadnjih predalčkov škatle. Res nerodno, a nesreča le ni prehuda. Seveda prvotnega ulomka ne moremo več sestaviti, dobimo pa še vedno približek. Vzemimo kar naš primer! Če izgubimo celo škatlo, je seveda stvar brezupna. Zato si najprej mislimo, da smo izgubili vse razen prvega predalčka. Ustrezni ulomek je potem kar 2, to je približek, ki je za $\frac{43}{46}$ premajhen.

Prav, kaj pa, če sta nam ostala prvi in drugi predalček

$$[2, 1] = 2 + \frac{1}{1} = 3$$

Ta približek je za $\frac{3}{46}$ prevelik, napaka je manjša kot prej. Če poznamo vsebino prvih treh predalčkov, dobimo približek:

$$[2, 1, 14] = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{14}} = 2\frac{14}{15} = \frac{44}{15}$$

Razlika $\frac{135}{46} - \frac{44}{15} = \frac{101}{690}$ je pozitivna, zato je ta približek spet premajhen, je pa boljši od prejšnjega. Brez dokaza povejmo, da je vedno tako, kot smo opazili na našem primeru. Lihi približki (prvi, tretji, peti, ...) so premajhni, sodi (drugi, četrti, ..) preveliki. In napaka, ki jo naredimo, je tem manjša, čim kasnejši približek vzamemo.

Razen ulomkov obstajajo še druga števila, t. im. iracionalna števila. Med njimi sta na primer $\sqrt{2}$ in π. Taka števila zahtevajo neskončno škatlo. Zaradi zanimivosti si oglejmo, kaj je v teh škatlah za zgoraj omenjeni iracionalni števili!

$$\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \dots \quad]$$

Enici v prvem predalčku sledi neskončno dvojk.

O tem se moremo brž prepričati! Koren iz dva leži med 1 in 2, zato sodi v prvi predalček enica. Razliko $\sqrt{2} - 1$ obrnemo in racionaliziramo

$$\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

To število leži med 2 in 3, zato je v drugem predalčku dvojka, ostanek $\sqrt{2} + 1 - 2 = \sqrt{2} - 1$ je isti kot prej in zato dobimo dvojko v vseh nadaljnjih predalčkih.

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, \dots]$$

Tu pa ne opazimo nobenega reda, po katerem bi se pojavljala števila v predalčkih. In na žalost pravila res ni.

Naloga: Iz zgornjih dveh verižnih ulomkov poišči po pet približkov za vsako od števil $\sqrt{2}$ in π!

Peter Petek