PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **20** (1992/1993)
Številka 5
Strani 290–293

Peter Legiša:

PRAVILO 72 IN ŠTEVILO *e*

Ključne besede: matematika, aritmetika, analiza, obrestno obrestni račun, število e.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/20/1146-Legisa.pdf

PRAVILO 72 IN ŠTEVILO *e*

V januarski številki revije National Geographic je članek z naslovom *Moč denarja*. V njem je omenjeno PRAVILO 72, ki ga uporabljajo bankirji in finančni izvedenci.

Pravilo je zelo preprosto: Če hočemo izvedeti, v koliko letih se pri obrestovanju s p procenti začetni znesek podvoji, delimo 72 s p.

Denimo, da vložimo devize v hranilnico po 8 % obrestni meri. Koliko časa bo trajalo, da se začetni kapital podvoji? Delimo 72 z 8, pa dobimo odgovor: 9 let.

Po članku *Moč denarja* bi za to pravilo (katerega avtor ni znan) morali vedeti vsi.

Pa preverimo stvar na našem primeru. Po enem letu moramo obstoječemu znesku prišteti 8 procentov. Namesto tega lahko obstoječi znesek pomnožimo z 1˙08. Tako se po dveh letih začetni kapital pomnoži z $1{\cdot}08^2$, po devetih letih pa z

$$1{\cdot}08^9 \doteq 1{\cdot}999,$$

kar je res praktično enako 2.

Oglejmo si še en primer. Denimo, da je inflacija 12 %. Čez koliko časa se bodo cene podvojile? Uporabimo PRAVILO 72. Delimo 72 z 12, odgovor je: 6 let. Preverimo stvar z žepnim računalnikom:

$$1{\cdot}12^6 \doteq 1{\cdot}974.$$

Vzemimo, da je inflacija 3% mesečno. Po PRAVILU 72 traja podvojitev $72:3 = 24$ mesecev. Uporabimo tipko x^y ali y^x na žepnem računalniku in ugotovimo, da je v resnici

$$1{\cdot}03^{24} \doteq 2{\cdot}033.$$

Vidimo, da gre za približno formulo, ki pa daje presenetljivo dobre rezultate. Vprašamo se lahko, kakšna je matematična razlaga tega pravila.

Tu se lahko spomnimo na **število** *e*. To je število, h kateremu stremijo izrazi

$$(1 + \frac{1}{n})^n,$$

ko se število n veča čez vse meje. Na primer:

$$\begin{aligned} 1{\cdot}1^{10} &\doteq 2{\cdot}59 \\ 1{\cdot}01^{100} &\doteq 2{\cdot}70 \\ 1{\cdot}001^{1000} &\doteq 2{\cdot}717 \\ 1{\cdot}0001^{10000} &\doteq 2{\cdot}7181. \end{aligned}$$

Izkaže se, da je število

$$e = 2{\cdot}71828\ldots$$

ena najvažnejših matematičnih konstant. Privzamemo lahko, da je za velike n

$$(1 + \frac{1}{n})^n \doteq e.$$

Prav tako boste morali verjeti, da tu sploh ni nujno, da je število n naravno število. Denimo, da je

$$\frac{1}{n} = \frac{p}{100},$$

kjer je p število procentov. Tako imamo formulo

$$(1 + \frac{p}{100})^{\frac{100}{p}} \doteq e,$$

če je le $n = \frac{100}{p}$ dovolj velik, se pravi p dovolj majhen.

PRAVILO 72 pa trdi:

$$(1 + \frac{p}{100})^{\frac{72}{p}} \doteq 2.$$

Poskusimo to preveriti.

Upoštevajmo, da je po pravilu za potenciranje potenc

$$(1 + \frac{p}{100})^{\frac{72}{p}} = (1 + \frac{p}{100})^{\frac{100}{p} \cdot \frac{72}{100}} = ((1 + \frac{p}{100})^{\frac{100}{p}})^{\frac{72}{100}} \doteq e^{0{\cdot}72},$$

če je p dovolj majhen.

Z računalnikom ugotovimo, da je

$$e^{0{\cdot}72} \doteq 2{\cdot}05,$$

kar se res ne razlikuje dosti od 2.

Če bi bili natančnejši, bi ugotovili, da je

$$e^{0'693} \doteq 2'000.$$

Torej bi za zelo majhne obrestne mere namesto PRAVILA 72 morali vzeti "pravilo 70". (Za tiste, ki poznate logaritme, je 0'693... prav naravni logaritem števila 2.) Ker pa se obrestne mere navadno sučejo okrog 8 %, je bilo izbrano PRAVILO 72, ki daje na tem območju natančnejše rezultate. Poleg tega je 72 "lepo" število, deljivo z mnogimi števili, kar smo tudi izkoristili v naših primerih.

Oglejmo si še napako PRAVILA 72. Absolutna napaka pove, koliko se po PRAVILU 72 izračunana vrednost razlikuje od 2, in je torej enaka

$$|(1+\frac{p}{100})^{\frac{72}{p}}-2|.$$

Relativno napako dobimo, če to delimo s pravo vrednostjo, se pravi z 2. Če relativno napako pomnožimo s 100, dobimo njeno vrednost v procentih. Na sliki 1 imamo narisano relativno napako PRAVILA 72 v procentih, če obrestna mera znaša $p\%$, in to za p od 1 do 24. Vidimo, da za obrestne mere od 5 do 11 % ta napaka znaša manj kot 1 procent, če pa je obrestna mera blizu 8 %, je napaka praktično enaka 0. Na prvi pogled je videti, kot da sta oba dela grafa na sliki 1 ravni črti, vendar seveda to ni res, le zelo podobna sta ravnima črtama. Slike so narejene s programom Mathematica (in s pomočjo kolega Marka Petkovška).

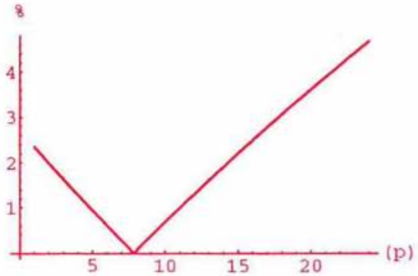
Za tiste, ki dovolj dobro poznate pojem odvoda, lahko povemo še nekaj več. Če narišemo izraz za relativno napako brez absolutne vrednosti, se pravi graf funkcije

$$f(x)=50((1+\frac{x}{100})^{\frac{72}{x}}-2),$$

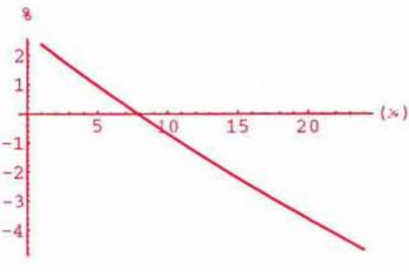
dobimo sliko 2. Kot vidimo, ta funkcija seka os x blizu točke 8 in je, kot smo že omenili, zelo podobna premici. Odvod funkcije f izračunamo tako, da potenco v oklepaju zapišemo kot

$$e^{\frac{72}{x}\ln(1+\frac{x}{100})}$$

in potem odvajamo kot posredno funkcijo. Hitro izračunamo, da je $f'(8) \doteq -0'325$.



Slika 1



Slika 2

Po Newtonovi metodi lahko zdaj izračunamo, da krivulja seka abscisno os v točki 7'85 (na tri mesta natančno). Za to obrestno mero je torej PRAVILO 72 točno. Obenem iz izračunanega nagiba v točki 8 še enkrat vidimo, da relativna napaka PRAVILA 72 na intervalu od 5 do 11 znaša manj kot 1 %. Pri ocenjevanju nagiba "na oko" ne smemo pozabiti, da merilo na obeh oseh ni enako!

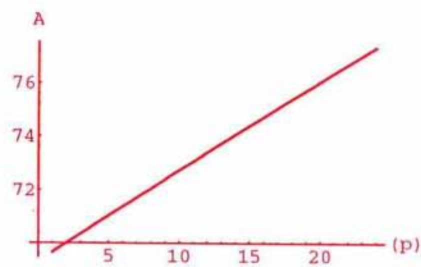
Na koncu si oglejmo še eno pot do PRAVILA 72. Denimo, da iščemo število A, da bo

$$(1+\frac{p}{100})^{\frac{A}{p}}=2.$$

Uporabimo logaritem na obeh straneh:

$$\frac{A}{p}\log(1+\frac{p}{100})=\log 2$$

$$A=\frac{p\log 2}{\log(1+\frac{p}{100})}.$$



Slika 3

Na sliki 3 je graf za A. Vidimo, da se spet sučemo okrog števila 72. Za majhne obrestne mere - okrog 2 % - bi bilo ugodnejše "pravilo 70". Pri zelo velikih obrestnih merah pa podvojitev nastopi tako hitro, da moramo potrebni čas izračunati drugače.

Peter Legiša