

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik **16** (1988/1989)

Številka 4

Strani 229–231

Vilko Domajnko:

TRI MODRE

Ključne besede: razvedrilo, naloge.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/16/940-Domajnko.pdf>

© 1989 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA – založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

TRI MODRE

Za začetek si najprej le bežno oglejmo tri *modre* iz precej davnih časov.

Prve *modre* se je domislil Kitajec *Gonsung Long*, ki je živel približno 200 let pred našim štetjem, za časa vladavine dinastije Zhou (beri: Ču). Takole gre:

"Vzemi za laketi dolgo palico in jo slehernega dne prelomi na pol. Naslednjega dne boš dal na pol le še njeno polovičko, nato le še četrtno, ... Pa vendarle palice na tak način nikdar ne bo zmanjkalo. Niti čez desettisoč generacij ne, ki bi morebiti nadaljevale z lomljenjem ostankov te palice."

Druga *modra* prihaja iz glave starega Grka *Zenona*, ki jo je domislil približno kakšnih 200 let pred življenjem Gonsung Longa. Pravi pa takole:

"Recimo, da bi rad šel po ravni črti od točke A do točke B . Da bi prišel do B , moram najprej prehoditi polovico razdalje med A in B . Recimo – razdaljo $\overline{AB_1}$. In – da bi prišel do B_1 , moram najprej priti do B_2 , ki leži na polovici poti med A in B_1 . To lahko kar naprej ponavljam. Zmeraj je pač treba prehoditi najprej polovico poti pred seboj. In v okviru takšnega razmišljanja je seveda precej jasno, da se sploh nikdar ne bom premaknil z mesta v točki A . Sleherno gibanje je torej nemogoče!"

Tretja *modra* je zelo blizu druge. Le nekaj desetletij pred Zenonom jo je povedal *Demokrit*. Tudi on je bil iz Grčije.

"Vzemi jabolko in ga prereži na pol. Nato razpolovi dobljeno polovičko. Zatem razpolovi preostalo četrtno jabolka; zatem razpolavljalj spet in spet. Dokler gre. Povej, največ kolikokrat ti bo uspelo razpolavljaljati jabolko na tak način?"

Pa poglejmo, koliko je skupnega v teh treh domislicah in v čem se med seboj razhajajo.

Gonsung Long pravi tole:

Polovica palice in še njena četrtnina in še njena osmina in še njena šestnajstina in še ... – to vse skupaj (kar so ostanki pri lomljenju palice na slehernem izmed korakov) je zagotovo manj od začetne ene cele palice. Pa če še tako dolgo lomim in kopičim ostanke. Torej

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots \longrightarrow 1 \\ \text{ali} \quad & \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots \longrightarrow 1 \end{aligned}$$

Tak zapis pomeni, da se vsota na levi sicer zares "zelo zelo" približa vrednosti 1, vendar je pa žal nikdar ne doseže. Zmeraj ji vsaj še malo manjka.

Gonsung Long pravi, da niti desettisoč členov v tej vsoti ni dovolj, da bi bila njena vrednost 1. Dovolj bi jih bilo kvečjemu neskončno (?) mnogo. Vsi pa vemo, da je to (neskončno) zelo zelo zelo daleč!

Zenon pa o istem problemu modruje iz natanko nasprotni strani. In sicer pravi takole:

“Res je, da z lahkoto prehodim polovičko razdalje med A in B . Ničkolikokrat sem jo že! Res je, da z lahkoto prehodim tudi njeno četrtno, pa njeno osmino, njeno šestnajstino, ... Vse to gre prav zlahka. Toda — prvi korak, tisti, prvi! Njega ne zmorem storiti. Pa saj ne, da bi bil predolg, o, ne! Prej obratno, zelo kratek bi naj bil! Toda — ne vem, kdaj ga naj storim. Brž, ko se odločim — sedaj!, spoznam, da bi že prej, še pred tem, moral storiti tistega za polovico krajšega. In še pred njim tistega ...”

Torej drži, da bi naj bila vsota vseh teh njegovih premikov

$$... + \frac{\overline{AB}}{32} + \frac{\overline{AB}}{16} + \frac{\overline{AB}}{8} + \frac{\overline{AB}}{4} + \frac{\overline{AB}}{2}$$

kar ves premik od A do B

$$... + \frac{\overline{AB}}{2^5} + \frac{\overline{AB}}{2^4} + \frac{\overline{AB}}{2^3} + \frac{\overline{AB}}{2^2} + \frac{\overline{AB}}{2} \longrightarrow \overline{AB}$$

če ... — če bi le bil sposoben poiskati začetek.

No, sedaj pa je že jasno. Vidimo, da je Zenonova vsota povsem identična z Gonsung Longovo, le da je njen zapis zrcalen. To pa že pomeni, da oba možakarja trdita pravzaprav eno in isto! Gonsung Long pravi, da se v njegovi vsoti na levi strani ne da priti do konca in da je zatoj treba kar v neskončnost. Zenon pa, da se v njegovi vsoti na levi ne da stopiti na začetek. Treba bi bilo začeti v neskončnosti. To pa je zares težko, seveda!

Vendar pa zaplet, ki je nastal, navidez prav presenetljivo “neproblematično” razvozla Demokrit.

Na prvi pogled se zdi Demokritov problem skorajda povsem enak Gonsung Longovemu. Razlika je le v tem, da Demokrit razpolavlja jabolko, Gonsung Long pa palico. Toda! Demokrit pravi, da lahko (jabolko) razpolavljam le tako dolgo, dokler ne pridem do delca, ki je nedeljiv. Do atoma torej! In pri njej se ves ta postopek razpolavljanja seveda ustavi.

Mimogrede — z nekaj srednješolske matematične spretnosti se da brž izračunati, da noben Demokrit ne bi mogel jabolka razpoloviti več kakor 90-krat. Več o tem najdete v članku (2).

Sklep:

Pri branju tega članka bi morda kak bralec prav zlahka zašel v nevarne miselne vode, češ – "Zdaj pa zares ne vem več, kje ima ta svet rep in kje glavo! Očitno, da je na njem prav vse mogoče ... kakor kaže *modrovanje* teh treh iz davnih časov. Vsak po svoje pač *modruje* ..."

Izrek: No, no, saj tako hudo pa spet ni!

Dokaz: Kajti, če bi bilo resnično vse mogoče, potem bi bilo mogoče tudi to, da bi si nekdo izmislil reč, ki si je ni mogoče izmisliti. Takšne reči si pa seveda ni mogoče izmisliti, saj si je vendar ni mogoče izmisliti! Več kakor jasno! Potemtakem torej ne drži, da bi bilo na tem svetu prav zares vse mogoče.

Vilko Domajnko

Literatura:

- (1) Li Yan, Du Shiran, *Chinese Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1987, str. 21
- (2) Tomaž Fortuna, *Demokritovo jabolko*, Presek, 3 (1975/76), št. 4, str. 177
- (3) Dirk J. Struik: *Kratka zgodovina matematike*, DZS Ljubljana, 1978, str. 53