PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **31** (2003/2004)
Številka 6
Strani 342–344

Janko Bračič:

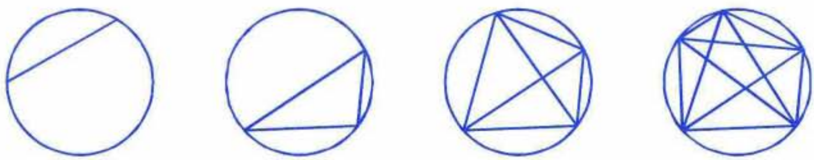
ZAKON MALIH ŠTEVIL

Ključne besede: matematika, statistika, porazdelitve.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/31/1575-Bracic.pdf

ZAKON MALIH ŠTEVIL

Narišimo krožnico in na njej izberimo dve različni točki. Na koliko delov razdeli tetiva, ki povezuje ti dve točki, krog? Izberimo zdaj na krožnici tri različne točke, narišimo vse tri tetive in se ponovno vprašajmo, na koliko delov so te tetive razdelile krog. Nadaljujmo s štirimi točkami na krožnici. Na koliko delov šest tetiv, ki povezujejo štiri različne točke na krožnici, razdeli krog? Poglejmo še primer petih različnih točk na krožnici. Pet točk na krožnici izberimo tako, da se nobene tri tetive, ki jih povezujejo, ne sekajo v isti točki - pravimo, da morajo biti izbrane točke v splošni legi. Tetiv, ki povezuje pet točk v splošni legi na krožnici, je 10. Na koliko delov razdelijo te tetive krog?



Slika 1. Na koliko delov so razdeljeni krogi?

Odgovore na zastavljena vprašanja najdemo na sliki 1. Prvi krog je razdeljen na 2 dela, drugi krog na $4 = 2^2$ dele, tretji krog na $8 = 2^3$ delov in četrti krog na $16 = 2^4$ delov. Pomislite na pravilo: Če je na krožnici n točk v splošni legi, potem vse tetive, ki imajo krajišča v izbranih točkah, razdelijo krog na 2^{n-1} delov. Ali ta trditev res velja? Naj vam še povem, da v primeru desetih točk na krožnici, ki so v splošni legi, pripadajoče tetive razdelijo krog na $256 = 2^8$ delov. Če se še vedno ne morete odločiti glede veljavnosti trditve, narišite krožnico, izberite na njej šest točk v splošni legi, narišite vse tetive in preštejte, na koliko delov so tetive razdelile krog.

Naravno število p je praštevilo, če ima natanko dva delitelja: 1 in p. Prvih pet praštevil je $2, 3, 5, 7, 11$. Ni se težko prepričati, da je tudi število 31 praštevilo. Nekoliko več truda je potrebno za ugotovitev, da so vsa števila v nizu

$$331,\ 3\,331,\ 33\,331,\ 333\,331,\ 3\,333\,331$$

praštevila. Ali na splošno velja, da so števila, ki imajo desetiški zapis $33\ldots31$, praštevila? Bi vam bilo lažje odgovoriti, če vam povem, da je naslednje število v omenjenem zaporedju, to je 33 333 331, praštevilo? Da boste izvedeli pravilni odgovor na zastavljeno vprašanje, poiščite ostanek pri deljenju števila 333 333 331 s 17.

Matematiki pri svojem delu pogosto naletijo na podobne primere: prvih nekaj členov kakšnega zaporedja se pokorava pravilu, ki za kasnejše člene zaporedja ne velja. Krivec, da takšni primeri obstajajo, je *zakon malih števil.* Matematik Richard K. Guy ga je formuliral takole:

Malih števil je premalo, da bi lahko zadostila vsem potrebam.

Če že govorimo o malih številih, je umestno vprašanje, katera števila so *mala.* Lahko bi rekli, da vsa tista, ki jih je mogoče zapisati z vsemi števkami (recimo v desetiškem sestavu) in jih torej lahko *vidimo.* Zgledi malih števil so: 1 000 000, 1 234 567 890 pa tudi 9 999 999 999 999 999 999. Za število $((((10^{100})!)^{100})!)^{100}$ bi lahko rekli, da ni malo, saj ga praktično ne moremo zapisati z vsemi števkami in ga torej tudi *videti* ne moremo.

Iz zakona malih števil sledi *zakon okroglih števil.* V vsakdanjem življenju rečemo, da je število *okroglo,* če je deljivo z 10, 100, 1000 itd. (spomnite se okroglih obletnic). V matematiki okrogla števila definiramo malce drugače. Za natančno definicijo potrebujemo pojem *desetiškega logaritma.* Nekoliko poenostavljeno bi lahko rekli, da je desetiški logaritem naravnega števila n približno za 1 manj, kot je število števk v desetiškem zapisu števila n. Ustaljena oznaka za desetiški logaritem naravnega števila n je $\log n$. V spodnji tabeli so dane vrednosti desetiškega logaritma za nekatera naravna števila.

n	$\log n$
1	0,000 ...
2	0,301 ...
5	0,698 ...
10	1,000 ...
15	1,176 ...
100	2,000 ...
150	2,176 ...
1 000	3,000 ...

Označimo z $d(n)$ število deliteljev naravnega števila n. Očitno je $d(1) = 1$ in $d(p) = 2$, če je p praštevilo. Za majhna števila n vrednosti $d(n)$ ni težko določiti: $d(10) = 4$, $d(100) = 9$, $d(1000) = 16$ itd. V splošnem pa si pomagamo z naslednjim dejstvom. Naj bo

$$n = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k} \, ,$$

razcep števila n na produkt potenc različnih praštevil, potem je

$$d(n) = (e_1 + 1) \dots (e_k + 1) \, .$$

Okroglost naravnega števila n določimo tako, da pogledamo, kakšno je razmerje med številom deliteljev števila n in velikostjo desetiškega logaritma števila n. Bolj natančno, naravno število n je tem bolj okroglo, čim večja je njegova *mera okroglosti*

$$o(n) = \frac{d(n)}{\log n}.$$

V naslednji tabeli je nekaj zgledov.

n	$d(n)$	$o(n)$
10	4	1
100	9	4,5
1 000	16	5,333...
5 316	12	5,220...
4 525	6	1,641...
2 112	28	8,421...

Število 2112 je zelo okroglo, celo bolj kot število 100 000, saj je $o(100\,000) = 7,2$. Še bolj okroglo je število 43 200 z mero okroglosti $o(43\,200) = 18{,}121\ldots$.

Jasno, ker je malih števil premalo, tudi okroglih števil ni dovolj – velja zakon okroglih števil:

Okroglih števil je premalo, da bi lahko zadostila vsem potrebam.

V vsakdanjem življenju nas zakona malih in okroglih števil lahko zavedeta, da vidimo skrite zakonitosti in povezave tam, kjer jih mogoče ni. Kot zgled navedimo Josepha Campbella (1904-1987), priznanega angleškega profesorja literature, specialista za mite. V eni od svojih raziskav je ugotovil naslednje:

1. V indijski mitologiji traja obdobje enega eona 4 320 000 let.
2. Po prepričanju ljudstev v Mezopotamiji okrog leta 290 pred našim štetjem je od kronanja prvega zemeljskega kralja do vesoljnega potopa minilo 432 000 let.
3. V islandski Eddi je zapisano, da je v dvorani bojevnikov boga Othina 540 vrat in skozi vsaka od njih na dan bitke pride 800 vojščakov (pripomnimo, da je $540 \times 800 = 432\,000$).

Campbell je sklepal, da takšno sovpadanje ne more biti naključje. No, mi smo lahko vsaj malce skeptični in se vprašamo, ali so stara ljudstva imela skrivno skupno znanje, katerega del je bilo število 432 000, ali pa je bil na delu zakon okroglih števil.

Janko Bračič