PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **10** (1982/1983)
Številka 4
Strani 163–168

Tomaž Pisanski:

PETNAJST IN PODOBNE IGRE

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/10/629-Pisanski.pdf

MATEMATIKA

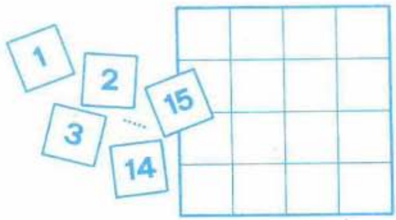
PETNAJST IN PODOBNE IGRE

Igra "Petnajst" je dobro poznana starejšim bralcem. Ker pa je morda le vsi ne poznate, jo bom opisal. Na kvadratu 4x4 leži 15 ploščic velikosti 1x1, en kvadratek pa je prazen. Ploščice so oštevilčene s številkami od 1 do 15. *Naloga:* s premikanjem ploščic dobiti "urejen" položaj, ki ga prikazuje slika 1.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	*

Slika 1

Če igre nimaš doma, si jo lahko sam napraviš. Iz papirja izreži majhne kvadratke in jih oštevilči. Ploščo si nariši na drugem kosu papirja. (slika 2)



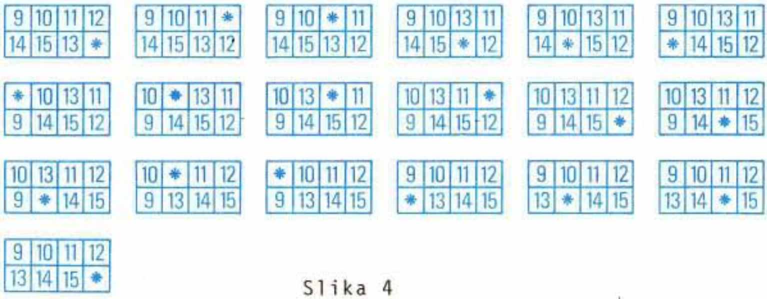
Slika 2

Recimo, da je začetni položaj tak, kot ga kaže slika 3:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
14	15	13	*

Slika 3

Kako bi prišli do končnega, urejenega položaja? Prvih dveh vrstic ne bomo spreminjali, zato jih na sliki ne bomo niti pokazali. Eno možno rešitev kaže slika 4:



Slika 4

Poglejmo še enkrat rešitev na sliki 4. Iz začetnega položaja na sliki 3 smo po nekaj potezah prešli v končni položaj (ki ga kaže slika 1). Poteze moremo uganiti iz sosednjih položajev. V prvi potezi smo kvadratek 12 premaknili navzdol. V naslednji potezi smo kvadratek 11 premaknili na desno. Potezo lahko natančno popišemo že s kvadratkom, ki ga premikamo. Tako je tretja poteza določena že s tem, da povemo, da bomo premaknili kvadratek 13. Mesto, na katero ga bomo premaknili, je namreč popolnoma določeno - premakniti ga moramo na mesto preznega kvadratka. Premikamo lahko le ploščice na kvadratkih, ki so sosednji praznemu mestu. V vsakem trenutku imamo torej največ 4 možne poteze (če je prazni kvadratek v sredini plošče). Če je prazni kvadratek na robu, imamo le 3 možne poteze in če je v vogalu le dve možni potezi. V našem začetnem položaju na sliki 3 imamo le dve možni potezi: 12 in 13. Rešitev, ki jo kaže slika 4, lahko zdaj na kratko popišemo z začetnim položajem (slika 3) in z zaporedjem potez:

12-11-13-15-14-9-10-13-11-12-15-14-13-10-9-13-14-15.

Za rešitev smo potrebovali 18 potez. Zdaj pa si lahko zastavimo dve zanimivi vprašanji:
Ali je mogoče iz vsakega začetnega položaja doseči končni položaj?
Ali znamo najti pravilo, ki nam bo povedalo, kako iz danega začetnega položaja doseči končni položaj?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	*

Slika 5

Odgovor na prvo vprašanje je ne! Iz položaja na sliki 5 ni mogoče doceči končnega položaja. Še več! Vsi možni položaji razpadejo na dve množici, označimo ju z D in S. Iz vsakega položejev množice D je mogoče doseči vsak drug položaj iz množice D, med drugim tudi končni položaj na sliki 1. Iz vsakega položaja množice S je mogoče doseči vsakega drugega iz S in obratno. To trditev bi lahko dokazali s permutacijami, vendar ji bomo mi kar verjeli. Kdor pa le ne verjame, naj pogleda v knjigo J. I. Pereljmana: Zanimiva matematika. Z odgovorom na prvo vprašanje si pri igranju žal ne moremo kaj dosti pomagati. Kako pa naj vemo, kateri začetni položaj leži v množici D?

Morda pa bo odgovor na drugo vprašanje bolj konstruktiven. Preden se lotimo raziskave tega vprašanja, si oglejmo celo družino sorodnih iger. Igro petnajst lahko namreč posplošimo. Namesto da jo igramo na tabli 4x4, lahko podobno nalogo zastavimo na tabli 6x6 ali 4x5 oziroma v splošnem na tabli mxn. Pri tem sta m in n poljubni vnaprej izbrani števili. En kvadratek imamo prazen, ostalih $mn - 1$ kvadratkov pa oštevilčimo s števili 1, 2, 3, ..., $mn - 1$. Končni položaj ima v splošnem obliko:

1	...	2	n
$n + 1$	...	$n + 2$	$2n$
....	....	....	....
$(m-2)n + 1$	...	$(m-2)n + n-1$	$(m-2)n + n$
$(m-1)n + 1$	...	$(m-1)n + n-1$	*

Slika 6

Zaradi simetrije lahko obravnavamo le primere,ko je število stolpcev večje ali enako številu vrstic. Primer $m = 1$ najprej. Če je tudi $n = 1$, igra ni zanimiva; imamo en sam kvadratek, pa še ta je prazen. Če je $n = 2$, sta oba položaja v množici D. Pri $n = 3$ je igra bolj zanimiva, imamo namreč 6 možnih položajev:

1 2 *	1 * 2	* 1 2	2 1 *	2 * 1	* 2 1

Prvi trije so v D, drugi trije pa v S. Če je n več kot 3, pride do situacije, ki je doslej še nismo imeli. Dobimo več kot samo dve množici. Pri vsakem m dobimo $(m-1)! = (m-1)(m-2)\ldots3\cdot2\cdot1$ množic položajev. V vsaki je po m položajev.

Zdaj pa si oglejmo igre, pri katerih je $n = 2$. Pri $m = 2$ imamo $4! = 4\cdot3\cdot2\cdot1 = 24$ položajev. Oglejmo si položaj: $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&*\\\hline\end{array}$ in vse možne položaje, v katere lahko iz njega pridemo.

1 2	1 *	1 2	* 2	2 *	2 3	2 3	* 3	3 *	3 1	3 1	* 1
3 *	3 2	* 3	1 3	1 3	1 *	* 1	2 1	2 1	2 *	* 2	3 2

Skratka, dobimo ravno dvanajst položajev, v katere lahko pridemo. Iz položaja $\begin{array}{|c|c|}\hline 2&1\\\hline 3&*\\\hline\end{array}$ pa lahko pridemo v kateregakoli izmed preostalih dvanajst položajev. Spet imamo le dve množici D in S. Prav gotovo je mogoče pri vsaki igri $m\times n$ preiti iz končnega v začetni položaj, če je mogoče preiti iz začetnega v končni, le zaporedje potez moramo obrniti. Tako nas zaporedje

15-14-13-9-10-13-14-15-12-11-13-10-9-14-15-13-11-12

pripelje iz položaja na sliki 1 v položaj na sliki 3.

Čas je, da si ogledamo naslednjo igro 2x3. Recimo, da je začetni položaj takle: $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&5&3\\\hline *&2&1\\\hline\end{array}$. Najprej bomo poskusili spraviti 1 na svoje mesto. Ker enice ne moremo premakniti, bomo najprej * pripeljali k enici: $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&5&3\\\hline *&2&1\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&5&3\\\hline 2&*&1\\\hline\end{array}$ Zdaj lahko enice premaknemo: $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&5&3\\\hline 2&1&*\\\hline\end{array}$. Spet pripeljemo * pred enico, vendar tako, da enice pri tem ne premikamo: $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&5&3\\\hline 2&1&*\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&5&*\\\hline 2&1&3\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&*&5\\\hline 2&1&3\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline *&4&5\\\hline 2&1&3\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&4&5\\\hline *&1&3\\\hline\end{array}$

Premaknemo enico:

2	4	5
1	*	3

Zdaj bomo spraznimi mesto nad enico:

2	4	5
1	*	3

2	*	5
1	4	3

*	2	5
1	4	3

Še ena poteza in enica je na svojem mestu:

1	2	5
*	4	3

Naslednja naloga je pripeljati šterico na svoje mesto. V našem primeru ni težka.

1	2	5
4	*	3

. Prvi stolpec je že dober. Ostal nam je še kvadrat 2x2, ki ga uženemo podobno kot smo to že prej delali. Iz

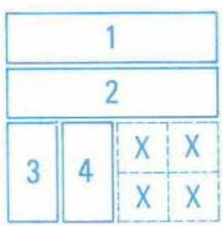
2	5
*	3

želimo dobiti

2	3
5	*

. Če se še spomnimo našega razmišljanja ob nalogi 2x2, vemo, da je v 12 primerih naloga rešljiva, v preostalih 12 primerih pa ni. Žal je naš primer med nerešljivimi. Zdaj pa že lahko povemo, kako se da rešiti vsako nalogo na deski 2xn. Če je $n = 2$, jo rešimo tako, kot smo že povedali. Če je n več kot dva, pa najprej postavimo prvi stolpec v pravilni položaj in nato rešimo nalogo s preostalimi ploščicami na deski 2x(n-1). To pomeni, da sprevimo drugi stolpec v pravilni položaj, za tem tretji in tako naprej, dokler nam ne ostane naloga na deski 2x2. Tako lahko uženemo vsako nalogo oblike 2xn. Kaj pa naloge oblike 3xn? Tu gre čisto podobno. Najprej postavimo kvadratke 1, 2, 3, ..., n v pravilnem vrstnem redu v prvo vrstico, za tem pa v drugih dveh vrsticah rešimo naloge 2xn tako kot smo že povedali. Še majhen korak in znali bomo rešiti vsako nalogo oblike mxn. Takole napravimo:

Uredimo najprej prvo vrstico (postavimo 1, 2, ..., n na prava mesta), za tem pa rešimo nalogo (m-1)xn. Naslednja slika kaže, v kakšnem zaporedju pripeljemo po tem pravilu kvadratke na svoje prava mesta pri igri petnajst.

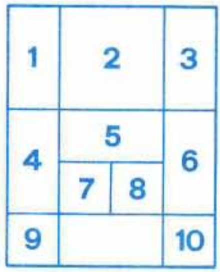


Slika 8

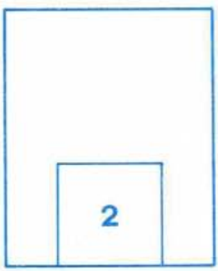
Pri tem, ko "peljemo kvadratek na svoje mesto", ne smemo več premikati kvadratkov, ki smo jih že "pripeljali na svoje mesto".

Ogledali smo si družino iger oziroma nalog, ki so podobne igri petnajst (mi jo reje imenujemo igra 4x4). Dokazali nismo tu ničesar. Spoznali pa smo pravilo ali, kot bi temu rekli matematiki, a l g o r i t e m, ki reši vsako igro mxn (m in n večja kot 1) tako, da jo v končni fazi prevede na igro 2x2. Če imamo srečo in je igra 2x2 rešljiva, rešimo s tem tudi prvotno nalogo. Dalo bi se dokazati, da v primeru, ko ne moremo rešiti igre 2x2, tudi prvotna naloga nima rešitve.

Igro petnajst lahko posplošimo še na drugačne načine. Kvadratke spremenimo recimo v pravokotnike ali pa v like različnih oblik. *Premisli in reši* tole nalogo: Na tabli 5x4 je 10 likov razvrščenih tako, kot kaže slika 9.



Slika 9



Slika 10

Ali je mogoče s premikanji prestaviti kvadratek številka 2 na mesto, ki ga kaže slika 10? Položaj ostalih ploščic pri tem ni pomemben!

Tomaž Pisanski