PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **26** (1998/1999)
Številka 5
Strani 258–263, XVII, XVIII

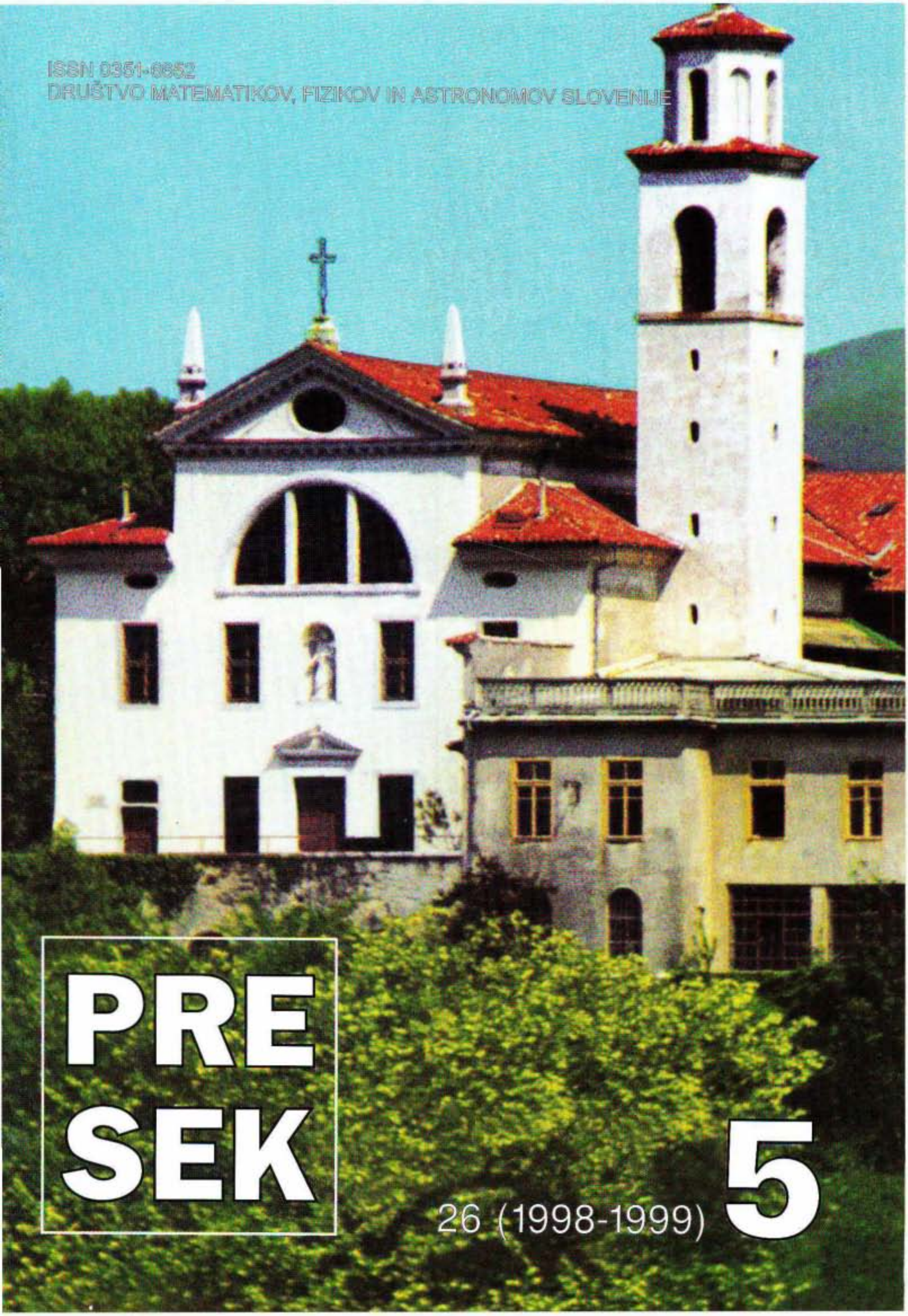
Marko Razpet:

DR. FRANC MOČNIK IN CAUCHYJEVA METODA

Ključne besede: Augustin Louis Cauchy (1789-1857), Franc Močnik (1814-1892), matematika, numerična analiza, ničle polinomov, Cauchyjeva metoda, slovenski matematiki.

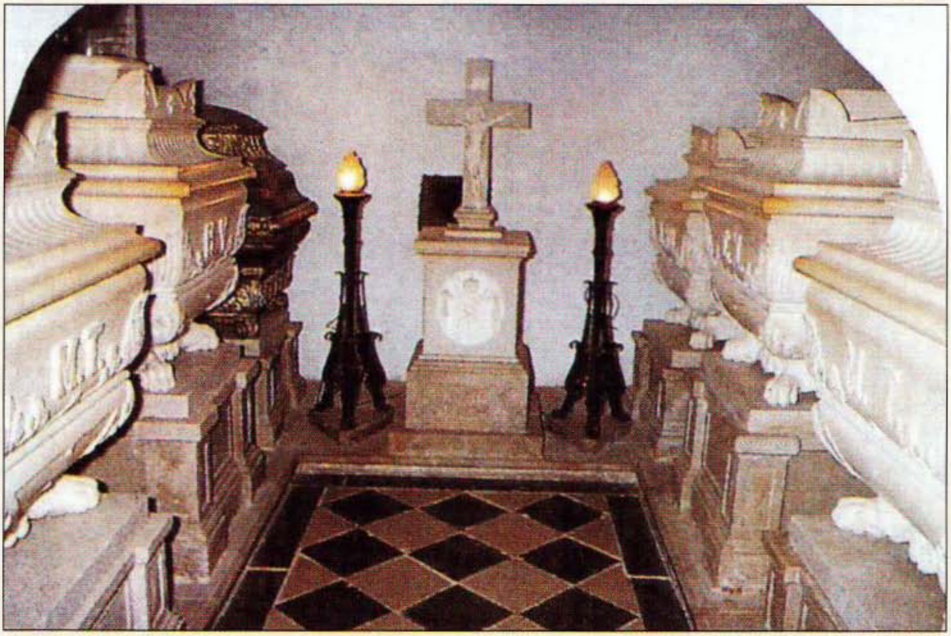
Elektronska verzija: http://www.presek.si/26/1381-Razpet.pdf

ISSN 0351-6652
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE



PRESEK

26 (1998-1999) 5

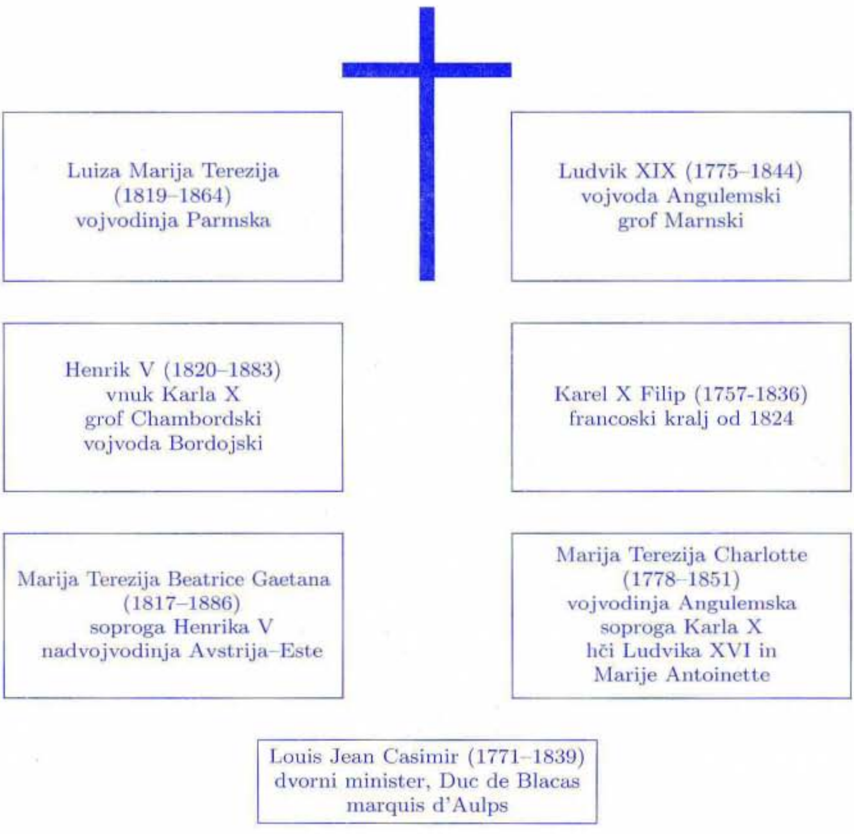


Zgoraj:
Skupna grobnica zadnjih Bourbonov v frančiškanskem samostanu na Kostanjevici v Novi Gorici.

Desno:
Zadnji bourbonski vladar Francije Karel X. Po begu iz Francije je našel zatočišče v Gorici. Na njegovo povabilo je nekaj časa živel v naših krajih in v Močnikovi bližini veliki francoski matematik Augustin Cauchy.

DR. FRANC MOČNIK IN CAUCHYJEVA METODA

Na začetku 17. stoletja so na Kostanjevici pri Gorici zgradili majhno cerkev, ki so ji kasneje pridružili še samostan za karmeličane. Avstrijski cesar Jožef II, sin cesarice Marije Terezije, je proti koncu 18. stoletja dal samostan zapreti, tako kot še mnogo drugih. Leta 1811 so na Kostanjevico prišli frančiškani, ki v samostanu živijo še dandanes (slika na naslovnici). Ustanova premore mnogo zanimivih slik in knjižnico z nekaterimi zelo starimi knjigami. Pod samo cerkvijo pa je grobnica z marmornatimi sarkofagi, v katerih počivajo nekateri člani zadnje francoske kraljeve družine (dinastija Burbonov). Skica prikazuje razpored sarkofagov (glej tudi fotografijo na drugi strani ovitka).



Po bitki pri Waterlooju, kjer je doživel Napoleon dokončen poraz, je leta 1824, po smrti kralja Ludvika XVIII, zasedel francoski prestol kralj Karel X Filip (slika na drugi strani ovitka). Toda leta 1830 je prišlo v Franciji do revolucije in Karel X ter njegov sin Ludvik XIX sta se morala odpovedati prestolu v korist Henrika V, ki pa nikoli ni vladal. Kralj Karel X s spremstvom je moral zbežati iz Francije. Nekaj časa se je mudil na Škotskem in Češkem, nato pa je dobil zatočišče pri grofu Coronini v Gorici, kjer je kmalu po prihodu zbolel za kolero in umrl.

Marija Terezija Beatrice Gaetana ima največ zaslug zato, da zadnji Burboni počivajo v skupni grobnici v frančiškanskem samostanu na Kostanjevici, kar je bila poslednja želja Henrika V. Med prvo svetovno vojno so bili sarkofagi zaradi soške fronte prepeljani na varen kraj blizu Dunaja, leta 1932 pa nazaj na Kostanjevico.

Kaj imajo zadnji Burboni pravzaprav opraviti z matematiko? Tedaj živeči znani francoski matematik Augustin Louis Cauchy (1789–1857) je bil goreč privrženec francoskih kraljev. Kot matematik, podvržen strogemu načinu razmišljanja, je menil, da samo kralj s trdo roko lahko naredi zopet red v državi. Po revoluciji leta 1830 je zato odšel iz Francije in se nekaj časa zadrževal v tujini, dokler ga ni kralj Karel X povabil k sebi v Gorico, da bi bil vnuku Henriku V vzgojitelj in učitelj. Cauchyja je pot res zanesla v Gorico, kjer pa je tiste čase (1832–1836) študiral bogoslovje Franc Močnik (1814–1892). Močnik ni postal duhovnik, ampak učitelj na goriški normalki (1836–1846), hkrati pa je študiral na graški univerzi, kjer je leta 1840 doktoriral. Vsi ga najbolj poznamo po njegovih računicah.

Augustin Louis Cauchy

Kaže pa, da je Cauchy, kot eden glavnih matematikov prve polovice 19. stoletja, v Gorici naredil na Močnika izredno velik vtis. Morda se je Močnik ravno zato odločil za matematiko in šolske zadeve. Ni sicer popolnoma znano, kako dobro sta se pravzaprav moža osebno poznala. Edino dejstvo, ki sploh govori v prid poznanstva, je izdajateljeva opomba skoraj 100 strani dolge, v nemščini napisane razprave, ki jo je Močnik objavil na Dunaju leta 1839 in ima naslov *Theorie der numerischen Gleichungen mit einer Unbekannten*, kar pomeni *Teorija numeričnih enačb z* eno neznanko. Naslovu sledi še daljši podnaslov *Mit besonderer Rücksicht auf die neueste von Cauchy erfundene allgemeine Auflösungsmethode*, kar pomeni *S posebnim ozirom na najnovejšo splošno metodo reševanja, ki jo je iznašel Cauchy*. S to edino znanstveno razpravo se je Močnik, star 25 let, uveljavil v matematičnem svetu kot avtoriteta, kar mu je še kako koristilo kasneje, recimo pri šolskih reformah.

Franc Močnik

In izdajateljeva opomba? Pravi, da je Močnik v svoji skromnosti zamolčal, da je imel v Gorici veliko priložnost in srečo delati v neposredni bližini Cauchyja, ki je tam več let vzgajal in učil vojvodo Bordojskega. In da taka povezanost obeh matematikov daje objavljeni razpravi še posebno vrednost.

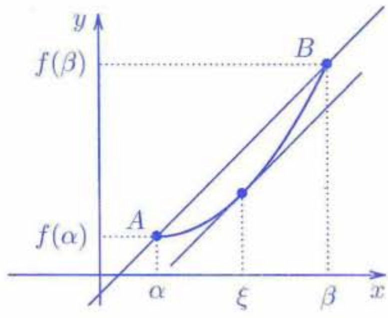
Zakaj v razpravi pravzaprav gre? Močnik obravnava postopek za numerični izračun pozitivnih ničel polinomov z realnimi koeficienti. Nemško govorečim bralcem je podal Cauchyjevo metodo v dostopnejši in razumljivejši obliki. Cauchy je bil eden od prvih, v današnjem smislu strogih in doslednih matematikov, ki je trajneje vplival na Močnika in njegova dela.

Kaj lahko na kratko povemo o sami Cauchyjevi metodi? Metoda v omenjeni razpravi je precej splošna, zato si oglejmo najenostavnejšo, linearno metodo.

Naj bo $f(x) = f_n x^n + f_{n-1}x^{n-1} + \ldots + f_1 x + f_0$, kjer je $f_n \neq 0$ in $n > 1$, polinom z realnimi koeficienti. Odvod polinoma $f(x)$ je polinom $f'(x) = nf_n x^{n-1} + (n-1)f_{n-1}x^{n-2} + \ldots + f_1$. Geometrijsko pomeni $f'(x_0)$ naklon tangente na graf polinoma $f(x)$ v točki $T_0(x_0, f(x_0))$. Če ima $f(x)$ pozitivne koeficiente, ima $f'(x)$ tudi pozitivne koeficiente.

Polinom $f(x)$ z realnimi koeficienti naj ima na intervalu (a, b), kjer je $0 \leq a < b$, natanko eno ničlo x_0. To pomeni, da je $f(x_0) = 0$. To ničlo bi radi približno izračunali, ker natančne ne znamo najti. Zapišimo $f(x) = p(x) - q(x)$, kjer imata polinoma $p(x)$, $q(x)$ pozitivne koeficiente. Potem pri pogoju $a < x < b$ očitno veljata relaciji $p'(a) < p'(x) < p'(b)$ in $q'(a) < q'(x) < q'(b)$. Zato velja na intervalu (a, b) relacija: $p'(a) - q'(b) <$ $< f'(x) < p'(b) - q'(a)$.

Opazujmo graf polinoma $f(x)$ na intervalu $[\alpha, \beta]$, kjer je $\alpha < \beta$. Kot je znano, je smerni koeficient premice skozi točki $A(\alpha, f(\alpha))$ in $B(\beta, f(\beta))$ enak $(f(\beta) - f(\alpha))/(\beta - \alpha)$. Tej premici je vzporedna vsaj ena tangenta na graf polinoma $f(x)$ na obravnavanem intervalu. To pomeni, da vsaj za eno točko ξ med α in β velja: $f'(\xi) = (f(\beta) - f(\alpha))/(\beta - \alpha)$ oz. $f(\beta) - f(\alpha) = f'(\xi)(\beta - \alpha)$.



Uporabimo sedaj to trditev na intervalu $[a, x]$, kjer je $a < x < b$. Torej lahko najdemo med a in x, tako točko ξ_1, za katero velja $f(x) - f(a) = f'(\xi_1)(x - a)$. Prav tako lahko najdemo med x in b tako točko ξ_2, za katero velja $f(b) - f(x) = f'(\xi_2)(b - x)$. Iz zadnjih dveh relacij in iz mej za odvod polinoma $f(x)$ na intervalu (a, b) dobimo relaciji

$$f(a) + (x - a)(p'(a) - q'(b)) < f(x) < f(a) + (x - a)(p'(b) - q'(a))$$

in

$$f(b) + (x - b)(p'(b) - q'(a)) < f(x) < f(b) + (x - b)(p'(a) - q'(b)),$$

ki veljata na intervalu $[a, b]$. Tam torej velja $h(x) \leq f(x) \leq H(x)$, kjer sta $H(x)$ in $h(x)$ linearna polinoma

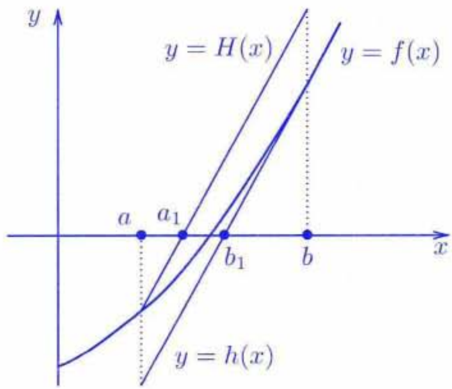
$$H(x) = f(a) + (x - a)(p'(b) - q'(a)), \quad h(x) = f(b) + (x - b)(p'(b) - q'(a)).$$

Očitno je $H(a) = f(a)$ in $h(b) = f(b)$.

Vzemimo najprej, da je $f(a) < 0$ in $f(b) > 0$. Ničli funkcij $H(x)$ in $h(x)$ sta po vrsti

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{p'(b) - q'(a)}, \qquad b_1 = b - \frac{f(b)}{p'(b) - q'(a)}.$$

Število a je spodnji, b pa zgornji začetni približek za ničlo x_0 polinoma $f(x)$, števili a_1 in b_1 pa sta boljša približka za x_0 in zato velja: $a < a_1 < x_0 < b_1 < b$.



Ker je $0 = H(a_1) > f(a_1)$ in $0 = h(b_1) < f(b_1)$, lahko opisani račun ponovimo na intervalu (a_1, b_1), dobimo nov interval (a_2, b_2) itd. Če postopek dovolj dolgo nadaljujemo, dobimo ničlo polinoma $f(x)$ tako natančno, kot želimo.

V primeru $f(a) > 0, f(b) < 0$ obravnavamo polinom $-f(x)$, ki ima iste ničle kot $f(x)$, polinoma $p(x)$ in $q(x)$ pa zamenjata vlogi.

Primer: Polinom $f(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 6x - 1$ ima pozitivno ničlo na intervalu $(2, 3)$, saj je $f(2) < 0$ in $f(3) > 0$. Ker je $f(x) = (x^4 + 5x^2) - (3x^3 + 6x + 1)$, lahko uporabimo opisani postopek za $p(x) = x^4 + 5x^2$, $q(x) = 3x^3 + 6x + 1$, $p'(x) = 4x^3 + 10x$, $q'(x) = 9x^2 + 6$, $a = 2$, $b = 3$.

Približke a_n in b_n za $n \geq 1$ v tabeli računamo po formulah:

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{p'(b_n) - q'(a_n)}, \qquad b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)}{p'(b_n) - q'(a_n)}.$$

Pri tem vzamemo: $a_0 = 2, b_0 = 3$.

n	a_n	b_n
0	2.000000	3.000000
1	2.010417	2.729167
2	2.023925	2.512316
3	2.040438	2.342643
4	2.058834	2.217320
5	2.076058	2.136587
6	2.087190	2.099115
7	2.090406	2.090964
8	2.090593	2.090594
9	2.090593	2.090593

Pozitivna ničla polinoma je torej $x_0 = 2.090593$. Polinom $f(x)$ ima še eno realno ničlo na intervalu $(-1, 0)$, saj je $f(-1) > 0$ in $f(0) < 0$. Najprej zamenjamo x z $-x$, tako da iščemo ničlo polinoma $f(x) = x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 6x - 1$ na intervalu $(0, 1)$. Ker je $f(0) < 0$ in $f(1) > 0$, lahko uberemo zgornji postopek, z drugačnima polinomoma $p(x)$ in $q(x)$, in dobimo ničlo $x_0 = 0.146994$, ki pa se za predznak razlikuje od ničle prvotnega polinoma. Prvotni polinom ima dve realni ničli: $x_1 = -0.146994$ in $x_2 = 2.090593$.

Marko Razpet