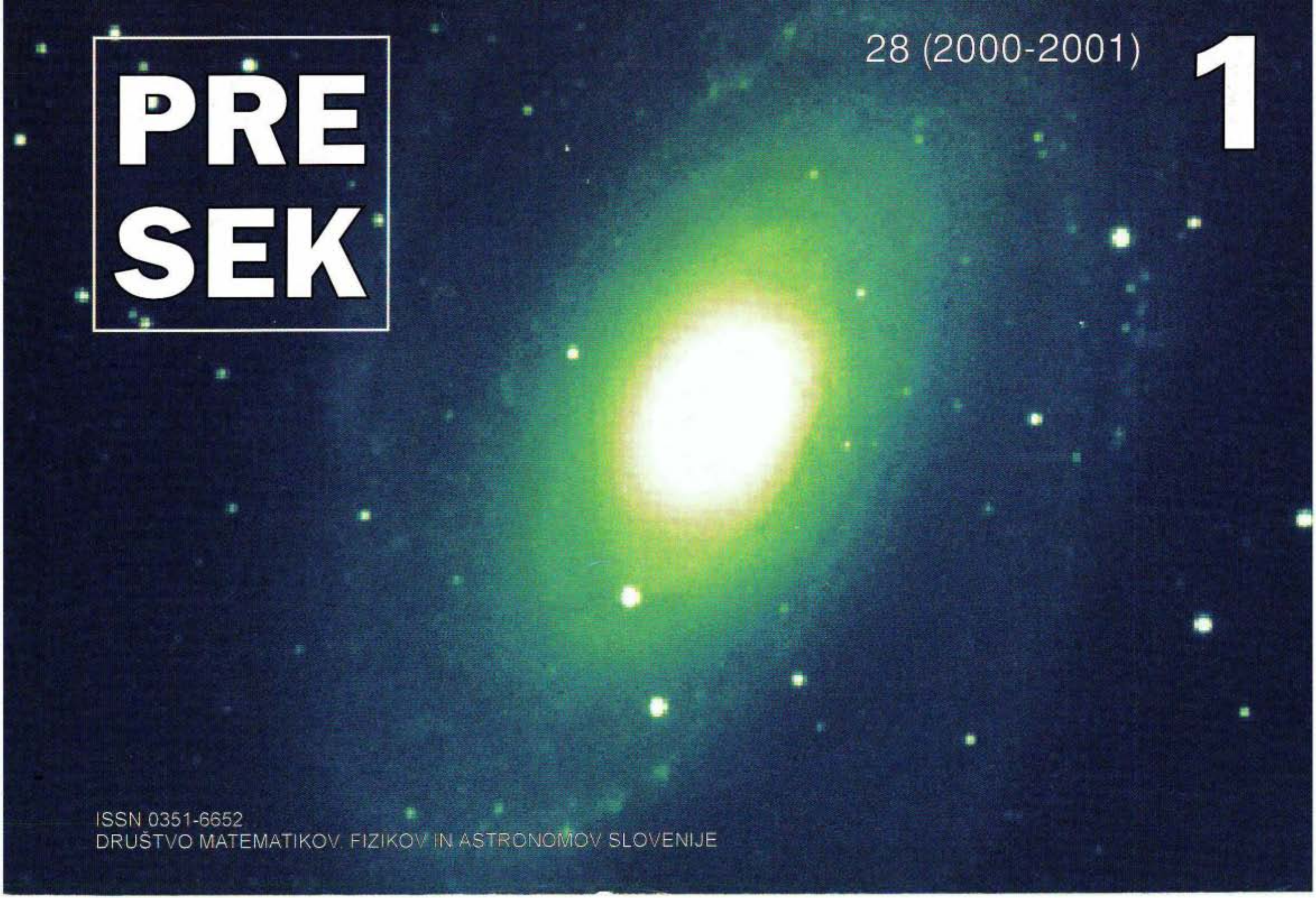
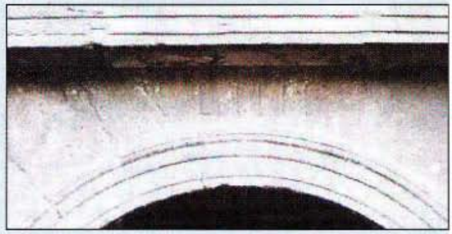


PRESEK

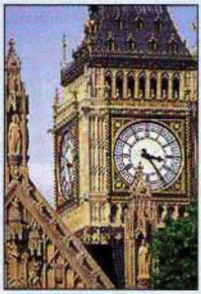
28 (2000-2001) 1

ISSN 0351-6652
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

Leto 1579 zapisano kot CIↃIↃLXXIX



Vhod v rimskem Koloseju številka 44, zapisana kot XLIIII



Znamenita ura Big Ben v Londonu

Detajl s stropa cerkve z letnico 1606 zapisano kot MCCCCCCVI

Ure z rimskimi številkami

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
28. letnik, leto 2000/2001, številka 1, strani 1–64

VSEBINA

ŠAHOVSKI KONJ NA POLJIH KOCKE

Z nalogo, kako voditi šahovskega konja po poljih običajne šahovnice, da bo na vsako od njenih 64 polj 'stopil' natanko enkrat, so se v zgodovini razvedrilne matematike veliko ukvarjali.

Za spremembo si oglejmo nekoliko drugačno nalogo. Namesto šahovske deske imejmo kocko dimenzije $4 \times 4 \times 4$, ki jo sestavlja 64 enako velikih kock. Kocke pomenijo posamezna polja, na katerih se konjiček lahko ustavi. Poenostavljeno lahko vzamemo, da skozi vsako polje potekajo tri paroma pravokotne ravnine, vzporedne mejnim ploskvam velike kocke. Iz posameznega polja lahko preide konj v drugo polje po pravilu gibanja šahovskega konja in sicer po katerikoli od pripadajočih treh ravnin.

Ni težko videti, da imamo iz 8 vogalnih polj po 6 izhodov, iz 24 robnih polj, ki niso vogalna, po 8, iz nerobnih polj na stranicah kocke po 10 in iz 8 povsem notranjih kock po 12 možnih izhodov. Poiskati vse možne poti, pri katerih bi konj prešel vsako polje kocke natanko enkrat, je torej zagotovo zanimiva in zahtevna naloga.

Zato vzemimo nalogo bolj za zabavo, kot zares, in si pot do vsaj ene rešitve oljašajmo s ponarodelo pesmico pesnika Sorškega polja. (Ker je naš problem tridimenzionalen, papir pa premore le dve dimenziji, smo kocko $4 \times 4 \times 4$ 'razrezali' na 4 plasti s po 16 kockami, ki jih predstavljajo kvadrati na naslednji skici.)

1. plast

so	i	ves	pri
mov	šel	va	co
mel	vat	do	za
je	span	ljub	noč

2. plast

nar	ši	je	ma
ko	Naš	mež	ni
mi	od	ček	šel
je	vsa	ujel	ko

3. plast

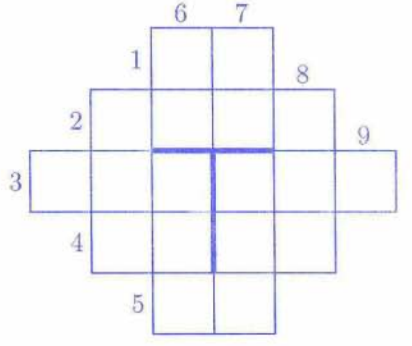
joj	ljub	čel	ček
za	je	če	čno
ca	o	ma	jo
Naš	kat	mo	več

4. plast

no	nil	ne	je
bo	Zbo	be	je
zvo	več	la	va
le	zdra	dan	ne

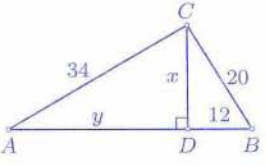
Marija Vencelj

MATEMATIČNA KRIŽANKA – PITAGOROV IZREK



VODORAVNO:

1. Višina enakokrakega trikotnika z osnovnico 14 in krakom 25.
2. Površina kvadra z robovi 12, 13 in 30.14.
3. Ploščina pravokotnega trikotnika s hipotenuzo 40 in ostrim kotom $22°30'$ (vzemite, da je $\sqrt{2} = 1.41$). Ploščina trikotnika s spodnje slike.



4. Stranica enakostraničnega trikotnika s ploščino $25\sqrt{3}$. Telesna diagonala kvadra z robovi 3, 4 in 12.
5. Višina pravokotnega trikotnika s katetama 60 in 80.

NAVPIČNO:

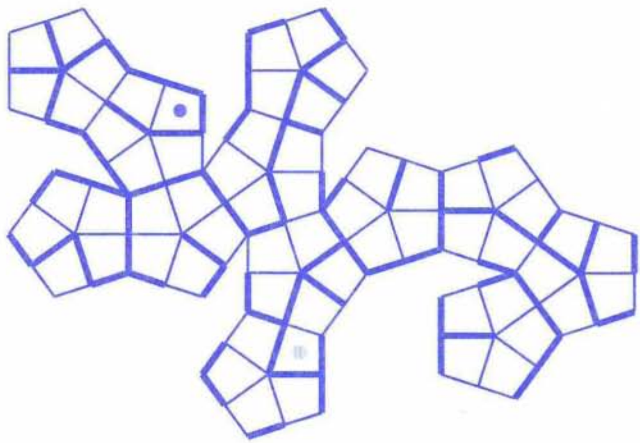
1. Ploščina kvadrata nad eno kateto pravokotnega trikotnika s hipotenuzo 91 in drugo kateto 90.
2. Višina enakokrakega trapeza s pravokotnima diagonalama in s ploščino 4.
6. Obseg kvadrata z diagonalo $7\sqrt{2}$. Ploščina trapeza z diagonalama 25 in 26 ter višino 24.
7. Stranica romba z diagonalama 80 in 18. Ploščina pravokotnika z obsegom 118 in produktom diagonal 2845.
8. Kvadrat višine pravokotnega trikotnika, če sta pravokotni projekciji katet na hipotenuzo enaki 3 in 311.
9. Dolžina tetive krožnice s premerom 10, če je središčna razdalja tetive 4.

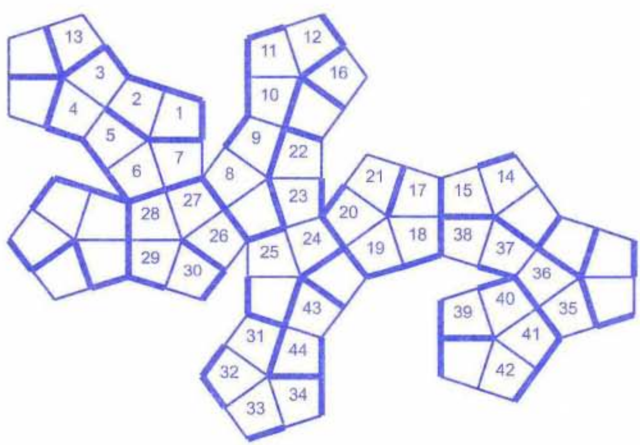
Dragoljub M. Milošević, prev. Marija Vencelj

LABIRINTI NA POLIEDRIH

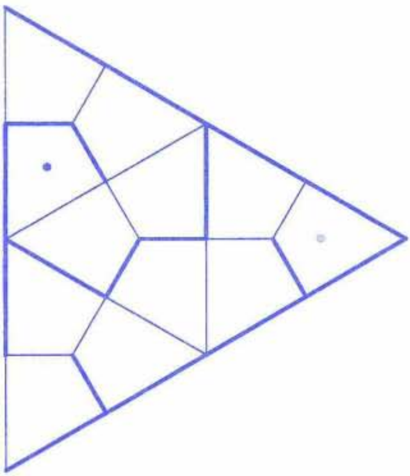
Dana je mreža geometrijskega telesa, katerega mejne ploskve so še dodatno razdeljene na manjše dele. Povezati moramo črno in sivo točko na telesu. Pri tem lahko iz enega dela preidemo na sosednji del, če med njima ni pregrade, ki je na sliki označena z debelo črto.

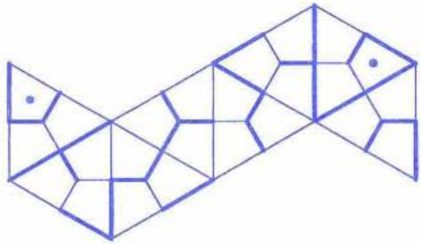
Predstavljamo vam primer labirinta na mreži dodekaedra in njegovo rešitev:

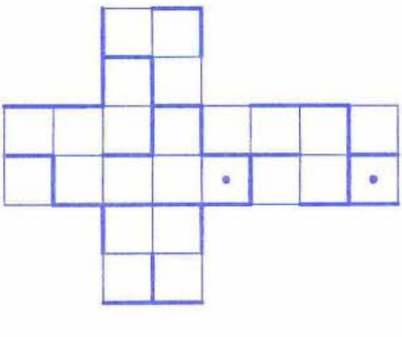


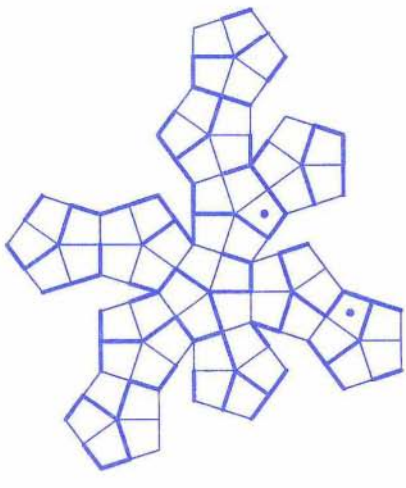


Sami pa rešite naslednje štiri labirinte (na tetraedru, oktaedru, kocki in še enega na dodekaedru).









Izidor Hafner

ZANIMIVA NAPAKA

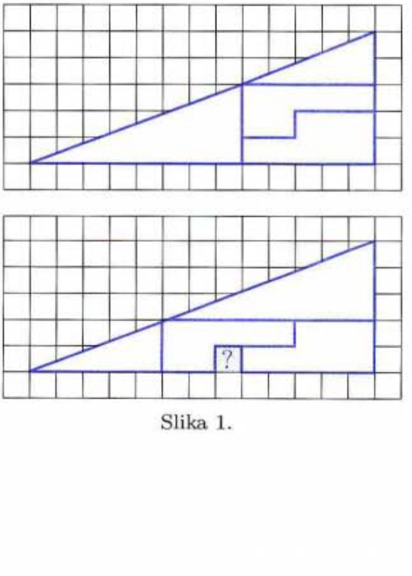
V prispevku *Obdobje zanimivih datumov*, Presek **27** (1999–2000), na str. 354–355, je prišlo do zanimive napake. Bralce vabimo, da jo poiščejo. (Namig na str. 17.)

GEOMETRIJSKI RAZREZI

Geometrijski razrezi sodijo med naloge rekreativne geometrije. Navadno je podan ravninski lik ali skupina likov, ki jih moramo razrezati na manjše like tako, da lahko natanko iz vseh dobljenih kosov brez prekrivanja sestavimo drug predpisan lik ali skupino likov. Za rezultirajoči lik oziroma like je praviloma podana le oblika, saj je njihova ploščina določena z izhodnimi liki. Število razrezov prvotnih likov je lahko z zahtevami naloge natanko določeno, navzgor omejeno ali poljubno. Rezi so lahko bodisi samo ravni bodisi poljubnih oblik. Najpreprostejši primer je, če naloga dovoljuje en sam ravni prerez.

V manj zahtevnih revijah so naloge rekreativne matematike večinoma oblikovane tako, da vnaprej zagotavljajo, da rešitev obstaja. S takim privzetkom je reševanje seveda lažje, prinese pa tudi manj zadovoljstva. Ta splošna ugotovitev velja tudi za geometrijske razreze. Te vrste nalog ne zahtevajo veliko geometrijskega znanja; denimo toliko, da zmoremo preveriti, ali iz danega lika sploh lahko naredimo iskanega. Ne glede na to, ali sestavljalcu naloge verjamemo, da je naloga rešljiva, ali ne, je tak preverek lahko koristen. Pogosto nam pokaže pot do rešitve naloge.

Po drugi strani se na rešitve, dobljene 'na oko', ne smemo zanesti. Lahko, da smo sestavili nekaj, kar je le blizu iskanemu liku. Ena od različic sicer zelo znanega 'protislovnega' primera, dobljenega 'na oko', je na sliki 1. Pravokotni trikotnik s katetama 5 in 13 enot smo razrezali na štiri kose, jih nekoliko drugače zložili in spet dobili pravokotni trikotnik s katetama 5 in 13, v katerem manjka ena kvadratna enota. Le od kod se je luknja vzela?



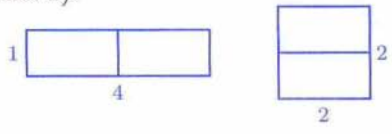
Slika 1.

Področje geometrijskih razrezov ima dolgo zgodovino. Tako npr. razni razrezi kvadrata, taki, da lahko iz dobljenih kosov sestavimo dva nova kvadrata, dajejo številne dokaze Pitagorovega izreka.

Kako transformirati kvadrat v pravilni petkotnik in pravilni šestkotnik, je bilo znano na začetku 19. stoletja.

Že v stoletju prej pa je francoski matematik Montuca (1747–1799) precej temeljito opisal transformacije pravokotnika v kvadrat. Na tem področju so raziskovali še Američan Sam Loyd (1844–1911), Anglež Dudeney (1847–1930) in Avstralec Lindgren. Nekaj njihovih rezultatov si bomo ogledali v tem sestavku.

1. Najenostavnejši primer je pretvorba pravokotnika 4×1 (s stranicama 4 enote in 1 enota) v kvadrat. Gre z enim samim ravnim prerezom pravokotnika (slika 2).



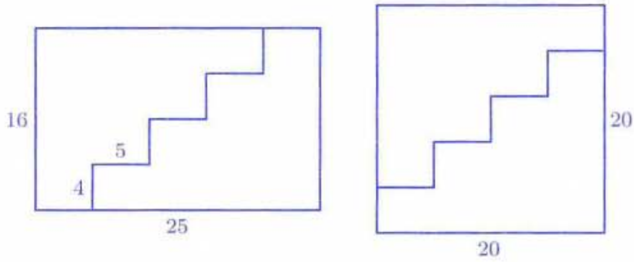
Slika 2.

Če razmerje stranic pravokotnika ni natanko $4 : 1$, z enim samim ravnim prerezom naloge očitno ne moremo rešiti.

2. Nekatere druge pravokotnike lahko z enim samim prerezom razbijemo na dva dela in iz njiju sestavimo kvadrat, če se odpovemo zahtevi, da je rez raven. Če ima npr. pravokotnik stranici v razmerju $(n+1)^2 : n^2$, kjer je n naravno število, lahko uporabimo *stopnično tehniko*. Če vzamemo, da merita stranici $(n+1)^2$ in n^2 enot, mora imeti končni kvadrat stranico dolžine $n(n+1)$ enot. Ker je

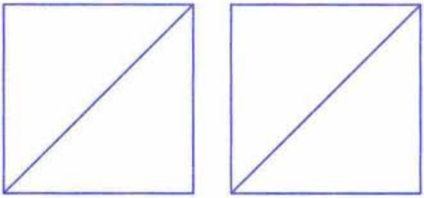
$$n(n+1) = (n+1)^2 - (n+1) \quad \text{in} \quad n(n+1) = n^2 + n\,,$$

moramo daljšo stranico pravokotnika skrajšati za $n+1$ in krajšo povečati za n. To dosežemo tako, da pravokotnik prerežemo z rezom iz n stopnic z dimenzijama $n+1$ in n in dobljena kosa vzdolž reza medsebojno zamaknemo za eno stopnico. Na sliki 3 je prikazan primer za $n = 4$, to je, preoblikovanje pravokotnika 25×16 v kvadrat 20×20. Podobno potekajo pretvobe $9 \times 4 \to 6 \times 6$, $16 \times 9 \to 12 \times 12$, $36 \times 25 \to 30 \times 30$ itd.



Slika 3.

Za $n = 1$ je razmerje $(n+1)^2 : n^2$ enako 4. To je največje možno razmerje te oblike. Stopnici sta široki 2 enoti in visoki 1 enoto. Gre torej za primer ravnega reza na sliki 2.
Če n narašča, se število stopnic veča, velikost stopnic pa se glede na velikost pravokotnikovih stranic manjša. Tudi razmerje $(n+1)^2 : n^2$ se z naraščajočim n manjša in se približuje 1, ko gre n v neskončno. V mejnem primeru je začetni pravokotnik kvadrat, višina stopnice je enaka 0, ustrezni rez pa kar diagonala kvadrata (slika 4).

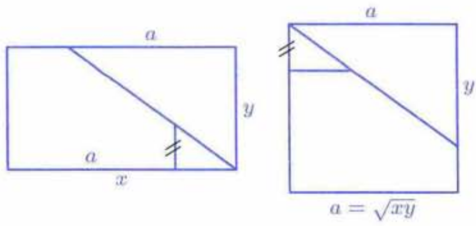


Slika 4.

3. Z razrezi na tri ali več kosov lahko rešimo nalogo, če sta stranici pravokotnika v razmerju, ki je večje kot 4, ali če je razmerje manjše od 4 in različno od $\frac{(n+1)^2}{n^2}$, kjer je $n \in \mathbb{N}$.

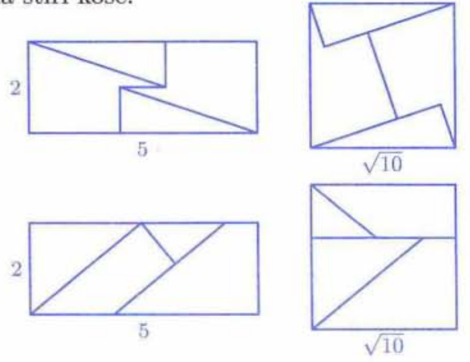
Če je razmerje stranic pravokotnika $x : y \neq \frac{(n+1)^2}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$, in je $\frac{x}{y} < 4$, lahko rešimo nalogo z razrezom pravokotnika na tri kose, kot kaže slika 5.[1] S slike je očitno, da je razrez dober, če je kvadratova stranica a večja od polovice daljše izmed pravokotnikovih stranic. Ta pogoj je vedno izpolnjen, saj je $a = \sqrt{xy} > \sqrt{4x^2} = 2x$.

[1] Dolžino kvadratove stranice $a = \sqrt{xy}$ lahko natančno konstruiramo s šestilom in ravnilom iz pravokotnikovih stranic x in y z uporabo višinskega ali Evklidovega izreka v pravokotnem trikotniku.



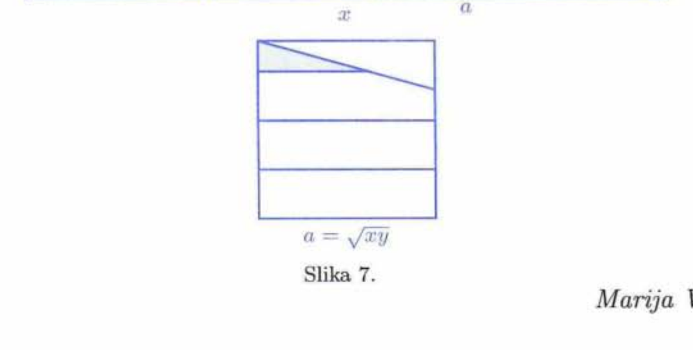
Slika 5.

Seveda lahko rešimo nalogo tudi z razrezom na več kosov. Slika 6 prikazuje dve različni pretvorbi pravokotnika 5×2 v kvadrat $\sqrt{10} \times \sqrt{10}$ z razrezom na štiri kose.



Slika 6.

Naloge za $\frac{x}{y} > 4$ z razrezom pravokotnika le na tri kose ne moremo rešiti. Potrebnih je več kosov. Odvisnost njihovega števila od razmerja dolžin pravokotnikovih stranic lahko ugotovite s pomočjo slike 7.



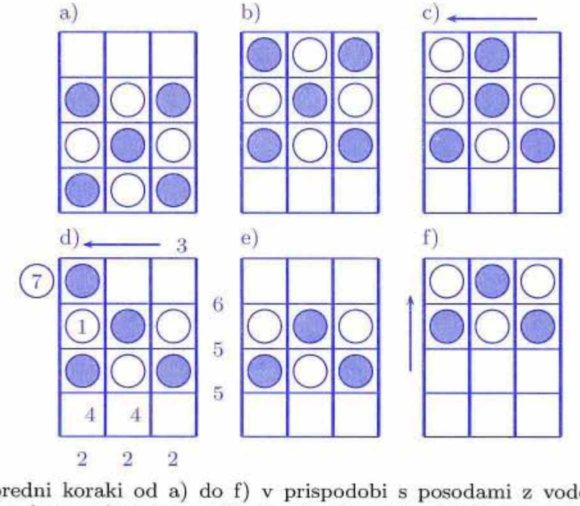
Slika 7.

Marija Vencelj

POLPREVODNIŠKA SLIKOVNA NAPRAVA

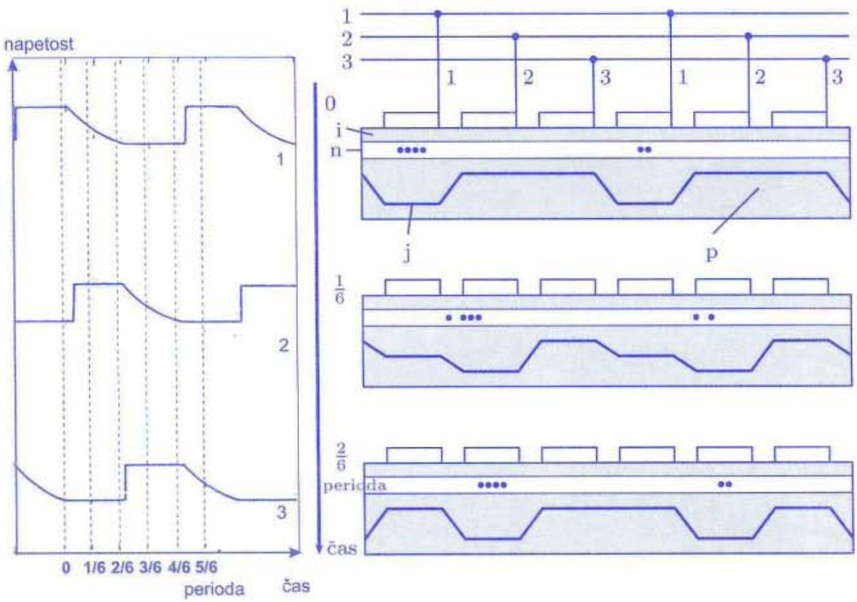
V zadnji številki prejšnjega letnika Preseka smo okvirno pojasnili delovanje nekaterih polprevodniških elementov. *Polprevodniška slikovna naprava* ne bo tako močno vplivala na naše življenje, kot je tranzistor. Vseeno pa je dovolj značilna za polprevodniško elektroniko in prinaša dovolj novosti, da ji je vredno nakloniti poseben zapis.

Začnimo s preprosto prispodobo. Mislimo si, da bi radi ugotovili, koliko vode dobijo pri namakanju s škropljenjem deli polja. Po polju razpostavimo mrežo enakih posod in za določen čas vključimo škropljenje. Nato poženemo tekoče trakove, ki pomikajo posode. Trakovi se ubrano gibljejo od nas (in se vračajo v smeri proti nam). Na njih so posode urejene v vrste (slika 1). Na oddaljenem robu prevzame posode tekoči trak, ki se pomika z desne na levo. Na levem robu tega traku je tehtnica, s katero stehtamo posodo za posodo. Potem ko zapored stehtamo posode s traku, ki potuje proti levi, se trakovi z vrstami posod pomaknejo za en korak, da vrhnji trak proti levi prevzame posode iz naslednje vrste. Postopek ponavljamo, dokler ne stehtamo vseh posod. Začetno lego posode določimo po tem, kdaj posoda pride na vrsto za tehtanje. Nazadnje se posode vrnejo v svoje začetne lege, spet za določen čas vključimo škropljenje in postopek ponovimo.



Slika 1. Zaporedni koraki od a) do f) v prispodobi s posodami z vodo na tekočih trakovih: 1 posoda z vodo ustreza slikovnemu elementu, 2 tekoči trakovi v smeri od nas, kanali, 3 vodoravni tekoči trak, register, 4 zapora, 5 vrata, 6 prehodna vrata, 7 tehtanje vode, ojačevalnik za merjenje naboja. Prispodobo sta uporabila Jerome Kristian in Morley Blouke leta 1982 v članku v reviji Scientific American.

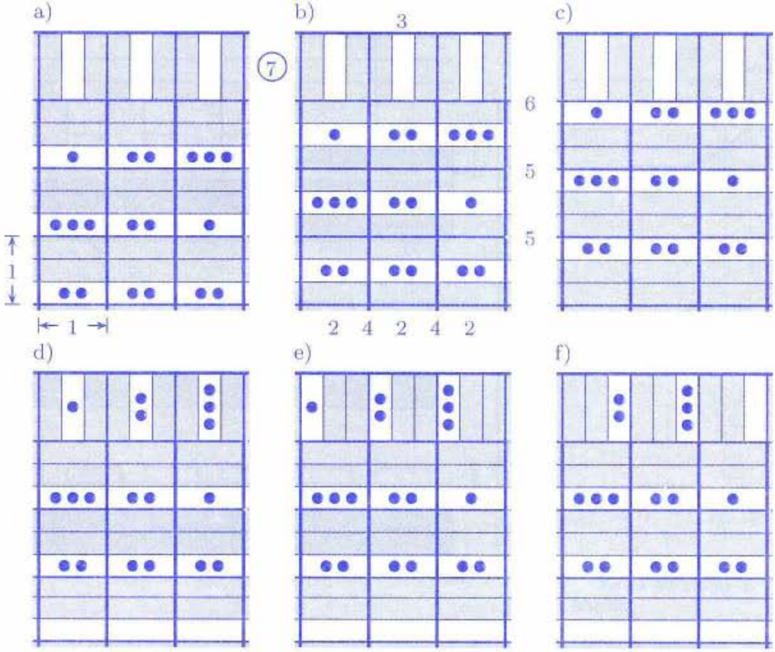
Zdaj preidimo k silicijevi ploščici in jo osvetlimo. Vodi v zraku ustreza svetloba in njenim kapljicam obroki energije, *fotoni*. Fotoni povzročijo, da se v ploščici sprostijo nosilci naboja enega znaka. Njihovo število ali njihov naboj ustreza masi vode v posodi. Z zbranim nabojem ravnamo podobno, kot smo ravnali v prispodobi z vodo v posodah. Posodi v začetni legi ustreza *slikovni element*, *pixel*. Slikovne elemente določajo elektrode, *vrata*, ki po ploščici potekajo od leve proti desni. V tej smeri so slikovni elementi urejeni v vrste. V smeri od nas slikovni elementi sestavljajo stolpce, *kanale*. Kanal od levega in desnega soseda loči *zapora*, ki preprečuje, da bi naboj odtekel levo ali desno. Naboje vrst korak za korakom pomaknemo v bolj oddaljeno vrsto, kar smo v prispodobi dosegli s tekočimi trakovi, ki so se gibali od nas. Nato v vrhnji vrsti pomaknemo naboje proti levi in jih na levem robu v ojačevalniku drugega za drugim izmerimo. Vrsta, ki ustreza tekočemu traku proti levi, *register*, je že zunaj slikovnega dela ploščice za izolirnim delom ali *prehodnimi vrati*.



Slika 2. Skupine elektronov po silicijevi ploščici pomikamo s sklopitvijo nabojev tako, da uravnavamo zunanje električne napetosti vrat proti osnovi ploščice. Leva risba kaže časovno odvisnost napetosti na treh skupinah vrat 1, 2, 3 proti osnovi ploščice. Desna risba kaže shematično razporeditev vrat na ploščici, plast silicijevega dioksida kot izolatorja i, tanko območje n in osnovo p. Vrisan je še krajevni potek potencialne energije elektrona s potencialnimi jamami j, v katerih se zberejo prevodniški elektroni. Od zgoraj navzdol si sledijo trenutki v časovnih razmikih po šestinah periode.

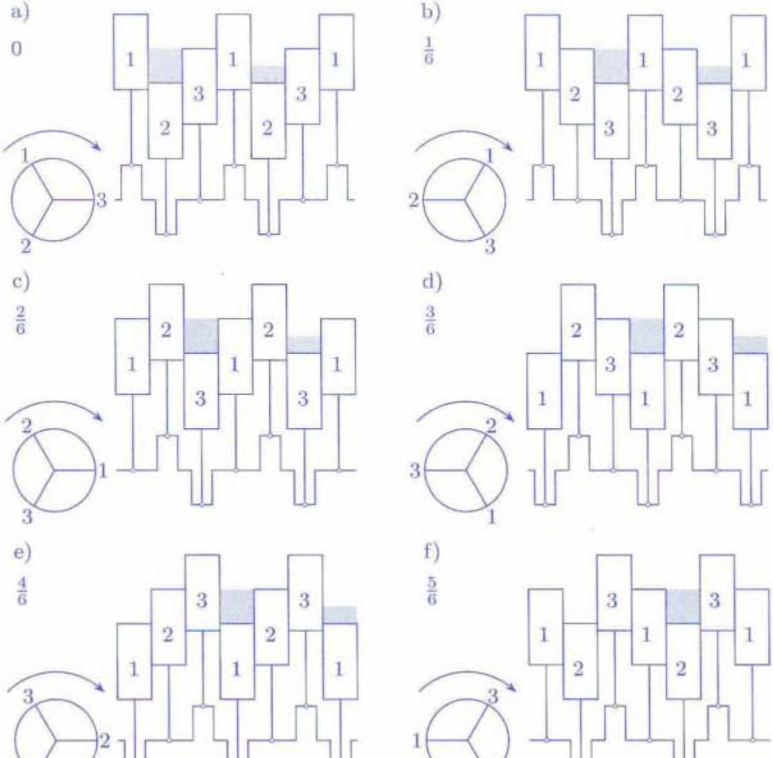
Potem ko drugega za drugim izmerimo naboje v registru, vrste nabojev pomaknemo za en korak, da register prevzame naboje iz naslednje vrste. Postopek ponavljamo, dokler ne izmerimo vseh nabojev. Iz katerega slikovnega elementa izvira kak naboj, določimo po tem, kdaj pride na vrsto pri merjenju. Potem ko poskrbimo, da v ploščici ni več nabojev, vse skupaj začnemo znova. Za določen čas vključimo osvetlitev in tako dalje.

Naboj iz slikovnega elementa v sosednji element pomaknemo v želeni smeri s postopkom, ki mu pravimo *sklopitev nabojev*. Zato polprevodniško slikovno napravo imenujemo *naprava na sklopitev nabojev*, *charge-coupled device*, CCD. Preden se lotimo sklopitve, povejmo nekaj o naboju, ki ga sprosti svetloba. Osnova silicijeve ploščice je polprevodnik p, v katerem so vrzeli večinski nosilci naboja. Nad njo je območje n, ki skupaj z osnovo sestavlja diodo. Svetloba v območju n izbije elektron iz valenčnega pasu in nastaneta prevodniški elektron in vrzel. Vrzel odtava na območje



Slika 3. Slikovni element in element registra imata po tri dele, tako da je bila prispodoba na sliki 1 preveč poenostavljena: 1 slikovni element, 2 kanali, 3 register, 4 zapora, 5 vrata, 6 prehodna vrata, 7 ojačevalnik za merjenje naboja. Svetlo so nakazani deli slikovnih elementov z nizko potencialno energijo, to je potencialne jame, osenčeno pa deli z visoko potencialno energijo, to je ograde. Prevodniški elektroni se zberejo v potencialnih jamah, ki s časom spreminjajo svojo lego.

p in ne sodeluje pri pojavih, ki nas zanimajo in v katerih izkoristimo le prevodniške elektrone. Pomembno je, da par ne nastane blizu površine, ker bi se lahko elektroni vezali nanjo. Kjer je svetlobni tok gostejši in pade na površinsko enoto več fotonov, se nabere več elektronov. Od daleč spominja pojav na *fotoefekt*, pri katerem kratkovalovna svetloba izbija prevodniške elektrone iz kovine. "Fotoefekt" v polprevodniku ima svoje posebnosti, denimo to, da je za sprostitev elektrona potrebna v povprečju manjša energija kot pri fotoefektu v kovini.

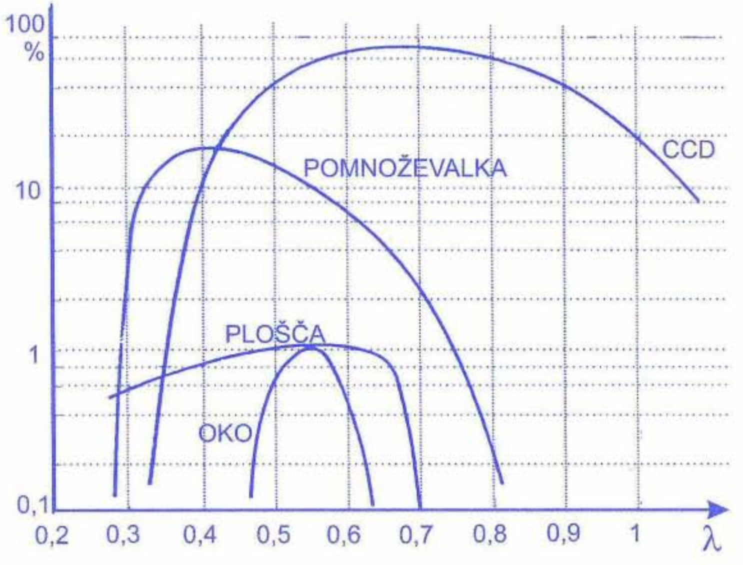


Slika 4. Pomikanje skupin elektronov v slikovnih elementih kanalov in registra s sklopitvijo nabojev ponazorimo s prispodobo. Ojnica premika bate v povezanih valjih, tako da se tekočina pomika proti desni, če kolo na ojnici vrtimo kot desni vijak. Od risbe do risbe zasučemo kolo za 60°, to je za šestino periode. Tekočina v valjih se pomika proti desni, ko kolo vrtimo tako, kot se vrti desni vijak. Vrtenju kolesa ustreza nihajoča napetost in njen nihajni čas seže navzdol do stomilijonine sekunde. Risbi f) sledi zopet a). Prispodobo je uporabil Gilbert Amelio v članku v Scientific American leta 1974.

Elektron, ki se sprosti v območju n, se ujame v bližnjo *potencialno jamo*. To je območje z nizko potencialno energijo, ki ga ustvarimo z napetostjo na vratih, to je na elektrodah, proti osnovi ploščice. Elektron ima negativni naboj, tako da je potencialna energija nizka na območju, na katerem je napetost proti osnovi ploščice pozitivna. Vsak slikovni element je v smeri pomikanja naboja z elektrodami, ki smo jih imenovali vrata, razdeljen na tri dele. V dveh je potencialna energija elektrona visoka in ti delujeta kot ograji, v tretjem pa je nizka, in ta deluje kot potencialna jama (slika 2). V tem pogledu je bila prispodoba s posodami nekoliko preveč poenostavljena (slika 3). Z uravnavanjem napetosti na elektrodah pomikamo zbrane elektrone v korakih v želeni smeri. To je *trifazni način delovanja* naprave. Tudi pri tem pride prav prispodoba. Mislimo na trojice povezanih batov v večji skupini, ki jih poganjamo s kolesom na ojnici (slika 4).

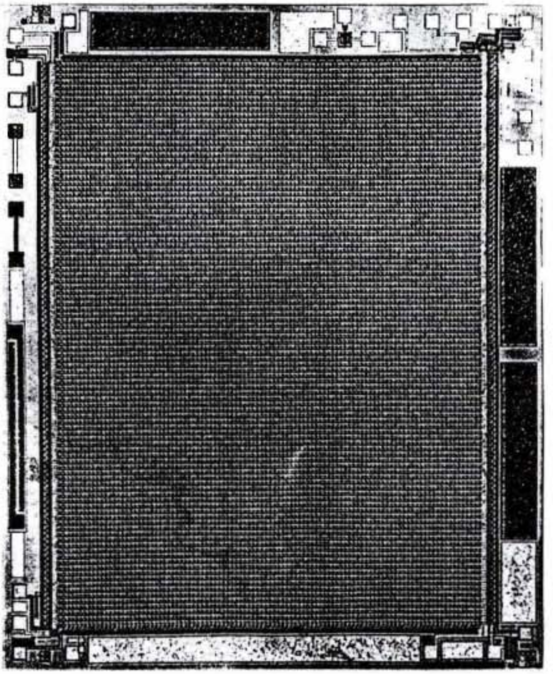
Izdelava slikovnih naprav je dokaj zapletena. Polprevodniku v talini dodajo primes trivalentnega elementa in vzgojijo velike kristale silicija s premerom več kot deset centimetrov. Iz tega območja p z zmernim električnim uporom izrežejo tanko ploščico, iz katere izdelajo več slikovnih naprav. Najprej naredijo ograde kanalov, tako da v 5 μm širokih vzporednih območjih v silicijevo kristalno mrežo vgradijo atome trivalentnega bora. (1 μm je milijonina metra ali tisočina milimetra.) Ploščico prej prevlečejo s plastjo za svetlobo občutljive snovi in jo osvetlijo skozi "masko", tako da ta območja niso osvetljena, območja med njimi pa so. Na območjih med ogradami svetloba polimerizira snov, da se pozneje v topilu ne raztopi. Na območjih ograd pa se neosvetljena snov v topilu raztopi. Na teh območjih dosežejo, da se v silicijevo kristalno mrežo vgradijo atomi bora, in območja še prevlečejo z 1 μm debelo plastjo silicijevega dioksida. Postopek s snovjo, ki je občutljiva za svetlobo, in topilom, jedkanje, pri katerem na določenih območjih odstranijo silicijev dioksid, in druge postopke večkrat ponovijo. V enem od njih naredijo kanale s tem, da na območjih med ogradami v silicijevo kristalno mrežo vgradijo atome petvalentnega fosfora. Njihova gostota preseže gostoto prvotne trivalentne primesi in nastane 0,2 do 0,3 μm debelo območje n. Na površini ploščice ustvarijo 0,12 μm debelo plast silicijevega dioksida kot izolacijsko podlago za elektrode. Elektrode položijo drugo za drugo v treh med seboj izoliranih, po 0,5 μm debelih plasteh iz polikristalnega silicija. Tega sestavljajo drobni kristalčki, usmerjeni v vse mogoče smeri (medtem ko je ploščica iz enega samega velikega kristala). V polikristalni silicij vgradijo precej atomov fosfora, tako da dobro prevaja. Nazadnje naparijo na nekatere dele ploščice plasti aluminija, ki delujejo kot elektrode. Prej na določenih delih odjedkajo silicijev dioksid, da aluminij dobi stik s polikristalnimi elektrodami. Na aluminijeve elektrode priključijo zunanje vodnike.

Opisane slikovne naprave imajo pred sorodnimi napravami več prednosti. V *fotopomnoževalki*, ki izkorišča fotoefekt na tanki kovinski katodi v vakuumu, je treba v povprečju pet ali več fotonov, da se sprosti en elektron, v slikovni napravi pa pet fotonov sprosti celo štiri elektrone. V fotografski plošči in očesu zaznamo kvečjemu vsak deseti foton (slika 5).



Slika 5. *Kvantni izkoristek* slikovne naprave in fotopomnoževalke v odvisnosti od valovne dolžine svetlobe. Kvantni izkoristek je razmerje med številom izbitih eletronov in številom fotonov v vpadni svetlobi z določeno valovno dolžino. Kvantni izkoristek 10 % pomeni, da v povprečju vsak deseti foton izbije elektron. Kvantni izkoristek očesa in tudi fotografske plošče ocenimo posredno. Na navpično os je nanesen kvantni izkoristek v odstotkih, na vodoravno pa valovna dolžina v mikrometrih, 1 μm = = 1000 nm.

Slikovna naprava je potemtakem veliko bolj občutljiva od vseh drugih merilnikov. Rezultat, ki ga da slikovna naprava, je sorazmeren z gostoto svetlobnega toka, kar za fotografsko ploščo ne velja. S slikovno napravo je mogoče na sliki hkrati zaznati močan in veliko šibkejši izvir. Vrhu tega je mogoče podatke iz slikovne naprave neposredno voditi na računalnik, jih obdelati, shraniti in zopet priklicati. Ne gre pozabito še na eno pomembno prednost pred fotografsko ploščo. Astronomi so kdaj po noči opazovanj pri razvijanju neprijetno presenečeni ugotovili, da iz tega ali onega razloga slike na ploščah niso bile uporabne. Pri slikovni napravi pa lahko sproti presodijo, ali so podatki uporabni in ustrezno ukrepajo.



Slika 6. Polprevodniška slikovna naprava družbe za kamere in merilnike Fairchild iz leta 1973 s 100 krat 100 slikovnimi elementi. Napravo z velikostjo 3 mm krat 4 mm so izdelali v raziskovalne namene za televizijsko slikovno kamero. Mimogrede omenimo še lastnosti slabih deset let mlajše naprave družbe Texas Instruments z 800 krat 800 slikovnih elementov: slikovni element je kvadrat s stranico 15 μm, slikovni del naprave kvadrat s stranico 12,2 mm in naprava v celoti kvadrat s stranico 17,8 mm. V taki napravi se naboj iz najbolj oddaljenega slikovnega elementa pomakne 4800-krat, v obeh pravokotnih smereh po $3 \cdot 800$. Da ne bi izgubili več kot desetine sproščenih elektronov, pri vsaki premestitvi ne smemo izgubiti več kot dva elektrona na sto tisoč.

V slikovni napravi moti termično gibanje, zaradi katerega se po naključju kdaj nabere več elektronov, kdaj manj. Ta vpliv zmanjšajo tako, da napravo hladijo, če je potrebno, električno ali celo s tekočim zrakom. Silicij slabo prepušča vijolično in ultravijolično svetlobo. Če želijo zaznati tudi to svetlobo, osnovo silicijevega kristala stanjšajo in napravo osvetlijo od spodaj, ne od zgoraj. Slikovna naprava pa za fotografsko ploščo zaostaja v dveh pogledih. Fotografske plošče so lahko več desetkrat večje. Poleg tega so zrnca v njih, ki počrnijo, veliko manjša kot slikovni elementi in jih veliko več pride na kvadratni centimeter.

Polprevodniško napravo sta si leta 1969 zamislila George Smith in Willard Boyle v laboratorijih ameriške družbe Bell in za to leta 1999 dobila nagrado ameriškega inštituta elektriških in elektronskih inženirjev. Sprva sta želela izdelati elektronsko vzporednico magnetnega pomnilnika za računalnik. Kmalu pa so ugotovili, da se naprava veliko bolje izkaže pri sprejemanju slik in jo danes uporabljajo le v ta namen. Leta 1973 so izdelali prvo napravo z deset tisoč slikovnimi elementi (slika 6). Istega leta so v ameriškem vesoljskem uradu NASA in v nekaterih računalniških družbah pomislili na prednosti naprave v astronomiji. V naslednjih letih so postopno izdelali vse večje naprave. Današnje navadno sestavlja po 2048 krat 2084 slikovnih elementov, le izjemoma več. Največ jih uporabljajo v astronomiji, v kateri omogočijo, da z manjšimi astronomskimi daljnogledi dobijo slike, kot jih je bilo s fotografskimi ploščami mogoče dobiti le z največjimi, ali z enakimi daljnogledi slike v veliko krajšem času. Potrebna pa je zahtevna računalniška oprema, strojna in programska (slika na naslovni strani). Polprevodniške slikovne naprave uporabljajo za opazovanje vesoljskih teles na umetnih satelitih, na primer na vesoljskem daljnogledu Hubble. Uporabljajo jih tudi v televizijskih snemalnih kamerah in v digitalnih fotografskih aparatih, ki že tekmujejo s fotografskimi aparati na film.

Janez Strnad

ZANIMIVA NAPAKA – Namig

V prispevku trdimo, da je bil zadnji popolnoma lihi datum 31.11.1999 in da bo naslednji datum s to lastnostjo 1.1.3111. (Rešitev na str. 28).

RIMSKE ŠTEVILKE

Verjetno ste se že vsi srečali z rimskimi številkami. Čeprav v Evropi že vsaj pol tisočletja za zapis števil v glavnem uporabljamo arabske števke, rimske števke srečamo še danes. Tako so z njimi označeni taroki, pogosto jih vidimo na številčnicah ur, kralji so običajno "oštevilčeni" z rimskimi številkami (Ludvik `XIV`), prav tako Intel označuje različice svojega procesorja Pentium z rimskimi številkami. Tudi večina filmov ima letnico nastanka zapisano z njimi.

Oglejmo si torej nekaj znanih in morda manj znanih dejstev o rimskih številkah.

Najbolj pogosto za zapis števil uporabljamo 7 znakov:

I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1000

S pomočjo kombiniranja teh znakov pridemo do zapisa drugih števil. V najbolj enostavni obliki jih le nizamo drugega ob drugega in seštevamo njihove vrednosti. Tako velja:

II	2
VIII	8
XXX	30
CCXXII	222

Pri tem moramo na vsakem koraku zapisa vedno uporabiti največjo možno vrednost. Tako 15 predstavimo z `XV` in ne na primer z `VVV` ali `XIIIII`. Iz tega sledi, da gredo v zapisu z leve na desno rimske števke vedno od največje proti najmanjši.

Pretvarjanje rimskih števil v nam bolj običajni zapis je enostavno. Vsak simbol nadomestimo z njegovo vrednostjo in vrednosti seštejemo:

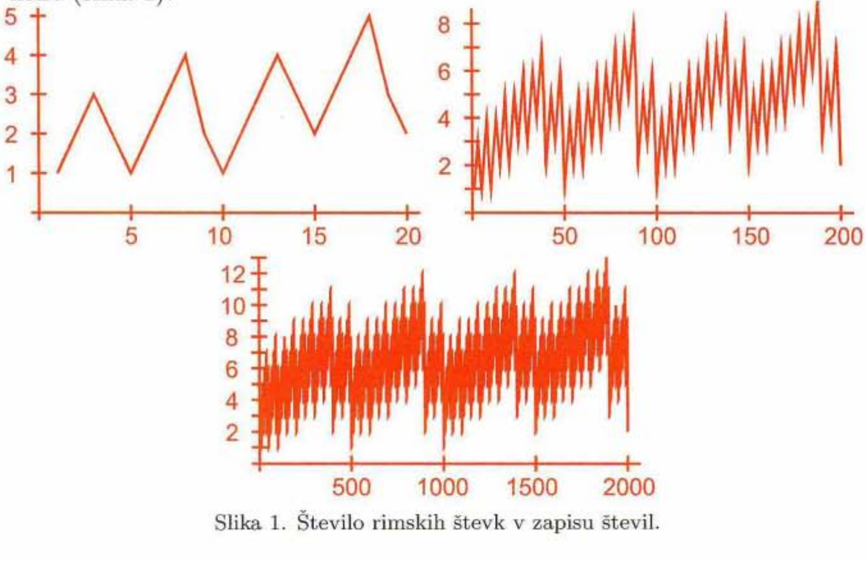
XXVI:	$10 + 10 + 5 + 1 = 26$
CVI:	$100 + 5 + 1 = 106$
CCLXVII:	$100 + 100 + 50 + 10 + 5 + 1 + 1 = 267$
MMMCCLXXXI:	$1000 + 1000 + 1000 + 100 + 100 + 50 +$ $+ 10 + 10 + 10 + 1 = 3281$

Kljub pravilu, da moramo vedno uporabiti največji možni simbol, bi bil zapis določenih števil še vedno lahko precej dolg. Tako bi z uporabo tega pravila število 499 zapisali kot `CCCCLXXXXVIIII`. Zato so Rimljani uporabljali še eno pravilo: črka z manjšo vrednostjo, zapisana levo od večje, pomeni, da od večje vrednosti manjšo vrednost odštejemo. Tako 9 po rimsko zapišemo kot `IX`, kar je 10 minus 1, in ne kot `VIIII`; 29 zapišemo kot `XXIX` in 44 kot `XLIV`.

Mislili bi si, da bi število 499 lahko zapisali kot `ID`, a ga ne smemo. Pri zapisu z odštevanjem se moramo namreč držati še treh pravil:

- Za odštevanje lahko uporabljamo le `I`, `X` in `C`. `V`, `L` in `D` na ta način ne moremo uporabiti, kot seveda tudi `M` ne, saj je to znak z največjo vrednostjo. Tako števila 45 ni dovoljeno zapisati kot `VL`; pravilno 45 zapišemo kot `XLV`.
- Levo lahko postavimo le eno manjše število; tako 19 zapišemo z `XIX`, 18 pa ne moremo kot `XIIX`. Pravilo je logično, saj bi si zapis `XIIX` lahko razlagali bodisi kot $10 - 2 + 10$ bodisi kot $11 + 9$.
- Število, ki ga odštejemo, ne sme biti manjše kot desetina vrednosti števila, ki ga zmanjšujemo: tako `I` lahko postavimo levo pred `V` in `X`, ne moremo pa ga postaviti levo od `L`, `C`, `D` in `M`. Zato je 499 `CDXCIX` in ne `ID`.

Zanimivo je, če pogledamo, koliko znakov potrebujemo za zapis števila z rimskimi številkami. Za $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ potrebujemo $1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 2, 1, 2, 3, 4, \ldots$ znakov. Če vse skupaj narišemo, dobimo zanimive grafikone (slika 1).



Slika 1. Število rimskih števk v zapisu števil.

Vendar vseh pravil za zapis rimskih števil niso vedno upoštevali. Tako je npr. na znamenitem rimskem Koloseju vhod številka 29 označen kot `XXVIIII`, vhod 54 pa kot `LIIII`, zanimivo pa je, da so pri oznakah vhodov od 40 do 49 uporabili zapis `XL`. Tako je vhod številka 44 označen z `XLIIII`.

Kaže torej, da so pravila, kdaj uporabljati odštevanje in kdaj ne, prepuščena trenutnemu "navdihu" uporabnika. Na neki rimski cerkvi je vidna označba `MCCCCCCVI` za 1606 in ne `MDCVI`, kot bi pričakovali.

V Vatikanskem muzeju so tako imenovane Borgijske sobane označene z rimskimi številkami. Toda za sobo številka 39 pride soba `XXXX`, potem `XXXXI` in tako naprej. Prav tako je na številčnicah ur 4 praviloma zapisana kot `IIII` in ne kot `IV`, a na znamenitem Big Benu v Londonu je označba `IV`. Zapisana je z malimi črkami, torej kot `iv` (za natančne – uporabljena je gotica). Tudi `x` pogosto srečamo v "mali" različici – ne pa ostalih črk. `L`, `D` in `M` so vedno zapisane kot velike črke. V srednjeveških tekstih so rimska števila pogosto zapisovali z malimi črkami. Pri tem se namesto `v` pogosto pojavi `u`, zadnji `i` pa je zamenjan z `j`. Tako je npr. 18 zapisano kot `xuiij`.

Poleg uporabe malih črk za `I`, `V` in `X` pa srečamo še drugačne zapise. Tako je `D` včasih predstavljen kot `I`, ki mu sledi obrnjeni `C`: `Ↄ`. Torej bo zapis za 500 (`D`) tudi `IↃ`. Prav tako je `M` pogosto predstavljen kot `C`, ki mu sledi `I` in obrnjeni `C` – `CIↃ`. Tak zapis izhaja iz tega, ker je bilo tisoč prvotno predstavljeno z grško črko fi (Φ), ki so jo najlaže vklesali v kamen na prej opisan način, 500 pa je pač polovica od tisoč. Iz takega zapisa izhaja tudi način, kako zapisati velika števila. Tako je `CIↃ` tisoč, `CCIↃↃ` 10000 in `CCCIↃↃↃ` 100000. Zanimivo je tudi, da srečamo zapis `IↃↃ`, ki je pomenil 5000 – polovico od 10000.

Drugi način zapisa velikih števil je, da nad števili uporabimo vodoravno črto. To pomeni, da moramo število pomnožiti s 1000. Za izražanje še večjih števil števke damo v pravokotnik, ki mu spodnja stranica manjka. Takrat moramo vrednost množiti s 100000. Tako je

$\overline{\mathtt{V}}$ – 5000

$\overline{\mathtt{X}}$ – 10000

$\overline{\mathtt{V}}\mathtt{DXLV}$ – 5545

$\overline{\mathtt{X}}\mathtt{MCXI}$ – 11111

$\overline{\mathtt{M}}$ – 1000000

$\overline{\mathtt{MMMDCCCL}}\mathtt{MMCDXXIX}$ – 3852429

$\left|\overline{\mathtt{MDCLI}}\right|\overline{\mathtt{LXXVIII}}\mathtt{CCCXV}$ – 165178316

Poleg teh 7 osnovnih znakov (mimogrede, Rimljani znaka za 0 niso poznali), so bili v rabi tudi drugi simboli. Danes jih praktično ne uporabljamo, srečamo pa jih še v starih srednjeveških tekstih.

F	–	40
R	–	80
S	–	90
Y	–	150
T	–	160
H	–	200
E	–	250
B	–	300
G	–	400
Q	–	500
N	–	900
Z	–	2000

In kako računamo z rimskimi števili? Določeni računi, predvsem pri seštevanju in odštevanju, so enostavni. Tudi množiti se da še kolikor toliko hitro. Deljenje pa je običajno prava muka. Splošna metoda je enostavno ta, da delitelj zaporedoma odštevamo od deljenca in pri tem pridno beležimo, kolikorat smo to že naredili. Si predstavljate, kako je, ko delimo MMXLXVII z XIX?

Oglejmo si nekaj računov z rimskimi številkami. Seštevamo tako, da združimo oba zapisa, ju uredimo in potem odvečne znake nadomestimo:

$$\mathtt{CXXI} + \mathtt{CXII} = \mathtt{CXXICXII} = \mathtt{CCXXXIII}$$

$$\mathtt{XVI} + \mathtt{VII} = \mathtt{XVIVII} = \mathtt{XVVIII} = \mathtt{XXIII}$$

$$\mathtt{III} + \mathtt{VII} = \mathtt{IIIVII} = \mathtt{VIIIII} = \mathtt{VV} = \mathtt{X}$$

Če v računu nastopajo "negativne vrednosti", jih uničimo:

$$\mathtt{CIV} + \mathtt{VI} = \mathtt{CIVVI} = \mathtt{CVV} = \mathtt{CX}.$$

Tu smo uničili dve I, saj je bila ena negativna in druga pozitivna. Seveda moramo včasih malo bolj "telovaditi":

$$\mathtt{CXLIX} + \mathtt{CXLIX} = \mathtt{CXLIXCXLIX} = \mathtt{CCXLXLIXIX}.$$

Hm, kaj pa sedaj? Najlaže bo, če en XL nadomestimo z XXXX in IX z VIIII ter uporabimo uničenje:

$$\mathtt{CCXLXXXXIXVIIII} = \mathtt{CCLXXXXVIII} = \mathtt{CCXCVIII}.$$

Še en primer:

$$\mathtt{MCMXCVII} + \mathtt{XIV} = \mathtt{MCMXCVIIXIV} = \mathtt{MCMXCXIVVII} =$$
$$= \mathtt{MCMXCXVVI} = \mathtt{MCMXCXXI} = \mathtt{MCMCXI} = \mathtt{MMXI}$$

Ubogi rimski šolarji! Kaj pa odštevanje? Tu prvemu številu enostavno pobrišemo znake, ki nastopajo tudi v drugem:

$$\mathtt{XXIII} - \mathtt{XI} = \mathtt{XII}$$
$$\mathtt{CVIII} - \mathtt{VII} = \mathtt{CI}$$

Kaj pa, če pri tem ne porabimo vseh znakov drugega operanda?

$$\mathtt{CVII} - \mathtt{XVIII} = \mathtt{C} - \mathtt{XI}$$

Sedaj C zapišemo drugače in si "sposodimo" kak znak:

$$\mathtt{LXXXXX} - \mathtt{XI} = \mathtt{LXXXX} - \mathtt{I} = \mathtt{LXXXVIIIII} - \mathtt{I} = \mathtt{LXXXVIIII}.$$

Še preuredimo in dobimo končni rezultat:

$$\mathtt{LXXXIX}.$$

Sedaj ko obvladamo seštevanje in odštevanje, se lotimo še množenja. Množenja z I, II ali celo III se ne bomo ustrašili, le število bomo zapisali enkrat, dvakrat oziroma trikrat ter uporabili postopek združevanja kot pri seštevanju:

$$\mathtt{CXII} \times \mathtt{II} = \mathtt{CXIICXII} = \mathtt{CCXXIIII} = \mathtt{CCXXIV}$$
$$\mathtt{CXII} \times \mathtt{III} = \mathtt{CXIICXIICXII} = \mathtt{CCCXXXIIIIII} = \mathtt{CCCXXXVI}$$

Lotimo se sedaj težjega množenja. Uporabili bomo na prvi pogled čuden postopek, ki pa nas bo pripeljal do pravilnega rezultata.

$$\mathtt{XLII} \times \mathtt{LXI} = ?$$

Prvo število bomo razpolavljali, drugo pa podvajali. Pri tem bomo v primeru neparnega števila 0.5 vedno zanemarili. Tako bo 21 polovic 10, 5 polovic 2, ...

XLII	LXI
na pol	podvoji
XXI	CXXII
X	CCXLIV
V	CDLXXXVIII
II	DCCCCLXXVI
I	MDCCCCLII

Razpolavljanje in podvajanje nista zahtevni operaciji, zato priprava take tabele niti ni tako zapletena. Sedaj seštejemo tista števila v desnem stolpcu, ki ustrezajo lihim številom levo:

$$\begin{aligned} \mathtt{XXI} &\to \mathtt{CXXII} \\ \mathtt{V} &\to \mathtt{CDLXXXVIII} \\ \mathtt{I} &\to \mathtt{MDCCCCLII} \end{aligned}$$

Seštejemo torej `CXXII`, `CDLXXXVIII` in `MDCCCCLII`. Dobimo `MMDLXII`. Produkt `XLII` in `LXI` je torej `MMDLXII`. Se vam zdi, da je $42 \cdot 61 = 2562$ lažje? Poskusimo še z `CXLVII` in `LVIII`. Pri tem bomo seveda pametni in bomo razpolavljali manjše število:

LVIII	CXLVII
na pol	podvoji
XXIX	CCXCIV
XIV	DLXXXVIII
VII	MCLXXVI
III	MMCCCLII
I	MMMMDCCIV

Seštejemo `CCXCIV` + `MCLXXVI` + `MMMMDCCIV` in dobimo `MMMMMMCLXXIV`. Preverimo: `LVIII` je 58, `CXLVII` 147 in `MMMMMMCLXXIV` 6174. In ker je $58 \cdot 147 = 8526$, je očitno, da smo se nekje zmotili. Seveda, pozabili smo upoštevati še vrednost pri 3, ki je tudi liha. K `MMMMMMCLXXIV` prištejemo še `MMCCCLII` in dobimo `MMMMMMMMDXXVI`. To pa je res 8526! Se še čudite, da je rimski imperij propadel? Še domača naloga – dokažite, da postopek vedno da pravilni rezultat!

Ker o rimskih številkah že toliko vemo, verjetno ne bo težko po rimsko zapisati lanske letnice 1999, ki je zanimivejša od letošnje. Takoj naletimo na problem. Katerih pravil se bomo držali – vseh ali pa dopustimo tudi izjeme, ki so jih uporabljali Rimljani ter drugi uporabniki v zgodovini? Najenostavneje bi bilo uporabiti kar zapis `MIM`. Vendar pa so si strokovnjaki, ki se ukvarjajo z zapisi števil, edini, da tak zapis zagotovo ne bi bil nikoli uporabljen. Pravzaprav vsi znani zapisi, v katerih se uporabljajo rimske številke, kažejo na to, da je edina izjema med pravili ta, ali uporabimo odštevanje ali ne. Ker pa imamo v zapisu lanske letnice kar tri devetice, je možnosti precej. Oglejmo si jih!

1000 je pač `M`, 900 lahko zapišemo kot `CM` ali `DCCCC`, 90 kot `XC` ali `LXXXX` in 9 kot `IX` ali `VIIII`. Skupaj imamo torej osem možnih zapisov:

```
MCMXCIX
MCMXCVIIII
MCMLXXXXIX
MCMLXXXXVIIII
MDCCCCXCIX
MDCCCCXCVIIII
MDCCCCLXXXXIX
MDCCCCLXXXXVIIII
```

Vendar proučevanje starih zapisov pokaže, da kadar odštevanje ni bilo uporabljeno na vseh mestih, ni bilo uporabljeno le pri manjših vrednostih. Tako za zapis 44 lahko srečamo `XLIIII`, ne pa tudi `XXXXIV`. Zato črtajmo štiri možnosti, ki se tega pravila ne držijo. Ostanejo nam še:

```
MCMXCIX
MCMXCVIIII
MCMLXXXXVIIII
MDCCCCLXXXXVIIII
```

Kateri zapis bi uporabili vi? Strokovnjaki za rimske številke si namreč niso enotni. Nekateri trdijo, da bi Rimljani uporabili prvi zapis, drugi spet navijajo za četrtega, tretji pa za drugega. Le tretji zapis praviloma nima zagovornikov. Daleč največ zagovornikov ima prvi zapis, ki se drži vseh pravil, ki smo jih spoznali. Zato je leto 1999 po rimsko zapisano z `MCMXCIX`.

Literatura:

- `http://www.deadline.demon.co.uk/roman/front.htm`
- M. T. Roberts, D. Etherington, Bookbinding and the Conservation of Books, elektronska izdaja na `http://palimpset.stanford.edu/don/don.html`
- Geisert, Roman Numerals I to MM, Akadine Press
- `http://www.mcn.net/~jimloy/roman.html`
- `http://salesonline.com/ijams/roman01.htm`
- `http://kyla.kiruna.se/~pma/roman.html`
- `http://www.astro.virginia.edu/~eww6n/math/RomanNumeral.html`
- `http://ericr.syr.edu/Virtual/Lessons/Mathematics/Probability/PRB0006.html`

Mojca in Matija Lokar

BRAVO, SLOVENSKE MLADE MATEMATIČARKE IN MATEMATIKI!

Na 41. mednarodni matematični olimpiadi, ki je sredi letošnjega julija potekala v mestu Taejon v Južni Koreji, je slovenska ekipa dosegla največji uspeh, odkar samostojno nastopa na tem tekmovanju.

Posebno imenitno so se to pot (seveda v absolutni konkurenci) odrezala naša dekleta. Irena Majcen z gimnazije Bežigrad v Ljubljani je prejela srebrno medaljo, tretješolka Mojca Miklavec z ljubljanske Škofijske klasične gimnazije je dosegla bronasto medaljo, pohvali pa sta dobila drugošolca Aleksandra Franc s I. gimnazije v Celju in Klemen Šivic z bežigrajske gimnazije.

Vsej ekipi, posebej pa nagrajencem, iskreno čestitamo. Naše čestitke veljajo tudi vsem, ki so s svojim zavzetim delom z mladimi prispevali k temu lepemu uspehu.

Iz uredništva

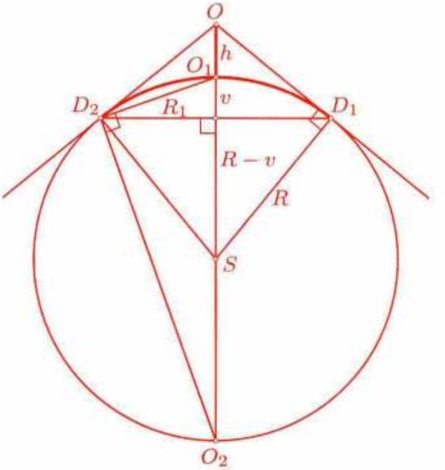
KJE VIDIMO VEČ, NA ZEMLJI ALI NA LUNI?

Vprašanje v naslovu je zastavljeno nekoliko nenatančno. Da bi nanj lahko pravilno odgovorili, bi morali pravilneje vprašati, in sicer *Kje vidimo večjo površino?* oziroma *Kje vidimo večji del površine.*

Gre torej za dve vprašanji, v celoti pa za tale problem: Na Zemlji ali pa na Luni naj bo enako visoka gora. Smo na njenem vrhu in opazujemo površino Lune oziroma Zemlje. (Tu uporabljamo izraz površina (geometrijski pojem) namesto pravilnejšega izraza površje (fizikalno–geografski pojem) zato, ker Zemljo in Luno obravnavamo kot krogli (idealizacija), kar seveda ti telesi nista.)

Zdrava pamet takoj odgovori: večjo površino vidimo na Zemlji, večji del (kos) površine (glede na celoto) pa na Luni, če vemo, da je Luna manjša od Zemlje in če seveda v obeh primerih opazujemo površino z enake višine. Zdaj pa to dokažimo.

Vzemimo veliko kroglo s polmerom R, višino gore h (h naj bo v primerjavi z R tako majhen, da je h^2 zanemarljiv) pa si predstavljajmo s kratko daljico v podaljšku polmera (slika 1). Gledamo iz opazovališča O. Naš pogled sega od O do D_1 oziroma od O do D_2, vidimo pa kapico krogle. Površina te kapice je $P_{\text{kapica}} = 2\pi Rv$, če je v višina kapice (v je tudi tako majhen glede na R, da je v^2 zanemarljiv).



Slika 1. K opazovanju krogle od blizu, to je z višine h (h dosti manjši od R) nad površino krogle.

Pri gornjih pogojih najprej iz $\triangle O_1D_2O_2$ (ob D_2 je pravi kot) izpeljemo $R_1^2 = v(2R - v) = 2vR$, nato pa iz $\triangle OD_2S$ (ob D_2 je spet pravi kot) še $R_1^2 = (v + h)(R - v) = vR + hR$. Iz enakosti $2vR = vR + hR$ sledi $v = h$. Pri majhnih vrednostih h sta h in v približno enaka.

Zdaj lahko odgovorimo na prvo vprašanje. Pri konstantni višini h, s katere gledamo, je površina, ki jo vidimo, sorazmerna s polmerom krogle R.

Polmer Lune je $\frac{1}{4}$ polmera Zemlje. Zato z enake višine na Luni vidimo 4-krat manj površine kot na Zemlji.

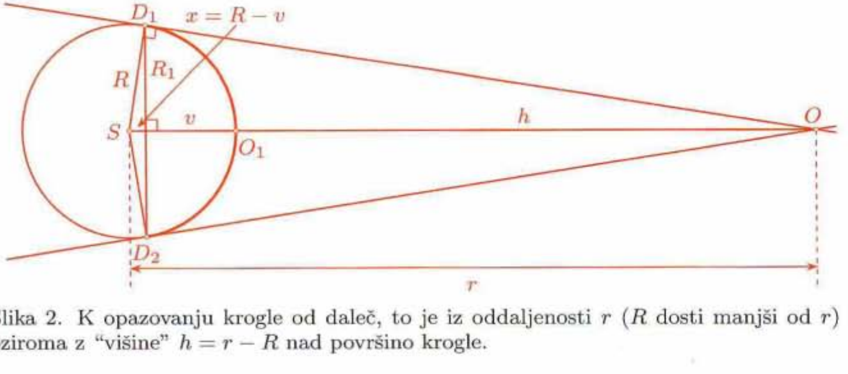
Odgovorimo še na drugo vprašanje. Vidimo tolikšen del krogle, kot pove kvocient $\frac{P_{\text{kapica}}}{P_{\text{krogla}}} = \frac{2\pi Rv}{4\pi R^2} = \frac{h}{2R}$. Pri konstantni višini h je del površine, ki ga vidimo glede na celoto, obratno sorazmeren s polmerom krogle R.

Polmer Lune je $\frac{1}{4}$ polmera Zemlje. Zato z enake višine na Luni vidimo 4-krat večji del površine kot na Zemlji.

Zdaj pa drugo vprašanje še nekoliko razširimo. Naj se opazovališče oddaljuje od krogle. Prej smo kroglo opazovali od blizu, zdaj od daleč. Polmer R krogle naj bo tako majhen glede na oddaljenost r, da R^2 lahko zanemarimo.

Vprašajmo se, kolikšen del krogle vidimo pri pogledu od daleč. Gre za primer, da je opazovališče na Zemlji, in se vprašamo, kolikšen del Lune vidimo z Zemlje (slika 2). Veliko ljudi pravi brez razmisleka, da pri opazovanju (posebno "očitno" naj bi to bilo ob polni luni ali ščipu) vidimo pol Lune. Zdrava pamet spet trmari, da to ni mogoče. Dokažimo, da ima zdrava pamet tudi tokrat prav.

Iz velike oddaljenosti, torej iz opazovališča O, vidimo tolikšen del krogle, kot pove kvocient $\frac{2\pi Rv}{4\pi R^2} = \frac{v}{2R}$ (slika 2). S te slike razberemo, da je $v = R - x$, pri čemer x izračunamo iz $\triangle OD_1S$ (ob D_1 je pravi kot). Izpeljemo $R^2 = x(r-x) = rx$ in $x = \frac{R^2}{r}$. Torej iz velike razdalje $r = |OS|$ vidimo $\frac{R-\frac{R^2}{r}}{2R} = \frac{r-R}{2r} = \frac{h}{2r}$-ti del krogle.



Slika 2. K opazovanju krogle od daleč, to je iz oddaljenosti r (R dosti manjši od r) oziroma z "višine" $h = r - R$ nad površino krogle.

Dobili smo zelo zanimiv rezultat. Če smo blizu, vidimo $\frac{h}{2R}$-ti del krogle, če smo daleč, pa vidimo $\frac{h}{2r}$-ti del krogle; $h = r - R$.

Zadnji rezultat uporabimo pri Luni. Oddaljenost Lune od Zemlje je 60 polmerov Zemlje. S površja Zemlje vidimo $\frac{59R_Z - \frac{1}{4}R_Z}{2 \cdot 59R_Z} = 49{,}8\%$ površine Lune, kar očitno ni pol Lune. (Tudi če bi vzeli za $r = 60R_Z$, bi bil rezultat enak. Pojasni.) Tolikšni del Lune seveda vidimo trenutno. V daljšem razdobju pa je vidimo več. Kolikšen del in zakaj tolikšen pa lahko preberete v članku *Lunina kimanja*, Presek **26** (1998/99), str. 26.

Da bi bilo bolj zanimivo, ob zaključku predlagam še dve preprosti vaji.

Izračunaj, kolikšen del Lune in kolikšen del Zemlje vidiš iz:
- središča razdalje Zemlja–Luna,
- točke na zveznici Zemlja–Luna, iz katere obe telesi vidiš pod enakim zornim kotom.

Rešitvi bomo objavili v naslednji številki.

Marijan Prosén

MATEMATIČNI PLAKAT

DMFA organizira za Svetovno leto matematike 2000 tekmovanje v izdelavi matematičnih plakatov. Plakati naj bi približali matematiko širši javnosti. Vabimo Vas, da sodelujete. Posterji naj bodo, če je mogoče, izdelani v elektronski obliki, lahko pa so tudi narisani na papir velikosti A3 ali A4. Tekst plakata mora biti dobro čitljiv.

Izdelke pošljite do 15. oktobra 2000 na naslov: Matija Lokar, FMF, Jadranska 19, 1000 Ljubljana, s pripisom Matematični plakat. Elektronsko oblikovane izdelke pa pripnite elektronski pošti in jo pošljite do gornjega datuma na naslov: `Matija.Lokar@fmf.uni-lj.si`

Plakate bo ocenila strokovna žirija. Rezultate bomo objavili na jesenskem občnem zboru, najboljše nagradili in jih tudi poskusili objaviti. Avtorji obdržijo vse pravice, dovolijo le, da DMFA njihove izdelke objavi na svoji spletni strani in razstavi na občnem zboru.

Rezultate podobnega evropskega tekmovanja si lahko ogledate na straneh `http://www.mat.dtu.dk/ems-gallery/index.html`

Peter Legiša

ZANIMIVA NAPAKA – Rešitev s str. 5

31.11.1999 ni zadnji popolnoma lihi datum, ker ima november samo 30 dni!

Tomaž Pisanski

STAVEK SE PREDSTAVI

Denimo, da beremo stavek, ki se glasi: "V tem stavku se pojavi a štiriintridesetkrat, b enkrat, c enkrat, č enkrat, d trinajstkrat, e sedemintridesetkrat, f enkrat, g enkrat, h enkrat, i dvajsetkrat, j sedemkrat, k sedemindvajsetkrat, l enkrat, m osemkrat, n devetnajstkrat, o petkrat, p štirikrat, r štiriintridesetkrat, s osemkrat, š petkrat, t devetinštiridesetkrat, u dvakrat, v osemkrat, z enkrat in ž enkrat."

Resnici na ljubo je to prav dolgočasen stavek. Je pa zanimiv, saj povsem drži. Vsaka črka se res pojavi tolikokrat, kot je v stavku zapisano. Poskusite zapisati kak drug stavek, ki bo imel podobno lastnost. Staviva, da ne bo prav preprosto.

Kako je uspelo nama? Najprej sva izbrala preprosto obliko stavka, kot jo vidimo zapisano zgoraj – kratek uvodni del in nato naštevanje, kolikokrat se pojavi posamezna črka. Nato sva uporabila računalnik, saj s poizkušanjem s svinčnikom in papirjem ne pridemo nikamor. Vendar tudi z računalnikom ne gre kar na slepo pregledovati različnih možnosti, saj jih je res zelo veliko. Poskusimo jih prešteti. Sistematično bi lahko iskali prave besede za črkami tako, da najprej za vse privzamemo, da se pojavijo "enkrat", potem pa začnemo za črko a spreminjati besedo na "dvakrat", "trikrat" in tako dalje. Vedno preverimo, ali smo uspeli sestaviti resnično izjavo, in če ne, nadaljujemo. Nato spremenimo besedo za črko b na "dvakrat" ter ponovimo tudi ves postopek s črko a. Tako nadaljujemo tudi z drugimi črkami. Vseh preizkusov bi bilo tako za vseh 25 črk 100^{25}, če privzamemo, da se nobena črka ne pojavi več kot stokrat. To je zelo veliko število. Če bi v eni sekundi preverili sto milijonov možnosti, bi vse pregledali šele v 3×10^{34} letih, kar je nepojmljivo dolg čas. Vedeti moramo, da obstaja vesolje "le" kakih 10^{10} let. Na pravo rešitev bi seveda naleteli po manjšem številu preizkusov, a še vedno prevelikem za še tako hiter superračunalnik. Število smiselnih možnosti lahko s premislekom krepko zmanjšamo. Hitro se da ugotoviti, da se bodo nekatere črke pojavile le enkrat. Ker se pri vsaki črki pojavi besedica "krat", začnemo pri črkah, ki jih ta besedica vsebuje, poskušanje z besedo "petindvajsetkrat", saj število pojavitev teh črk ne bo manjše od 25. S tem se število možnosti zelo zmanjša, a je še vedno preveliko, da bi stavek iskali na opisani način.

Naloge se lotimo drugače. Najprej potrebujemo mero, ki pove, kako dobro je stavek usklajen s samim seboj. Kar sam se ponuja kvadrat razlike med tem, kolikokrat se posamezna črka zares pojavi v stavku in kolikokrat je zapisano, da se pojavi. Kvadrate razlik seveda seštejemo po vseh petindvajsetih črkah. Če uspemo našo mero zmanjšati na nič, bo stavek samousklajen. Poskusimo s postopnim, a usmerjenim približevanjem rešitvi: naključno izberemo eno izmed črk, preštejemo, kolikokrat se zares pojavlja v stavku, in to vanj tudi zapišemo. Seveda lahko s tem ustvarimo novo neskladje, vendar upamo, da bomo s ponavljanjem takih potez nazadnje uspeli. Potezo sprejmemo le, če se naša mera uspešnosti po njej zmanjša, sicer pa vzpostavimo stanje pred njo in izberemo novo potezo. Izkaže se, da postopek deluje tako, da se mera uspešnosti sprva hitro zmanjšuje, nato pa obstane pri vrednosti mere uspešnosti, ki je sicer majhna, a ni enaka nič – naš postopek se je ujel v zanko brez konca. Tedaj je smiselno vsaj začasno sprejeti tudi poteze, ki mere uspešnosti sicer ne zmanjšajo, a vsaj prekinejo vrtenje v krogu. Nato pa se znova spustimo v zmanjševanje razlik med resničnim in zapisanim stanjem.

V resnici se lotimo stvari tako, da vedno dovolimo tudi poteze, ki mero povečajo, vendar le z zelo majhno verjetnostjo, če je razlika med stanjem na papirju in v resnici velika. Bolj ko se ta manjša, bolj dopuščamo možnost, da za trenutek napravimo tudi korak v napačno smer, da se le izognemo stopicanju na mestu. Naš algoritem izgleda takole:

Preberi stavek v začetni obliki.
Ponavljaj:
    izberi eno izmed črk;
    preštej število pojavljanj te črke v stavku;
    zapiši število pojavljanj te črke v stavek;
    za vsako od petindvajsetih črk:
        preštej število pojavljanj te črke v stavku;
    izračunaj mero ujemanja med dejanskim in zapisanim stanjem;
    preveri, ali se je ujemanje izboljšalo:
        da – skoči na konec zanke (na pogoj "dokler");
        ne – izračunaj verjetnost, da spremembo vseeno odobrimo:
            sprememba odobrena – skoči na konec zanke;
            sprememba zavrnjena – vzpostavi stanje pred spremembo;
dokler ni popolnega ujemanja.
Zapiši stavek na izhodno enoto.

Za tiste, ki bi algoritem želeli zapisati tudi v kakem programskem jeziku, naj povemo, da korak, pri katerem se je mera uspešnosti spremenila za Δs, sprejmemo z verjetnostjo $e^{-\Delta s/T}$. Tu je T pozitivno število, ki je bilo v našem primeru enako 10, sicer pa pove nekaj o tem, kako zlahka dovolimo poteze, ki stanje začasno poslabšajo. Če je T zelo velik, so dovoljene prav vse poteze, če pa je zelo majhen, ni mogoča prav nobena poteza, ki stanja ne popravi. Vidimo tudi, da je vrednost zgornjega izraza za vsako potezo, ki stanje izboljša, večja od 1, saj je tedaj Δs manjši od nič. To interpretiramo tako, da tako potezo vedno tudi sprejmemo.

Računalniški postopek, ki smo ga s tem opisali, je znan kot "simulirano kaljenje", saj spominja na postopek obdelave kovine, ki jo najprej segrejemo in nato ohladimo, da dosežemo kar najbolj stabilno in urejeno strukturo snovi. Nižanju temperature (naš parameter T) ustreza zmanjševanje verjetnosti za odobritev sprememb, ki ne vodijo v bolj urejeno stanje. V številnih primerih uporabe takega postopka je ključno prav pravilno postopno zmanjševanje te verjetnosti, sicer se lahko vseeno zgodi, da program ne najde najboljše rešitve, ampak konča v neskončni zanki. Korenine postopka so v termodinamiki, kjer sistem lahko začasno preide v stanje z višjo energijo, verjetnost za to pa je povezana z njegovo temperaturo. Po njegovem avtorju ga imenujemo tudi Metropolisov postopek. Njegov opis najdemo na primer v knjigi "Numerical Recipes", razdelek 10.9 (`http://www.nr.com/`).

Za konec preštejmo črke še enkrat. Če upoštevamo tudi naslov, imeni in priimka avtorjev ter opis algoritma, se v tem sestavku pojavlja a petstošestinštiridesetkrat, b petinšestdesetkrat, c dvajsetkrat, č dvainsedemdestkrat, d stoenainsedemdestkrat, e šeststopetinpetdesetkrat, f dvakrat, g sedemintridesetkrat, h petintridesetkrat, i štiristoštirikrat, j dvestodevetindvajsetkrat, k dvestotriinšestdesetkrat, l stotriinštiridesetkrat, m dvestotrikrat, n tristošestintridesetkrat, o štiristoenainpetdesetkrat, p dvestopetnajstkrat, r tristosedemindvajsetkrat, s tristoštiriintridesetkrat, š dvainosemdesetkrat, t štiristoenkrat, u petindevetdesetkrat, v dvestošestindvajsetkrat, z stošestnajstkrat, in ž trinajstkrat. Boste preverili?

Tim Vidmar, Andrej Likar

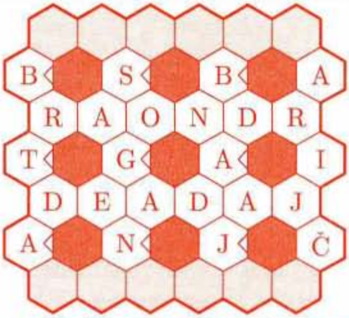
ŠTEVILSKA IZPOLNJEVANKA S SIMETRIJO – Rešitev iz XXVII, P–6, str. 322

7	×	8	:		2	+		2	=	30
8	:	8	×	1	5	+	1	4	=	29
9	+	8	−	1	0	+	2	2	=	29
6	×	5	×		2	−	1	1	=	49

$30 + 29 + 29 + 49 = 137$

Marija Vencelj

KRIŽANKA "VRSTE UGANK"



BESEDE SE ZAČENJAJO NA POLJIH S PUŠČICO IN TEČEJO V SMERI URINIH KAZALCEV. DOPOLNITE MANJKAJOČE ČRKE, DA BOSTE V ZGORNJI IN SPODNJI VRSTI DOBILI DVE VRSTI UGANK!

UGANKA, PRI KATERI IŠČEMO BESEDE NAPREJ, NAZAJ, DOL, GOR IN POŠEVNO V OBE SMERI

ZLATI FILMSKI KIPEC

100 kg, CENT

TROPSKI SADEŽ, DINJA

GLAVNO MESTO ARMENIJE

ZAV KON KAI

STEREO-SKOPSKI FOTOGRAF-SKI APARAT

MAK. DRAM. ČAŠULE

ŽIVAL ŽEN. SPOLA

EN PRE MA

NEC

UGANKA, KJER SE BESEDE VPISUJEJO V ZAVOJIHI IZ VRSTE V VRSTO

ANG. FILM. REŽISER ("POLNOČNI EKSPRES")

IGRALEC SHARIF

ŠOLSKA OCENA

SUROVINA ZA BENCIN

VELIKI TRAVEN

KOSTNI RAK

BRITANSKI OTOK

VELETOK V EGIPTU

BE VI KI DE

MESTO V GRČIJI, SZ OD ATEN

KRALJICA ŠPORTOV

PODNA-JEMNIK V KMEČKI HIŠI

RADIO-AKTIVNO SEVANJE

IME VEČ SLOVENSKIH VASI

PISKER

PAUL NEWMAN

IRANSKA DENARNA ENOTA

SPODNJA POVRŠINA PROSTORA

ZENICA

PRIPOVED-NO DELO V VERZIH

IVANKA KRAŠOVEC

UGANKA V OBLIKI ZIDU

UGANKA, KJER BESEDE TVORIMO IZ ZLOGOV

PESNIK TAUFER

MILANSKA OPERA

RT NA VZHODNI OBALI ŠPANIJE

RAVNODUŠNOST, BREZBRIŽNOST

BRENCELJ

GALERIJA V LONDONU

ZDRAVILNA TRAVNIŠKA RASTLINA

KRAVJI MLADIČ

ESTETSKO UREJEN SKUPEK CVETIC

IVAN CANKAR

KRAJ POD KRIMOM

PIS

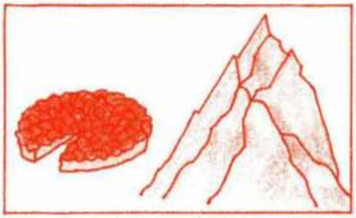
NEKATOLI-ČAN

PREMEČITE ČR

ITAL. DIRIGENT (ALBERTO)

NASLOV NEKD. TURŠKIH ČASTNIKOV

KADILI



RNITEV TRE PRI RTANJU
KAMNINA IZ JAJČASTIH SKUPKOV, IKRAVEC
OSNUTEK RISBE
OVOJ ZA SPISE V OBLIKI PLATNIC
SVETNICA, GROFICA IZ KRKE
REZBAR
VULKANSKO ŽRELO
ANTON AŠKERC

CIM ZA SNOVO ŠČOB
A FALK
AVTOR MARKO BOKALIČ
RAJKO PIRNAT
BUJNOST
FRANC. IGRALEC (MAURICE)
SREDOZEMSKA OKRASNA RASTLINA

LUDVIK TOPLAK
BABICA
PRISTANIŠČE V MOZAMBIKU

VPREŽNI DROG PRI VOZU
KROŽENJE
NEKD. ŠPAN. ENKLAVA V MAROKU

EDNA RSTA, ZRAŽA JANJE
OŽBI OŠLAK
GOZDOVNIK
HAŠIŠ
DESNI PRITOK GARONE

BOJNI PLIN, DUŠLJIVEC

NIŽJI PLEMIČ V FEVDALNI ŠPANIJI
RISBA: GORDANA PUGELJ
NIKOLA TESLA
FANATIK
NEM. PISAT. (WOLFGANG)
SOSEDA LATVIJE

SL. PEVKA (MAJDA)
NASPROTJE PLIME
RAZSTRELJEVALEC
SL. IGRALEC (EVGEN)
POSOJILO
GEOGRAFSKI PRIROČNIK

JAPONSKO VELEMESTO
IZOLACIJA

DOLOČENOST, TAKOST
KONEC POLOTOKA
ŠVIC. JUNAK (VILJEM)

IGRALKA MARGRET
VELIKI GRŠKI FILOZOF
PARADIŽ

ATELJ MAY
JAKOB ALJAŽ
ROBERT REDFORD
IME SLOVENSKE MISS GAČNIK

KEI
MESTECE V ZALEDJU SPLITA

EC
ARKTIČNI PTIČ, ALK
ŽENSKI PEVSKI GLAS
PREMET PROSTO (POGOVORNO)

O NAJMANJŠEM ŠTEVILU S PREDPISANIM ŠTEVILOM DELITELJEV

Katero je najmanjše naravno število, ki ima 81 deliteljev? Ali obstaja od njega manjše naravno število, ki premore več kot 81 deliteljev?

1. Z delitelji mislimo na pozitivne delitelje. Število vseh deliteljev naravnega števila n označimo z $d(n)$. Ker ima 1 le delitelj 1, je $d(1) = 1$. Vsi delitelji števila 10 so 1, 2, 5, 10, zato je $d(10) = 4$. Pri majhnih n delitelje hitro poiščemo, in ko jih preštejemo, imamo $d(n)$. Navedimo obrazec, po katerem lahko $d(n)$ izračunamo:

Naj bo p praštevilo, a naravno število. Število p^a nima drugih deliteljev kot $1, p, \ldots, p^{a-1}, p^a$; ker jih je $a+1$, velja

$$d(p^a) = a + 1\,. \tag{1}$$

Če sta p, q različni praštevili in a, b naravni števili, so vsi delitelji števila $p^a q^b$ zajeti v seznamu

$$\begin{array}{llll}
1, & p, & \ldots, p^{a-1}, & p^a \\
q, & pq, & \ldots, p^{a-1}q, & p^a q \\
\vdots & \vdots & \quad\vdots & \vdots \\
q^b, & pq^b, & \ldots, p^{a-1}q^b, & p^a q^b
\end{array}$$

V vsaki vrstici je $a+1$ števil, vrstic pa je $b+1$, vseh deliteljev za $p^a q^b$ je torej $(a+1)(b+1)$ ali

$$d(p^a q^b) = (a+1)(b+1)\,. \tag{2}$$

Ko na podoben način nadaljujemo, ugotovimo: Število,

$$p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_j^{a_j}\,, \tag{3}$$

kjer so $p_1, p_2, \ldots, p_j$ različna praštevila in $a_1, a_2, \ldots, a_j$ naravna števila, premore $(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_j+1)$ deliteljev; tako je

$$d\left(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_j^{a_j}\right) = (a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_j+1)\,. \tag{4}$$

Po (4) število $3000 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^3$ premore $4 \cdot 2 \cdot 4 = 32$ deliteljev.

Vsako naravno število, ki je večje od 1, ima en sam zapis (3) s produktom potenc praštevil (če zapišemo praštevila po velikosti). Pri velikih naravnih številih pa navadno ni preprosto to izrazitev (3) poiskati.

2. V razdelku 1 smo vpraševali, koliko deliteljev ima dano naravno število. Sedaj vprašanje obrnimo: Katera naravna števila imajo predpisano število deliteljev? Pri danem naravnem številu m iščemo torej vsa naravna števila x, za katere je

$$d(x) = m\,. \tag{5}$$

Pri $m = 1$ premore enačba (5) eno samo rešitev $x = 1$; edino naravno število z enim deliteljem je namreč 1.

Ko v (5) vzamemo $m = 2$, iščemo vsa naravna števila z dvema deliteljema. To so ravno vsa praštevila in enačba $d(x) = 2$ ima za rešitev vsako od praštevil. Rešitev je neskončno, saj je praštevil neskončno.

V enačbi (5) naj bo sedaj $m = 3$. Po (1) je za x mogoče vzeti p^2, kjer je p praštevilo. Drugih rešitev pa enačba $d(x) = 3$ nima. Naj bo namreč x tretja ali višja potenca praštevila p ali pa x deljiv vsaj z dvema različnima praštevilioma p, q. Po (1) in (4) je za tak x vedno $d(x) \geq 4$. Vse rešitve enačbe $d(x) = 3$ so tako p^2, kjer je p praštevilo; rešitev je spet neskončno.

Kako je pri $m = 4$? Iz (1) dobimo rešitev $x = p^3$, p praštevilo, iz (2) rešitev $x = pq$, p in q različni praštevili; drugih rešitev enačba $d(x) = 4$ nima. Za p^3 je neskončno možnosti, prav tako jih je za pq.

Obravnavajmo sedaj primer $m = 8$. Iščemo x v obliki (3); zaradi (4) preide enačba $d(x) = 8$ v enačbo

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1)\dots(a_j + 1) = 2 \cdot 2 \cdot 2\,. \tag{6}$$

Ker desne strani ne moremo bolj razstaviti, so tudi na levi lahko največ trije faktorji, torej je $j \leq 3$. Poiskati moramo rešitev enačbe (6), ko je $j = 1, 2, 3$. Za $j = 1$ dobimo

$$a_1 + 1 = 8\,.$$

Torej je $a_1 = 7$ in $x = p^7$, p praštevilo. Ko je $j = 2$, se (6) glasi

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1) = 4 \cdot 2\,.$$

Dobimo $a_1 = 3$, $a_2 = 1$ in $x = p_1^3 p_2$, kjer sta p_1, p_2 različni praštevili. Rešitev $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ izpustimo, saj pripelje do istega x. Pri $j = 3$ je (6) oblike

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1)(a_3 + 1) = 2 \cdot 2 \cdot 2\,.$$

Torej je $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ in $x = p_1p_2p_3$, kjer so p_1, p_2, p_3 različna praštevila. Vse rešitve enačbe $d(x) = 8$ so tako zajete v številih

$$p_1^7,\ p_1^3p_2,\ p_1p_2p_3\,; \quad \text{kjer so praštevila } p_1, p_2, p_3 \text{ različna.} \tag{7}$$

Rešitve razpadejo na tri množice, vsaka vsebuje neskončno števil; v prvi množici je najmanjše število 2^7, v drugi $2^3 \cdot 3$, najmanjše število tretje množice je $2 \cdot 3 \cdot 5$.

Podobno ugotovimo za $m = 16$, da so vse rešitve enačbe $d(x) = 16$ zajete z množicami

$$p_1^{15},\ p_1^7p_2,\ p_1^3p_2^3,\ p_1^3p_2p_3,\ p_1p_2p_3p_4\,, \tag{8}$$

kjer so p_1, p_2, p_3, p_4 različna praštevila.

V splošnem primeru ravnamo enako kot zgoraj za $m = 2, 3, 4, 8$. Naravno število $m > 1$ izrazimo v obliki

$$m = q_1q_2\ldots q_s\,; \quad q_1 \geq q_2 \geq \ldots \geq q_s\,, \tag{9}$$

kjer so $q_1, q_2, \ldots, q_s$ praštevila, ne nujno med sabo različna. Enakost (5) se potem glasi:

$$(a_1 + 1)\ldots(a_j + 1) = q_1q_2\ldots q_s\,. \tag{10}$$

Ker je na desni s praštevilskih faktorjev, mora biti $j \leq s$. Za vsak $j = 1, 2, 3, \ldots, s$ iz (10) izhaja ena ali več rešitev $a_1, \ldots, a_j$; vsaka taka rešitev daje $x = p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_j^{a_j}$; tu je za različna praštevila $p_1, \ldots, p_j$ neskončno možnosti in tako že vsaka rešitev $a_1, \ldots, a_j$ za (10) pripelje do neskončno rešitev x za (5). Za $m = 16$ je $s = 4$ in v (8) nastopa pet oblik za x. Če je s velik, ima enačba (10) veliko rešitev in je za x potem na razpolago veliko oblik.

3. Iz razdelka 2 vemo: Pri danem naravnem številu $m > 1$ obstaja neskončno naravnih števil, ki imajo m deliteljev; najmanjše med števili, ki premorejo natanko m deliteljev, označimo z $A(m)$. Število m si mislimo zapisano v obliki (9).

Če je $s = 1$, je $m = q_1$; ker je q_1 praštevilo, ima enačba (10) le rešitev $a_1 = q_1 - 1$. Vse rešitve enačbe $d(x) = q_1$ so tako $x = p^{q_1 - 1}$, kjer je p praštevilo; najmanjše število med temi x je $2^{q_1 - 1}$ in velja

$$A(q_1) = 2^{q_1 - 1}\,; \quad q \text{ je praštevilo.} \tag{11}$$

Če je $s = 2$, je $m = q_1 q_1$ ali pa $m = q_1 q_2$ pri praštevilih q_1, q_2 in $q_1 > q_2$. Za $m = q_1 q_1$ dobimo iz (10), da je $a_1 = q_1^2 - 1$ ali pa $a_1 = q_1 - 1$, $a_2 = q_1 - 1$. Enačba (5) ima tedaj rešitve

$$p_1^{q_1^2 - 1},\ p_1^{q_1 - 1} p_2^{q_1 - 1}\ ;\quad p_1, p_2 \text{ sta različni praštevili.} \tag{12}$$

Za $m = q_1 q_2$, $q_1 > q_2$, je v (10) ali $a_1 = q_1 q_2 - 1$ ali pa $a_1 = q_1 - 1$, $a_2 = q_2 - 1$. To daje za enačbo (5) rešitve

$$p_1^{q_1 q_2 - 1},\ p_1^{q_1 - 1} p_2^{q_1 - 1}\ ;\quad \text{kjer sta } p_1, p_2 \text{ različni praštevili.} \tag{13}$$

Najmanjši med števili (12) sta $2^{q_1^2 - 1}$ in $2^{q_1 - 1} \cdot 3^{q_1 - 1}$. Ker je $q_1 \geq 2$, je

$$2^{q_1^2 - 1} = 2^{q_1 - 1} \cdot 2^{q_1 (q_1 - 1)} \geq 2^{q_1 - 1} \cdot 4^{q_1 - 1} > 2^{q_1 - 1} \cdot 3^{q_1 - 1}$$

in število na koncu je najmanjše med števili (12). Zato je

$$A(q_1 q_2) = 2^{q_1 - 1} \cdot 3^{q_1 - 1}\,. \tag{14}$$

Najmanjši števili v (13) sta $2^{q_1 q_2 - 1}$ in $2^{q_1 - 1} \cdot 3^{q_1 - 1}$. Zaradi $q_1 > q_2 \geq 2$ je

$$2^{q_1 q_2 - 1} = 2^{q_1 - 1} \cdot 2^{q_1 (q_1 - 1)} \geq 2^{q_1 - 1} \cdot 4^{q_2 - 1} > 2^{q_1 - 1} \cdot 3^{q_2 - 1}$$

in tako

$$A(q_1 q_2) = 2^{q_1 - 1} \cdot 3^{q_2 - 1}\,. \tag{15}$$

Ko primerjamo (14) in (15), vidimo, da je

$$A(q_1 q_2) = 2^{q_1 - 1} \cdot 3^{q_2 - 1}\ ;\quad q_1, q_2 \text{ praštevili } q_1 \geq q_2\,. \tag{16}$$

Na podalgi obrazcev (11) in (16) je sestavljena preglednica

$$\begin{array}{ll}
A(2) = 2 & A(6) \ = A(3 \cdot 2) = 2^2 \cdot 3 = 12 \\
A(3) = 2^2 = 4 & A(7) \ = 2^6 = 64 \\
A(4) = A(2 \cdot 2) = 3 \cdot 2 = 6 & A(9) \ = A(3 \cdot 3) = 2^2 \cdot 3^2 = 36 \\
A(5) = 2^4 = 16 & A(10) = A(5 \cdot 2) = 2^4 \cdot 3 = 48
\end{array} \tag{17}$$

Najmanjše od števil v množicah (7) je $2^3 \cdot 3$ in zato

$$A(8) = A(2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^3 \cdot 3 = 24\,. \tag{18}$$

Dodajmo še dva zgleda. Po kratkem računu najdemo

$$A(16) = A(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120\,, \tag{19}$$

po nekoliko daljšem pa

$$A(60) = A(5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 5\,040\,. \tag{20}$$

Najmanjše naravno število s 16 delitelji je torej 120, s 60 delitelji 5 040.

4. Zaznamujmo s $p'_1 = 2, p'_2 = 3, p'_3 = 5, p'_4 = 7, \ldots, p'_s, \ldots$ zaporedna praštevila. S številom $m = q_1 q_2 \ldots q_s$, kjer so $q_1, q_2, \ldots, q_s$ praštevila in je $q_1 \geq q_2 \geq \ldots \geq q_s$, je določeno število

$$B(q_1 q_2 \ldots q_s) = 2^{q_1 - 1} \cdot 3^{q_2 - 1} \cdot \ldots \cdot p_s'^{\,q_s - 1}\,. \tag{21}$$

Iz (21) najdemo

$$\begin{aligned}
&B(2) = 2 && B(6) \ = B(3 \cdot 2) = 2^2 \cdot 3 = 12\\
&B(3) = 2^2 = 4 && B(7) \ = 2^6 = 64\\
&B(4) = B(2 \cdot 2) = 2 \cdot 3 = 6 && B(9) \ = B(3 \cdot 3) = 2^2 \cdot 3^2 = 36\\
&B(5) = 2^4 = 16 && B(10) = B(5 \cdot 2) = 2^4 \cdot 3 = 48
\end{aligned}$$

Dobili smo enake rezultate kot v (17); za $m = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10$ je torej $B(m) = A(m)$.

V splošnem pa števili $B(m)$ in $A(m)$ nista enaki. Po (18) je $A(8) = 24$, toda $B(8) = B(2 \cdot 2 \cdot 2) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Število $B(m)$ ima m deliteljev; to pove opredelitev (21). Ker je $A(m)$ najmanjše naravno število z m delitelji, je zmeraj

$$B(m) \geq A(m)\,. \tag{22}$$

Ni težko pokazati, da obstaja neskončno takih m, za katere v (22) velja enačaj.

Za vsako praštevilo q je zaradi (21) in (11)

$$B(q) = A(q)\,; \quad q \text{ je praštevilo.} \tag{23}$$

Pri praštevilih q_1, q_2, kjer je $q_1 \geq q_2$, je po (21) in (16)

$$B(q_1 q_2) = A(q_1 q_2)\,, \quad \text{kjer sta } q_1, q_2 \text{ praštevili in } q_1 \geq q_2\,. \tag{24}$$

Ker je praštevil neskončno, imamo v (23) in (24) neskončno naravnih števil, ko v (22) velja enačaj. Niso pa s tem opisani vsi takšni m.

Naravno število, pri katerem v (22) velja neenačaj in je torej $B(m)$ večji od $A(m)$, se imenuje *izjemno*. Da je tudi izjemnih števil neskončno, kažejo naslednji primeri.

Iz ocene

$$3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 1155 > 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 945$$

dobimo pri praštevilu q po (21)

$$B(q \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^{q-1} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 > 2^{q-1} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7\,. \tag{25}$$

Števili na obeh straneh neenačaja imata enako mnogo deliteljev, namreč $16q$. Ker je $A(q \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)$ najmanjše naravno število s $16q$ delitelji, iz (25) izhaja

$$B(q \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) > A(q \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)\,; \quad q \text{ praštevilo.} \tag{26}$$

Naj bo q izbrano praštevilo in p'_t najmanjše praštevilo z lastnostjo

$$p'_t > 2^q\,. \tag{27}$$

Ker je praštevil neskončno, je med njimi neskončno takih, ki so večja od 2^q. Pri vsakem danem q zato obstaja p'_t. Po (21) upoštevaje (27) izračunamo

$$B(q^t) = 2^{q-1} \cdot 3^{q-1} \cdot \ldots \cdot p'^{q-1}_{t-1} \cdot p'^{q-1}_t > 2^{q-1} \cdot 3^{q-1} \cdot \ldots \cdot p'^{q-1}_{t-1} \cdot 2^{q(q-1)}\,.$$

Število je na koncu enako

$$2^{q^2-1} \cdot 3^{q-1} \cdot \ldots \cdot p'^{q-1}_{t-1}$$

in ima q^t deliteljev tako kot $B(q^t)$. Zato je

$$B(q^t) > A(q^t)\,, \quad \text{kjer je } p'_t > 2^q \text{ in sta } p'_t, q \text{ praštevili.} \tag{28}$$

Tako v (26) kakor v (28) je zajetih neskončno izjemnih naravnih števil m, ko v (22) velja neenačaj. Seveda so še izjemna števila drugačnih oblik.

5. Rekli smo, da je $A(m)$ najmanjše naravno število z m delitelji. Zato je

$$d(A(m)) = m\,.$$

Naravno število m, pri katerem je izpolnjena enakost

$$A(d(m)) = m\,, \tag{29}$$

se imenuje *minimalno*. Ker pomeni $d(m)$ število deliteljev za m, lahko (29) preberemo: Naravno število m je minimalno, če ni manjšega naravnega števila s toliko delitelji, kot jih ima m.

Za praštevilo q je $d(2^{q-1}) = q$; po (11) je potem

$$A(d(2^{q-1})) = A(q) = 2^{q-1}\,.$$

Pogoj (29) je izpolnjen in število

$$2^{q-1}\,, \quad \text{kjer je } q \text{ praštevilo,} \tag{30}$$

je minimalno.

Pri praštevilu $q \geq 3$ iz (2) in (15) najdemo

$$A(d(2^{q-1} \cdot 3)) = A(q \cdot 2) = 2^{q-1} \cdot 3 \tag{31}$$

in število

$$2^{q-1} \cdot 3\,; \quad q \text{ liho praštevilo,} \tag{32}$$

je minimalno.

Minimalnih števil oblika (30) je neskončno, prav tako minimalnih števil oblike (32); niso pa s tem izčrpana vsa minimalna števila.

Navedimo še dve neskončni množici, katerih vsaka vsebuje le končno mnogo minimalnih števil.

Produkt vseh naravnih števil od 1 do n se imenuje n fakulteta in se označuje $n!$; za naraven n je torej

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n\,.$$

Ugotovili so: Število $n!$ je minimalno za $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, pri $n > 7$ pa število $n!$ ni minimalno.

Zaznamujmo z $v(n)$ najmanjši skupni večkratnik števil $1, 2, \ldots, n$. Dognano je: $v(n)$ je minimalno število za $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 16, 27, 28$; za vsak drugačen n pa $v(n)$ ni minimalno število.

6. Dolžni smo še odgovor na vprašanje, zastavljeno na začetku. Ker je $81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, v enačbi (1) velja $s = 4$; iz rešitev te enačbe najdemo $A(81) = A(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 44\,100$. Najmanjše naravno število z 81 delitelji je tako 44 100; vsako od njega manjše naravno število ima torej manj ali več deliteljev kot 81. Število $25\,200 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$ je manjše od $44\,100$ in premore $5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 90$ deliteljev. Čeprav je $44\,100$ najmanjše naravno število z 81 delitelji, obstaja vsaj eno od njega manjše naravno število, ki ima več kot 81 deliteljev.

Naloge

1. Med števili $m = q_1 q_2 q_3$, kjer so q_1, q_2, q_3 praštevila in $q_1 \geq q_2 \geq q_3$, je izjemno le število $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Razen za $q_1 = q_2 = q_3 = 2$ velja zmeraj $B(q_1 q_2 q_3) = A(q_1 q_2 q_3)$. Preveri to trditev.
2. Izpelji, da je $A(16) = 120$, $A(60) = 5\,040$.
3. Pokaži, da je $A(2^6) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$.
4. S. Ramanujan (1887–1920) imenuje naravno število $m > 1$ *zelo sestavljeno*, če je $d(n) < d(m)$ za vsak naraven $n < m$. To pomeni, da je zelo sestavljeno število m najmanjše naravno število z $d(m)$ delitelji. Ker je tako $A(d(m)) = m$, je zelo sestavljeno število obenem minimalno število. Minimalno število pa ni zmeraj zelo sestavljeno; po (30) je $2^4 = 16$ minimalno število, ni pa zelo sestavljeno, saj je $12 < 16$, toda

   $$d(12) = d(2^2 \cdot 3) = 6 > 5 = d(2^4) = d(16)\,.$$

   Poišči še kakšno minimalno število, ki ni zelo sestavljeno.
5. Pri praštevilu q je po (30) število 2^{q-1} minimalno. Ker za $q \geq 5$ drži ocena

   $$2^{q-1} = 2^{\frac{q-1}{2}} \cdot 2^{\frac{q-1}{2}} \geq 2^{\frac{q-1}{2}} \cdot 4 > 2^{\frac{q-1}{2}} \cdot 3\,,$$

   velja

   $$d\left(2^{\frac{q-1}{2}} \cdot 3\right) = \left(\frac{q-1}{2} + 1\right) \cdot 2 = q + 1 > q = d(2^{q-1})$$

   in vidimo, da minimalno število 2^{q-1} ni zelo sestavljeno. Praštevil $q \geq 5$ je neskončno; med neskončno mnogo minimalnimi števili 2^{q-1}, $q \geq 5$ pa nobeno ni zelo sestavljeno. Na podoben način ugotovi: Če je q praštevilo, $q \geq 11$, minimalno število $2^{q-1} \cdot 3$ ni zelo sestavljeno.
6. Sestavi preglednico števil $d(m)$ za m od 2 do 200; iz nje vidiš: Vsa zelo sestavljena števila do 200 so $2, 4, 6, 12, 24, 36, 48, 60, 120, 180$. (Čeprav je 2 praštevilo, je tudi zelo sestavljeno število.)
7. Ali je minimalno število $A(100) = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$ zelo sestavljeno (glej npr. število $14\,400$)?

Jože Grasselli

SPREMENLJIVO ŠTEVILO PARAMETROV

Praktično vsi programski jeziki poznajo podprograme, ki sprejmejo spremenljivo število parametrov. Predvsem podprogrami za branje in izpisovanje imajo zelo pogosto tako obliko, na primer *read* in *write* v pascalu ali pa *scanf* in *printf* v C-ju. Veliko jezikov pozna tudi konstrukte, ki programerju omogočajo, da sam napiše podprograme, ki sprejmejo spremenljivo število parametrov. V C-ju, na primer, take funkcije sprogramiramo s pomočjo ukazov iz standardne knjižnice `stdarg.h`. V tem prispevku si bomo ogledali, kakšne možnosti za sestavljanje ukazov s spremenljivim številom parametrov nam nudi MSWLogo, različica loga, prilagojena za okolja Windows (glej `http://vlado.fmf.uni-lj.si/educa/logo`).

Logo pozna veliko vgrajenih ukazov, ki jih lahko pokličemo z različnim številom parametrov. Med pomembnejšimi takimi ukazi so ukazi za izpisovanje `PRINT`, `SHOW` in `TYPE` ter ukazi za sestavljanje besed oziroma seznamov `WORD`, `LIST` in `SENTENCE`. Vsak ukaz v logu ima določeno *privzeto* število parametrov, to je tisto število parametrov, s katerim lahko pokličemo ukaz, ne da bi klic morali obdati z oklepaji. Na primer, pravkar našteti ukazi za izpisovanje privzeto sprejmejo en sam parameter. Tako s klicem

```
PRINT "Presek
```

izpišemo besedo `Presek`. Če pa poskusimo na enak način izpisati več besed, na primer

```
PRINT "list "za "mlade "matematike "fizike "...,
```

se izpiše le beseda `list`, tolmač pa nam sporoči, da ne ve, kaj storiti z ostalimi besedami. Seveda, pri zgornjem klicu ukaz `PRINT` vzame le en parameter. Če ga želimo uporabiti z več parametri, moramo to logu posebej povedati. To storimo tako, da klic ukaza skupaj z vsemi parametri obdamo z okroglimi oklepaji. Na primer, z zapisom

```
(PRINT "list "za "mlade "matematike "fizike "...)
```

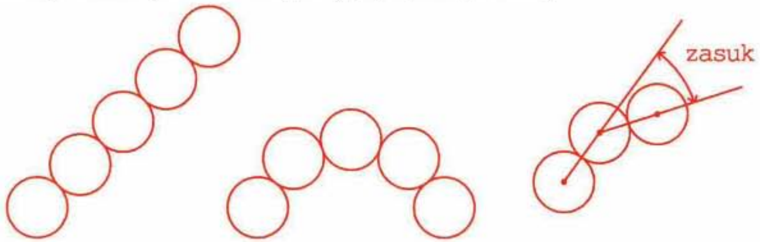
dosežemo, da ukaz `PRINT` kot parametre prejme vseh šest besed in jih tudi izpiše.

V logu za sestavljanje lastnih ukazov uporabljamo vgrajeni ukaz `TO`. Splošna oblika tega ukaza v MSWLogu je

$$\texttt{TO}\ \textit{ime}\ \underbrace{\texttt{:x1}\ldots\texttt{:xn}}_{\text{obvezni parametri}}\ \underbrace{\texttt{[:y1 pv1]}\ldots\texttt{[:ym pvm]}}_{\text{neobvezni parametri in njihove privzete vrednosti}}\ \underbrace{\texttt{[:z]}}_{\text{dodatni parametri}}\ \underbrace{\texttt{pšp}}_{\text{privzeto število parametrov}}$$

Obvezne parametre moramo navesti pri vsakem klicu ukaza. Število obveznih parametrov je torej najmanjše število parametrov, s katerimi lahko pokličemo ukaz. Neobveznih parametrov pri klicu ni nujno navesti. Če jih (nekaj) izpustimo, bo ukaz namesto njih uporabil privzete vrednosti. Del z dodatnimi parametri nam omogoča, da ukaz pokličemo s poljubno veliko parametri. Zadnji del ukaza `TO` je število, ki določi privzeto število parametrov za ukaz. Če tega števila ne navedemo, je privzeto število parametrov enako številu obveznih parametrov.

Poglejmo nekaj primerov. Najprej si bomo ogledali ukaz, ki nariše zaporedje dotikajočih se krogov (glej spodnjo sliko).



Ukaz bo imel dva obvezna parametra, število krogov `n` in polmer krogov `r`. Da bo pri uporabi več svobode, bomo dodali še neobvezni parameter `zasuk`, s katerim določimo, za koliko je premica skozi središči trenutnega in naslednjega kroga zasukana glede na zveznico središč prejšnjega in trenutnega kroga (glej desni del zgornje slike). Privzeta vrednost za `zasuk` bo 0 stopinj; tedaj vsa središča krogov ležijo na skupni premici. Ukaz izgleda takole:

```
TO krogi :n :r [:zasuk 0]
  LOCALMAKE "pero PENDOWNP    ; Zapomnimo si stanje peresa.
  REPEAT :n [
    PENDOWN CIRCLE :r         ; Spustimo pero in narišemo krog.
    RT :zasuk                 ; Opravimo zasuk.
    PENUP FD 2 * :r           ; Pomik v središče naslednjega kroga.
  ]
  IF :pero [PENDOWN]          ; Pero vrnemo v začetno stanje.
END
```

Levi del zgornje slike narišemo na sredino zaslona z ukazi

`CS RT 45 PU BK 200 PD krogi 5 50,`

srednji del pa dobimo s klicem

`CS (krogi 5 50 36).`

Drugi primer bo bolj računski. Sestavili bomo ukaz, ki bo kot obvezni parameter dobil naravno število `n` > 0, vrnil pa bo niz, ki bo predstavljal šestnajstiški zapis števila `n`. Šestnajstiškemu zapisu pravimo tudi *heksadecimalni* zapis. Pri njem poleg običajnih števk $0, 1, \ldots, 9$ kot števke uporabljamo še črke A (=10), B (=11), C (=12), D (=13), E (=14) in F (=15). Tako je 7D0 šestnajstiški zapis števila 2000, saj je

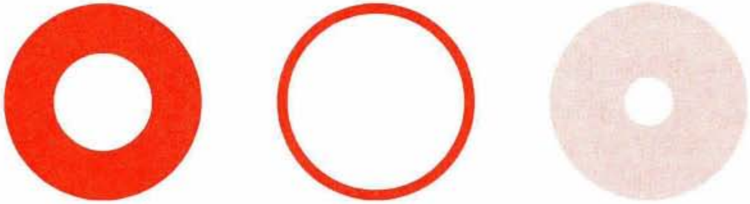
$$7 \cdot 16^2 + 13 \cdot 16 + 0 \cdot 1 = 1792 + 208 + 0 = 2000\,.$$

Ukaz bo imel še neobvezni parameter `d`. Ta določi, koliko znakov ima beseda, ki jo vrne ukaz. Njegova privzeta vrednost bo ravno število števk, ki jih potrebujemo za šestnajstiški zapis števila `n`. To vrednost dobimo tako, da celemu delu šestnajstiškega logaritma števila `n` prištejemo 1. Ker logo ne pozna logaritmov z osnovo 16, si bomo pri računanju pomagali z desetiškim logaritmom. V MSWLogu ga vrne funkcija `LOG10`. Če bo vrednost parametra `d` večja od števila potrebnih števk, bomo rezultat na začetku z ničlami dopolnili do želene dolžine. Če pa bo vrednost parametra `d` manjša od števila števk, bo v rezultatu manjkalo nekaj vodilnih števk. Tule je koda ukaza:

```
TO sestnajst :n [:d 1 + INT ((LOG10 :n) / (LOG10 16))]
; Vrne besedo, ki predstavlja zadnjih d števk šestnajstiškega
; zapisa števila n. Če je zapis krajši, je dopolnjen z ničlami.
  LOCALMAKE "stevke [0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F]
  LOCALMAKE "beseda "
  REPEAT :d [
    MAKE "beseda WORD (ITEM (1 + REMAINDER :n 16) :stevke) :beseda
    MAKE "n INT :n / 16
  ]
  OUTPUT :beseda
END
```

Klic `sestnajst 2000` tako vrne besedo `7D0`, klica `(sestnajst 2000 5)` in `(sestnajst 2000 2)` pa besedi `007D0` oziroma `D0`. Kot vidimo pri gornjem ukazu, lahko za privzete vrednosti neobveznih parametrov določimo poljubne izraze. V njih lahko uporabljamo vrednosti obveznih parametrov, pa tudi vrednosti predtem že navedenih neobveznih parametrov.

Kot naslednji primer si oglejmo ukaz, s katerim bomo lahko narisali krožne kolobarje, kot so prikazani na naslednji sliki.



Ukaz bo imel tri parametre, enega obveznega in dva neobvezna. Dodatno bomo še določili, da bo privzeto število parametrov enako 2. Prvi parameter bo polmer zunanjega kroga, drugi parameter bo polmer notranjega kroga, tretji parameter pa barva v obliki RGB (seznam treh števil med 0 in 255), s katero bo obarvan kolobar. Privzeta vrednost za polmer notranjega kroga bo polovica polmera zunanjega kroga, privzeta barva pa bo kar barva peresa ob klicu.

```
TO kolobar :r1 [:r2 :r1 / 2] [:barva PENCOLOR] 2
  ; Zapomnimo si stanje peresa ter barvi peresa in zapolnjevanja.
  LOCALMAKE "pero PENDOWNP
  LOCALMAKE "b_pero PENCOLOR
  LOCALMAKE "b_poln FLOODCOLOR
  ; Nastavimo izbrano barvo peresa in barvo zapolnjevanja.
  SETPENCOLOR :barva  SETFLOODCOLOR :barva
  ; Spustimo pero in narišemo oba kroga.
  PD CIRCLE :r1  CIRCLE :r2
  ; Premik na sredino med oba kroga, pobarvamo in se vrnemo.
  PU FD (:r1 + :r2) / 2 FILL BK (:r1 + :r2) /2
  ; Vzpostavimo začetno stanje peresa in obeh barv.
  IF :pero [PENDOWN]
  SETPENCOLOR :b_pero
  SETFLOODCOLOR :b_poln
END
```

Prvi kolobar lahko dobimo s klicem

```
(kolobar 100).
```

Klic moramo obdati z oklepaji, sicer tolmač javi, da manjka parameter. Drugi kolobar narišemo s klicem

```
kolobar 100 90.
```

Je precej tanjši od prvega, saj je polmer notranjega kroga kar $\frac{9}{10}$ polmera zunanjega kroga, pri prvem kolobarju pa je bil ta polmer $\frac{1}{2}$ zunanjega.

Zadnji kolobar je debelejši in je dobljen s klicem

```
(kolobar 100 25 [195 195 195]).
```

Seznam `[195 195 195]` v zapisu RGB določa bled odtenek sivine (približno 20% črne barve; črno barvo dobimo z `[0 0 0]`, belo pa z `[255 255 255]`).

Nazadnje si oglejmo še ukaz, ki bo sprejel tudi dodatne parametre. Ukaz bo vzel zaporedje dveh ali več točk (vsaka točka bo podana kot par, torej seznam, števil) in narisal lomljeno črto, sestavljeno iz daljic, pri čemer bo prva daljica potekala od prve do druge točke, druga od druge do tretje točke, itn.

```
TO lomljenka :tc1 :tc2 [:tc]
  ; Zapomnimo si začetni položaj in stanje peresa.
  LOCALMAKE "zacpol POS
  LOCALMAKE "pero PENDOWNP
  PU SETPOS :tc1 PD            ; Premik v prvo točko.
  SETPOS :tc2                  ; Daljica do druge točke.
  REPEAT COUNT :tc [           ; Zanka po dodatnih točkah.
    SETPOS ITEM REPCOUNT :tc
  ]
  PU SETPOS :zacpol            ; Vrnemo se na začetni položaj.
  IF :pero [PENDOWN]           ; Vzpostavimo začetno stanje peresa.
END
```

Ukaz ima dva obvezna parametra, neobveznih parametrov nima, dopušča pa dodatne parametre. Ko ukaz pokličemo, moramo navesti vsaj dva parametra. Tolmač poskrbi, da se dodatni parametri združijo v seznam in ta seznam je začetna vrednost spremenljivke `tc`. Če ukaz pokličemo le z dvema točkama, bo `tc` prazen seznam.

Ukaz lahko uporabimo za izpisovanje z "velikimi" črkami. Na primer, zgornji napis prikažemo na sredini zaslona z naslednjim zaporedjem klicev:

```
(lomljenka [-330 120] [-330 -120] [-210 -120])
(lomljenka [-150 -120] [-30 -120] [-30 120] [-150 120] [-150 -120])
(lomljenka [90 0] [150 0] [150 -120] [30 -120] [30 120] [150 120])
(lomljenka [210 -120] [330 -120] [330 120] [210 120] [210 -120])
```

V primerih smo uporabili tudi nekaj manj znanih logovih ukazov, ki jih nismo posebej razložili. Kratke razlage njihovega delovanja so zbrane v naslednjem seznamu:

`LOCALMAKE` je ukaz, ki ustvari lokalno spremenljivko in ji hkrati še priredi začetno vrednost. Uporabljamo ga kot krajši zapis kombinacije ukazov `LOCAL` in `MAKE`.

`PENDOWNP` je ukaz, ki vrne `true`, če je pero spuščeno (pri premikanju želva pušča sled), in `false` sicer. V primerih smo z njegovo uporabo poskrbeli, da je bilo stanje peresa po koncu klica ukaza enako kot pred klicem.

`INT` je ukaz, ki vrne celi del števila ("odreže decimalke"). Tako klic `INT 3.5` vrne `3`, klic `INT -3.5` pa `-3`.

`REMAINDER` je ukaz, ki vzame dve celi števili in vrne ostanek pri celoštevilskem deljenju prvega števila z drugim. Predznak ostanka je enak predznaku prvega števila (to za nas sicer ni bilo pomembno, saj smo ukaz uporabljali le za pozitivna števila). V nekaterih drugih jezikih se enakovredna operacija imenuje *mod*.

`FLOODCOLOR` je ukaz, ki vrne trenutno veljavno barvo zapolnjevanja. To barvo lahko spremenimo z ukazom `SETFLOODCOLOR`. Zapolnjevanje ("barvanje") opravimo z ukazom `FILL`. Novejše izvedbe MSWLoga poznajo dve različici ukaza `FILL`. Obe začneta barvati na mestu, kjer se nahaja želva. Pri klicu `FILL`, ta je enakovreden klicu `(FILL "false)`, se barva "razlije" le po strnjenem območju, ki je obarvano enako kot pika, na kateri se je barvanje začelo. Pri klicu `(FILL "true)` pa se barvanje širi toliko časa, dokler ga ne zaustavijo pike, obarvane s trenutno barvo peresa. Na primer, zaporedje ukazov

```
CS SETPC [0 0 0] CIRCLE 100 SETPC [255 0 0] FILL
```

nariše črn krog in ga obarva, zaporedje

```
CS SETPC [0 0 0] CIRCLE 100 SETPC [255 0 0] (FILL "true)
```

pa tudi nariše krog, nato pa obarva ves zaslon in ne samo kroga. Seveda, krog je narisan s črno barvo, pred klicem ukaza `FILL` pa smo barvo peresa spremenili na rdeče, tako da črno narisan krog barvanja ne ustavi.

`REPCOUNT` je ukaz, ki nam znotraj zanke `REPEAT` pove, v kateri ponovitvi zanke smo. Ta ukaz nam nadomešča števec, ki ga običajno uporabljamo pri zankah *for* v drugih programskih jezikih. Mimogrede, tudi MSWLogo pozna ukaz `FOR`.

Martin Juvan

RAČUNANJE IN NOGOMET

Po nastopu Slovenije na zaključnem turnirju EURO 2000 bo tudi kak bralec Preseka morda mislil, da je "nogomet najpomembnejša postranska stvar na svetu". Tako lahko nogomet uporabimo kot pretvezo za nekaj računov.

Na zaključnem tekmovanju, na katerem so pravila "določala vse od opreme do igralnega sistema in položaja kamer na štadionu", je bilo 16 moštev razvrščenih na 4 skupine s po štirimi moštvi in vsako je igralo z vsakim po eno tekmo. Moštvo je za dobljeno tekmo dobilo 3 točke, za neodločeno 1 točko in za izgubljeno 0 točk.

Vprašajmo se po številu različnih mogočih izidov, če imamo vsa moštva za enakovredna in se ne zanimamo za številske izide tekem. Vprašanje utegne biti za prave ljubitelje nogometa preveč neživljenjsko, a mladim matematikom ponuja nekaj zanimivosti iz *kombinatorike*.

Najprej se lotimo ene skupine z $n = 4$ člani. Na tekmovanju, na katerem igra vsak par le enkrat, je tekem toliko kot parov: $\frac{1}{2}n(n-1) = 6$. Tekme ločimo na *odločene* in *neodločene*. Različne možnosti opredelimo s številom odločenih tekem z. Po vrsti imamo $z = 0$ (0 odločenih tekem, $6 - z = 6$ neodločenih), $z = 1$, (1 odločena tekma, 5 neodločenih), $\ldots$, $z = 6$ (6 odločenih, 0 neodločenih). Skupno število točk je $3z + 2(6 - z) =$ $= 12 + z$, torej po vrsti 12, 13, $\ldots$, 18.

S tablico ponazorimo, kako so igrala moštva, a ne navedemo njihovih imen:

*	(AB)	(AC)	(AD)
(BA)	*	(BC)	(BD)
(CA)	(CB)	*	(CD)
(DA)	(DB)	(DC)	*

(BA) = 0, če je (AB) = 3, in (BA) = 1, če je (AB) = 1. Zato je dovolj, če si zapomnimo podatke iz desnega zgornjega dela tablice ((AB) (AC) (AD) (BC) (BD) (CD)).

Pri $z = 0$ je šest neodločenih tekem in je (111111) edina možnost.

Pri $z = 1$ je šest možnosti (311111), (131111), (113111), (111311), (111131), (111113) in še šest možnosti, v katerih trojko zamenjamo z 0, (011111) $\ldots$, torej skupaj 12 možnosti.

Pri $z = 2$ se število možnosti tako poveča, da jih ne navedemo, ampak raje o njih sklepamo. Podobno kot prej, začnemo s (331111) in nato obe trojki razvrstimo na druga mesta.

Šest različnih reči lahko razvrstimo na $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$ različnih načinov. Prvo reč namreč lahko postavimo na eno od 6 mest; ostane pet reči, od katerih lahko prvo postavimo na eno od 5 mest; ostanejo štiri reči ... Števila neodvisnih možnosti po *osnovnem izreku kombinatorike* množimo. Tako smo spoznali *permutacije brez ponavljanja.* V našem primeru pa sta dve reči (3 in 3) med seboj nerazločljivi in prav tako štiri reči (1111). S tem, da prvi dve reči premeščamo med seboj in štiri druge reči med seboj, ne dobimo novih možnosti. Tako je možnosti $6!/(4!2!) = 15$. To so *permutacije s ponavljanjem.*

Nato eno od trojk zamenjamo z 0, kar da (031111), in dobimo $6!/(1!1!4!) = 30$ možnosti. Nazadnje še preostalo trojko 3 zamenjamo z 0 in za (001111) dobimo še 15 možnosti. Tako imamo v celoti $15 + 30 + 15 = 60$ možnosti.

Pri $z = 3$ začnemo s (333111), ko je $6!/(3!3!) = 20$ možnosti. Eno trojko zamenjamo z 0 in dobimo (330111), kar da $6!/(2!3!) = 60$ možnosti. Prav toliko možnosti je za (003111) in toliko kot na začetku za (000111). Skupaj je torej $20 + 60 + 60 + 20 = 160$ možnosti.

Smo že pri $z = 4$. Začnemo s (333311), ko je $6!/(2!4!) = 15$ možnosti. Zamenjamo eno od trojk z 0, kar da (033311), in imamo $6!/(1!2!3!) = 60$ možnosti. Zamenjamo še eno od trojk z 0, kar da (003311), in imamo $6!/(2!2!2!) = 90$ možnosti. Tako nadaljujemo in pridemo še do (000311) s 60 in do (000011) s 15 možnostmi. Skupaj je torej $15 + 60 + 90 + 60 + 15 = 240$ možnosti.

Pri $z = 5$ začnemo s (333331), ko je $6!/(1!5!) = 6$ možnosti. Zamenjamo eno trojko z 0, kar da (033331), in imamo $6!/(1!1!4!) = 30$ možnosti. Zamenjamo še eno trojko z 0, kar da (003331), in imamo $6!/(1!2!3!) = 60$ možnosti. Zamenjamo še eno trojko z 0, dobimo (000331) in imamo prav tako 60 možnosti. Zamenjamo še eno trojko z 0, dobimo (000031) in imamo 30 možnosti. Zamenjamo še zadnjo trojko, dobimo (000001) in imamo, kot na začetku, 6 možnosti. Vseh možnosti je $6 + 30 + 60 + 60 + 30 + 6 = 192$.

Preostane le še $z = 6$, ko začnemo s (333333) z eno možnostjo. Sledijo (033333) s 6 , (003333) s 15 in (000333) z 20 možnostmi. Zaradi (000033), (000003) in (000000) dobimo še enkrat prvi dve števili in je vseh možnosti $1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64$.

Naštete možnosti se izključujejo, zato jih seštejemo: $1 + 12 + 60 + 160 + 240 + 192 + 64 = 729$. Rezultat preskusimo. Vsaka od šestih tekem ima za dano moštvo tri mogoče izide: zmago, neodločeno ali poraz. Tekem je 6, zato je vseh možnosti v skupini $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6 = 729$. Nazadnje smo izračunali *variacije s ponavljanjem.*

Skupine so neodvisne druga od druge in vsako možnost iz kake skupine lahko sestavimo z vsako možnostjo iz drugih skupin. Zato števila pomnožimo in pri štirih skupinah dobimo $729 \cdot 729 \cdot 729 \cdot 729 = 3^{6\cdot 4} = 3^{24}$, približno $2{,}8243 \cdot 10^{11}$ možnosti.

Skupina A: 5 odločenih, skupna vsota točk 17

		·1	·2	·3	·4	$\sum$
Portugalska	1·	*	3	3	3	9
Romunija	2·	0	*	3	1	4
Anglija	3·	0	0	*	3	3
Nemčija	4·	0	1	0	*	1

Skupina B: 5 odločenih, skupna vsota točk 17

		·1	·2	·3	·4	$\sum$
Italija	1·	*	3	3	3	9
Turčija	2·	0	*	3	1	4
Belgija	3·	0	0	*	3	3
Švedska	4·	0	1	0	*	1

Skupina C: 4 odločene, skupna vsota točk 16

		·1	·2	·3	·4	$\sum$
Španija	1·	*	3	0	3	6
Jugoslavija	2·	0	*	3	1	4
Norveška	3·	3	0	*	1	4
Slovenija	4·	0	1	1	*	2

Skupina D: 6 odločenih, skupna vsota točk 18

		·1	·2	·3	·4	$\sum$
Nizozemska	1·	*	3	3	3	9
Francija	2·	0	*	3	3	6
Češka	3·	0	0	*	3	3
Danska	4·	0	0	0	*	0

Po tem ko so moštva v skupinah igrala vsako z vsakim, sta se v nadaljnje tekmovanje uvrstili po dve najboljši moštvi iz vsake skupine. Ta moštva so igrala na izločanje, se pravi, da je po vsaki tekmi šlo v naslednji krog le moštvo, ki je zmagalo. Neodločenega izida ni bilo več. V vsaki od osmih tekem osmine finala sta bili dve možnosti, skupaj $2^8 = 64$ možnosti, pri štirih tekmah četrtfinala je bilo $2^4 = 16$ možnosti, v dveh tekmah polfinala še $2^2 = 4$ možnosti in v finalu še 2. Pri tekmovanju na izločanje jih je bilo torej vsega $2^{15} = 32768$. Ob tem se zavemo, da je bilo izbiranje moštev v drugem delu tekmovanja pri igranju na izločanje precej učinkovitejše kot pri igranju v skupinah. Tak način so najbrž izbrali, da bi bilo tekmovanje čim bolj privlačno, ob tem pa časovno omejeno. Nazadnje zmnožimo možnosti iz obeh delov tekmovanja in dobimo $3^{24} \cdot 2^{15}$, to je približno $9{,}2547 \cdot 10^{15}$, možnosti. Kdo bi si mislil, da bi bilo toliko možnosti, če bila moštva enakovredna!

S podobnim prijemom, ki ga spoznajo dijaki pri matematiki v srednji šoli, se, na primer, srečajo pri fiziki študentje drugega letnika fizike, ko v okviru kvantne statistične mehanike razvrščajo delce v množici na enodelčna stanja.

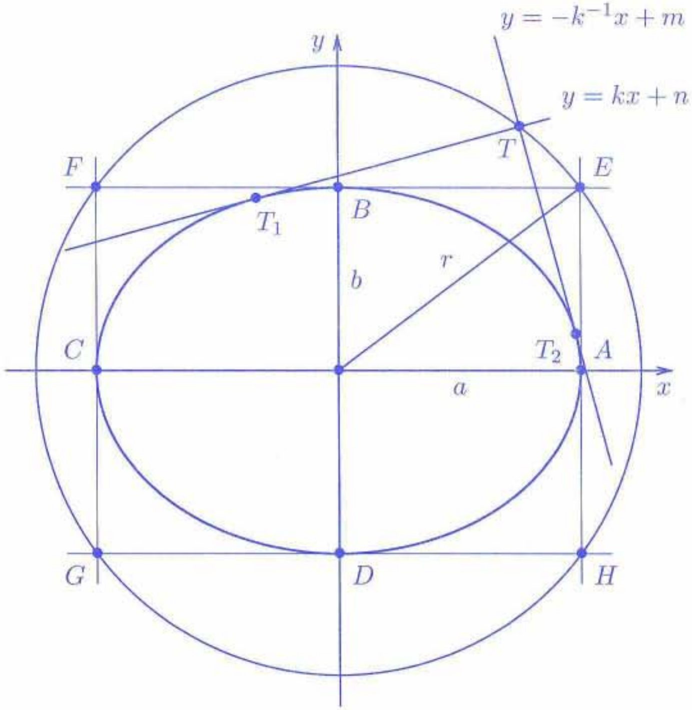
Iz previdnosti dodajmo še misel o zakonih narave in pravilih pri športu, ki bi ju rad tu in tam kdo vzporejal. O pravilih pri športu se navadno dogovorijo v okviru mednarodne zveze tako, da dogajanje opazovalce čim bolj pritegne, da je preprosto določiti vrstni red, in podobno. Pri nogometu je bil pred časom v veljavi dogovor, da dobi zmagovalec 2 točki in ne treh. Z novim dogovorom so najbrž dali vedeti, da velja le zmaga in je neodločen izid pravzaprav izhod v sili. Zakoni narave so nekaj čisto drugega. Raziskovalec po svoji presoji res vpelje kako količino in jo izmeri, a pri zakonih, ki navadno povzemajo zveze med količinami, ima zadnjo besedo preskus. Če se napoved zakona ne ujema z merjenji, je treba zakon zavreči ali predelati. Velja samo zakon, ki se sklada z opazovanji in merjenji.

Nekateri sociologi, ki so z družboslovnega vidika razglabljali o fiziki, so mnenja, da fiziki ustvarjajo zakone podobno kot mednarodna zveza pravila za šport. Toda glede tega se močno motijo. O tem nas prepričajo med drugim fiziki, ki so jih izidi poskusov pripravili do tega, da so spremenili svoje začetno stališče. Robert Andrews Millikan je podprl z merjenji Einsteinovo enačbo za kinetično energijo elektronov pri fotoefektu na kovini, čeprav na začetku zanjo ne bi dal počenega groša. Max Planck je nazadnje privzel, da črno telo s sevanjem izmenjuje energijo le v obrokih, čeprav je to nasprotovalo tedanjemu mnenju. Zato ne gre iskati podobnosti med zakoni fizike in pravili pri športu, čeprav z zgledi iz športa poskušamo pritegniti zanimanje učencev in dijakov za fiziko.

Janez Strnad

ELIPSA, PARABOLA IN PRAVOKOTNI TANGENTI – Rešitev iz XXVII, P–6, str. 322

1. Očitno se pari tangent na elipso $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ iz točk $E(a, b)$, $F(-a, b)$, $G(-a, -b)$ in $H(a, -b)$ sekajo pod pravim kotom (slika). V teh točkah je ena tangenta na elipso vzporedna z osjo x in ima smerni koeficient $k = 0$, druga pa je vzporedna z osjo y. To so ravno tangente v temenih A, B, C in D elipse.



Poiščimo še preostale točke z zahtevano lastnostjo. Naj bo smerni koeficient k ene od tangent iz take točke na elipso poljuben, toda različen od 0. Naj bo premica $y = kx + n$ ena tangenta na elipso. Druga tangenta, pravokotna na prvo, ima potem enačbo $y = -k^{-1}x + m$. Za obe premici zapišimo tangentna pogoja:

$$a^2k^2 + b^2 = n^2\,, \quad \frac{a^2}{k^2} + b^2 = m^2\,.$$

Koordinati presečišča $T(x, y)$ obeh tangent dobimo iz enačbe $kx + n = -k^{-1}x + m$. Po krajšem računu sledi

$$x = \frac{k(m-n)}{k^2+1}, \quad y = \frac{k^2m+n}{k^2+1}.$$

Z upoštevanjem tangentnih pogojev dobimo

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

Iskane točke ležijo na krožnici s središčem v središču elipse in s polmerom $r = \sqrt{a^2+b^2}$. Za toliko so oddaljene od središča elipse tudi točke E, F, G in H.

Iskano geometrijsko mesto je torej krožnica $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. Iz vseh njenih točk vidimo elipso pod pravim kotom. Zato pravimo, da je dobljena krožnica *ortooptična krivulja* elipse.

Poišči še ortooptično krivuljo hiperbole $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$. Razlikuj primere $a > b$, $a < b$ in $a = b$.

2. Naj bo premica $y = kx + n$ ena od tangent na parabolo iz iskane točke. Tangentni pogoj za parabolo je $2kn = p$, iz česar vidimo, da k ne more biti 0. Druga tangenta, pravokotna na prvo, ima enačbo $y = -k^{-1}x + m$ pri tangentnem pogoju $-2k^{-1}m = p$.

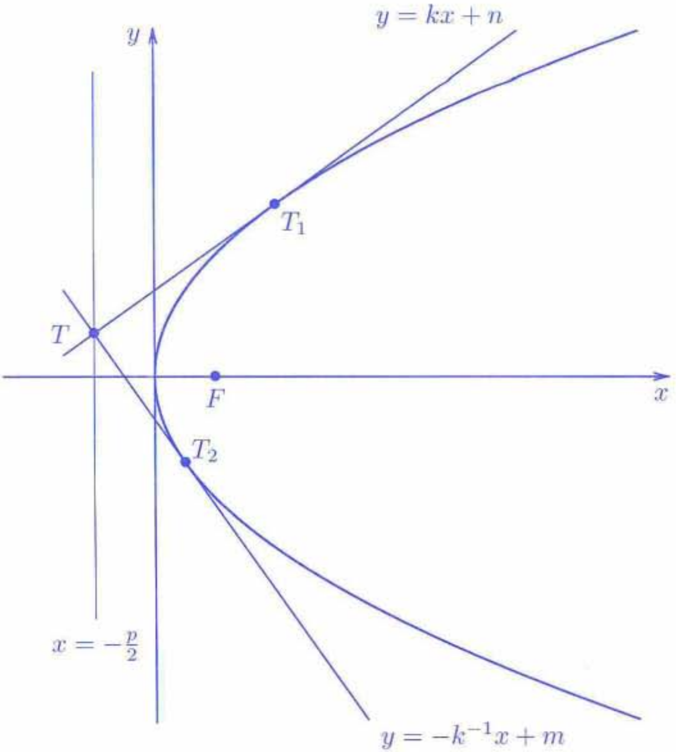
Koordinati presečišča $T(x, y)$ obeh tangent sta

$$x = \frac{k(m-n)}{k^2+1}, \quad y = \frac{k^2m+n}{k^2+1}.$$

Iz tangentnih pogojev dobimo

$$x = -\frac{p}{2}, \quad y = -\frac{p(k^2-1)}{2k}.$$

Ko k preteče vsa od nič različna realna števila, y dvakrat preteče vso realno os. To pa pomeni, da iz vsake točke na vodnici parabole izhajata pravokotno sekajoči se tangenti parabole. Torej je vodnica parabole njena *ortooptična krivulja*. Iz točk vodnice vidimo parabolo pod pravim kotom. Pa od nikjer drugje.



Marko Razpet

TRINAJST DELITELJEV – Rešitev iz XXVII, P–6, str. 322

1. Naravnih števil, ki imajo natanko po trinajst pozitivnih deliteljev, je neskončno mnogo.
2. Najmanjše med njimi je število 4096.

Kakšen premislek vodi do zgornjih odgovorov, pa še marsikaj več, boste izvedeli v članku Jožeta Grassellija O najmanjšem številu s predpisanim številom deliteljev, ki ga najdete na strani 34.

Marija Vencelj

36. TEKMOVANJE ZA ZLATO VEGOVO PRIZNANJE

Najboljši sedmošolci in osmošolci s področnih tekmovanj so se v soboto, 20. maja 2000, pomerili v sedmih regijah na državnem tekmovanju za zlato Vegovo priznanje. Nanj se po veljavnem pravilniku uvrsti do 0,5% vseh sedmošolcev s posameznega področja in do 1% vseh osmošolcev s posameznega področja.

REGIJA	7. razred	8. razred
Ljubljana	71	99
Kranj	26	33
Maribor	53	68
Celje	26	39
Koper	20	22
Nova Gorica	11	18
Novo mesto	19	27
SKUPAJ	226	306

Zlato Vegovo priznanje so prejeli sedmošolci, ki so osvojili najmanj 13 od 25 možnih točk, in osmošolci, ki so osvojili najmanj 14 od 25 možnih točk.

Nagrade najuspešnejšim tekmovalcem:

7. razred

I. nagrada

Pascal Vehovec, OŠ Livada, Velenje; Tjaša Jerak, OŠ Mengeš; Gregor Klančnik, OŠ Naklo; Vera Kabanova, OŠ Valentina Vodnika, Ljubljana.

II. nagrada

Gregor Donaj, OŠ Gorišnica; Sandra Koprivnik, OŠ Jurija Dalmatina, Krško; Tadeja Kadunc, OŠ Louisa Adamiča, Grosuplje.

III. nagrada

Nuša Lazar, OŠ Dušana Bordona, Koper; Mak Grgič, OŠ Maksa Pečarja, Ljubljana Črnuče.

8. razred

I. nagrada

Klemen Žiberna, OŠ Bratov Polančičev, Maribor; Tina Strgar, OŠ Brežice; Domen Stadler, OŠ Cvetka Golarja, Škofja Loka; Nik Stopar, OŠ Danila Lokarja, Ajdovščina; Kris Stopar, OŠ Danila Lokarja, Ajdovščina; Peter Nose, OŠ Dr. Vita Kraigherja, Ljubljana; Luka Roškar, OŠ Gorišnica; Mitja Trampuš, OŠ Majde Vrhovnik, Ljubljana; Anja Vrečko, OŠ Pohorskega odreda, Slovenska Bistrica; Mihael Gojkošek, OŠ Rače.

II. nagrada

Katja Borovnik, OŠ Fram; Mateja Božič, OŠ Livade, Izola; Blaž Cugmas, OŠ Ob Dravinji, Slovenske Konjice; Urša Prah, OŠ Šmarje pri Jelšah; Maja Ratej, OŠ Šmarje pri Jelšah; Mojca Lorber, OŠ Šmartno pri Slovenj Gradcu.

III. nagrada

Janoš Vidali, OŠ Janka Premrla Vojka, Koper; Žiga Lenarčič, OŠ Log-Dragomer, Brezovica; Tadej Kastelic, OŠ Louisa Adamiča, Grosuplje.

Aleksander Potočnik

20. DRŽAVNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE

Letošnja tekmovanja iz fizike za osnovnošolce so bila nekaj posebnega. Za predtekmovanja je bil določen nenavaden datum, 1. april. Osnovnošolci se niso dali zmesti in na predtekmovanjih je sodelovalo 381 ekip učencev iz sedmih razredov in 412 ekip iz osmih razredov, kar pomeni, da nam je kljub dnevu lažnivcev vsaj 1586 učencev verjelo in prišlo reševat naloge. Predtekmovanja so organizirali in vodili: Dušanka Colner v Gornjem Gradu, Maja Gregorič v Dravogradu, DMFA Koper v Hrpeljah, Zlatko Bradač in Mirko Cvahte v Mariboru, Vesna Harej v Ljubljani, Branko Beznec v Gornji Radgoni, Milojka Frank v Novi Gorici, Klavdija Štrucelj v Brežicah in Majda Jeraj v Škofji Loki.

Ob tej priliki omenimo, da je bilo prvo republiško tekmovanje iz fizike za osnovnošolce na Pedagoški fakulteti v Mariboru 1981. leta. Tedaj je sodelovalo 16 ekip iz sedmih razredov in 22 ekip iz osmih razredov. Posebne zasluge za uvedbo teh tekmovanj imata gotovo profesorja Mirko Cvahte in Zlatko Bradač, ki sta, kot ste prebrali v prejšnjih vrsticah, še vedno aktivna, in profesor Franc Plevnik s Pedagoške fakultete v Ljubljani. Tekmovanj ne bi bilo brez zvestih in požrtvovalnih sodelavcev, ki v poročilih niso omenjeni z imeni in priimki. To so profesorji fizike, ki poučujejo po šolah, ravnatelji in vodstveni delavci, ki pomagajo pri organizaciji regijskih tekmovanj, profesorji in študentje fizike na Fakulteti za matematiko in fiziko ter na obeh pedagoških fakultetah, člani društva in, ne nazadnje, tudi starši, ki velikokrat spremljajo svoje otroke na tekmovanja sama. Posebna zahvala velja tudi vsem sponzorjem tekmovanj.

Letos je bila prvič uvedena razvrstitev posameznikov in ne parov, kot je bilo to v navadi na dosedanjih tekmovanjih. Tekmovalcu k številu točk, ki jih zbere pri reševanju računskih nalog, prištejemo še točke, ki jih je prejel v paru pri eksperimentalnem delu.

Državno tekmovanje je bilo 6. maja 2000 na Pedagoški fakulteti v Ljubljani. Udeležilo se ga je 40 ekip iz sedmih razredov in 40 ekip iz osmih razredov. Najbolje uvrščeni tekmovalci so tudi letos preživeli nekaj dni na poletni šoli mladih fizikov na Bledu, ki jo organizira DMFA Slovenije pod pokroviteljstvom in v sodelovanju z Ministrstvom za šolstvo in šport Republike Slovenije.

Na državnem tekmovanju so Zlata Stefanova priznanja prejeli:

Šola	Učenec(ka)
7. razred	
OŠ Venclja Perka, Domžale	Aleš Brolih del Bello
OŠ Ledina, Ljubljana	Matej Červek
OŠ Petra Kavčiča, Škofja Loka	Rok Hari
OŠ Livada, Velenje	Pascal Vehovec
OŠ Prule, Ljubljana	Jure Senegačnik
OŠ Polhov Gradec	Matevž Bokal
OŠ Maksa Pečarja, Ljubljana	Julij Šelb
OŠ Venclja Perka, Domžale	Miha Ernstschneider
OŠ Livada, Velenje	Maša Lončarič
OŠ Maksa Pečarja, Ljubljana	Andraž Piletič
OŠ Nove Fužine, Ljubljana	Vasja Progar
OŠ Maksa Pečarja, Ljubljana	Domen Rozman
OŠ Ledina, Ljubljana	Igor Valantič
OŠ Gorišnica	Gregor Donaj
OŠ Prof. dr. Josipa Plemlja, Bled	Kristjan Anderle
II. OŠ, Celje	Aleks Tovornik
OŠ Karla Destovnika Kajuha, Ljubljana	Marko Gavrilovič
OŠ Loka, Črnomelj	Sašo Skube
OŠ Toneta Čufarja, Ljubljana	Nina Bizjak

Šola	Učenec(ka)
OŠ Poljčane	Matin Kidrič
OŠ Gornja Radgona	Alja Beznec
OŠ Franca Lešnika – Vuka, Orehova vas	Sašo Grozdanov
OŠ Črna na Koroškem	Matic Pajnik
OŠ Bibe Roeck, Šoštanj	Mitja Meh
OŠ Bistrica, Tržič	Aljaž Cotelj
OŠ Bratov Polančičev, Maribor	Žarko Pinter
OŠ Loka, Črnomelj	Urška Weiss
OŠ Dobrovlje	Tom Vodopivec
OŠ Dravlje, Ljubljana	Miha Škof
OŠ Srečka Kosovela, Sežana	Enej Ilievski
OŠ Boštanj	Matic Suhadolčan
OŠ Franca Lešnika – Vuka, Orehova vas	Matjaž Škorjanc
I. OŠ Slovenj Gradec	Andrej Perkuš
OŠ Riharda Jakopiča, Ljubljana	Marko Makuc
OŠ Bojana Ilicha, Maribor	Andrej Soršak
OŠ Primoža Trubarja, Laško	Ana Dergan
OŠ Bistrica, Tržič	Urban Zaletel
OŠ Prof. dr. Josipa Plemlja, Bled	Nina Knežević
OŠ Dravlje, Ljubljana	Sara Kelbič
OŠ Maksa Pečarja, Ljubljana	Jure Medvešek
OŠ Gornja Radgona	Matej Holc
III. OŠ Murska Sobota	Dušan Kozic

8. razred

OŠ Cvetka Golarja, Škofja Loka	Domen Stadler
OŠ Dr. Vita Kraigherja, Ljubljana	Peter Nose
OŠ Poljane, Ljubljana	Simon Jesenko
OŠ Frana Erjavca, Nova Gorica	Tina Lozar
OŠ Šmartno, Šmartno pri Litiji	Simon Čopar
OŠ Vransko	Matic Goropevšek
OŠ Prežihovega Voranca, Ljubljana	Lan Žagar
OŠ Danila Lokarja, Ajdovščina	Nik Stopar
OŠ Miroslava Vilharja, Postojna	Tomo Mezgec
I. OŠ, Celje	Jernej Krempus
OŠ Frana Erjavca, Nova Gorica	Špela Anzeljc
OŠ Šmartno, Šmartno pri Litiji	Dunja Gorišek
OŠ Cvetka Golarja, Škofja Loka	Nejc Berčič
OŠ Dr. Vita Kraigherja, Ljubljana	Jaka Petelin
OŠ Ivana Groharja, Škofja Loka	Borut Bratuž
OŠ Božidarja Jakca, Ljubljana	Urban Medič
OŠ Grm, Novo mesto	Nastasja Suhadolnik
OŠ Lava, Celje	Gregor Srdič

Šola	Učenec(ka)
OŠ Tabor II, Maribor	Milan Grkovski
I. OŠ Slovenj Gradec	Miha Glavan
OŠ Dobrepolje, Videm–Dobrepolje	Peter Jakopič
OŠ Venclja Perka, Domžale	Klemen Pirnat
OŠ Prežihovega Voranca, Ljubljana	Klemen Blokar
OŠ Miroslava Vilharja, Postojna	Tibor Doles
I. OŠ Slovenj Gradec	Nejc Gašper
OŠ Stražišče, Kranj	Gregor Posnjak
OŠ Maksa Pečarja, Ljubljana	Iztok Urbančič
DOŠ 1 Lendava	Miha Malek
OŠ Dobrepolje, Videm–Dobrepolje	Andrej Žnidaršič
OŠ Poljane, Ljubljana	Ana Titan
I. OŠ Slovenj Gradec	Janez Klančnik
OŠ Toneta Okrogarja, Zagorje	Sašo Ostrožnik
OŠ Franceta Prešerna, Maribor	Domen Zafred
OŠ Venclja Perka, Domžale	Jure Baloh
OŠ Venclja Perka, Domžale	Jure Jeretina
OŠ Gorišnica	Luka Roškar
OŠ Šempeter v Savinjski dolini	Tadej Kotnik
OŠ Šmartno, Šmartno pod Šmarno goro	Gregor Traven
OŠ Grm, Novo mesto	Andreja Mamilovič
OŠ Danila Lokarja, Ajdovščina	Kris Stopar
OŠ Venclja Perka, Domžale	Martin Strojnik

Vsem iskreno čestitamo. Osmošolcem, ki so zdaj že srednješolci, želimo veliko uspehov tudi na srednješolskih tekmovanjih, letošnje osmošolce pa pričakujemo na naslednjem tekmovanju za osnovnošolce iz fizike.

Nada Razpet

44. MATEMATIČNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE

V sobotnem dopoldnevu 13. maja 2000 se je 161 dijakov iz 42 gimnazij in srednjih šol v prostorih Gimnazije Novo mesto spopadlo z nalogami na 44. matematičnem tekmovanju srednješolcev Slovenije, popoldan pa so se bodisi odpravili na izlet v Kostanjevico, na sprehod po Novem mestu bodisi pa se prepustili divjini Afrike v zanimivem potopisnem predavanju.

Za uspešno reševanje nalog je državna tekmovalna komisija podelila naslednje nagrade in pohvale:

1. letnik

Prva nagrada
Janez Šter, Gimnazija Želimlje; Žiga Novšak, I. gimnazija v Celju.

Druga nagrada
Ivo List, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Gregor Novak, Gimnazija Celje–Center; Rafael Hofman, II. gimnazija Maribor; Matej Jan, Tehniški šolski center Nova Gorica.

Tretja nagrada
Rok Berlot, II. gimnazija Maribor; Tine Porenta, Gimnazija Škofja Loka; Gašper Žerovnik, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Jakob Fišer, ŠC Nova Gorica; Zora Golob, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Miha Halzer, Gimnazija in ekonomska srednja šola, Trbovlje.

Pohvala
Mitja Pišlar, Gimnazija Koper; Andrej Poljanec, Gimnazija Poljane, Ljubljana; Igor Cesarec, Gimnazija Celje–Center; Vanja Kovač, Škofijska gimnazija Vipava; Vesna Žveglič, I. gimnazija v Celju; Primož Brkič, Gimnazija Novo mesto; Andreja Malus, ŠC Brežice – Gimnazija; Matija Rojnik, Gimnazija Celje–Center; Uroš Kuzman, ŠC Velenje – Splošna in strokovna gimnazija; Tjaša Rotar, Gimnazija Jesenice; Matjaž Žganec, II. gimnazija Maribor; Katarina Bolko, SŠ Vena Pilona, Ajdovščina; Simon Kolar, Gimnazija Murska Sobota; Bine Šebez, ŠC Slovenj Gradec – Gimnazija; Uroš Jelovšek, I. gimnazija v Celju; Maja Milavec, SŠ Postojna.

2. letnik

Tretja nagrada
Klemen Šivic, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Tone Gradišek, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Jure Klanjšček, ŠC Nova Gorica; Matija Perne, Gimnazija Škofja Loka; Bor Harej, Škofijska gimnazija Vipava; Aleksandra Franc, I. gimnazija v Celju; Gabrijela Hladnik, Gimnazija Vič, Ljubljana.

Pohvala
Erik Štrumbelj, Gimnazija Kočevje; Benjamin Lipovšek, ŠC Brežice – Gimnazija; David Danev, ŠC Velenje - Splošna in strokovna gimnazija; Anita Jamnikar, ŠC Slovenj Gradec – Gimnazija; Vesna Rostohar, II. gimnazija Maribor; Sanja Bukovec, Gimnazija Novo mesto; Tina Murn, Gimnazija Škofja Loka; Jernej Urankar, Gimnazija Kranj; Maša Farkaš, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Aleš Frece, ŠC Celje - Splošna in strokovna gimnazija Lava; Jugoslav Njenjić, ŠC Celje – Splošna in strokovna gimnazija Lava.

3. letnik

Prva nagrada
Mojca Miklavec, Škofijska klasična gimnazija, Ljubljana.

Druga nagrada
Andrej Košmrlj, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana.

Tretja nagrada
Sergej Omladič, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Franja Pajk, Gimnazija Škofja Loka.

Pohvala
Eva Berdajs, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Janez Krajnc, ŠC Celje – Splošna in strokovna gimnazija Lava; Andrej Muhič, Gimnazija Novo mesto; Matija Pretnar, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Miha Papler, Gimnazija Kranj; Tina Šantl–Temkiv, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Daniel Šimić, Gimnazija Koper.

4. letnik

Prva nagrada

Irena Majcen, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Barbara Grobelnik, ŠC Celje – Splošna in strokovna gimnazija Lava.

Druga nagrada

Sašo Jelenčič, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana.

Tretja nagrada

Iztok Grilc, Gimnazija in ekonomska srednja šola, Trbovlje; Matjaž Urlep, ŠC Celje – Splošna in strokovna gimnazija Lava.

Pohvala

Blaž Likozar, Gimnazija Kranj; Jure Željko, II. gimnazija Maribor; Katja Balažic, Škofijska klasična gimnazija, Ljubljana; Jaka Hajnšek, ŠC Celje - Splošna in strokovna gimnazija Lava; Jure Strle, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Žiga Virk, Gimnazija Vič, Ljubljana; Dragan Zdovc, Gimnazija Franca Miklošiča, Ljutomer.

Po določilih *Pravilnika o tekmovanju srednješolcev v znanju matematike* je državna tekmovalna komisija na podlagi rezultatov dveh izbirnih testov in državnega tekmovanja izbrala ekipo, ki je zastopala Slovenijo na Mednarodni matematični olimpiadi v Južni Koreji. V ekipo so se uvrstili: Aleksandra Franc, Sašo Jelenčič, Irena Majcen, Mojca Miklavec, Klemen Šivic in Matjaž Urlep.

Matjaž Željko

38. FIZIKALNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE

Tekmovanje je tudi letos potekalo v treh stopnjah: regijsko, državno in izbirno tekmovanje za olimpijsko ekipo. Na prvih dveh stopnjah so bili tekmovalci razdeljeni v štiri skupine, ki so se razlikovale po snovi.

Prve stopnje – **regijskega tekmovanja** – se je udeležilo okrog 1000 dijakov iz 55 srednjih šol. Tekmovanje je potekalo 25. marca 2000 na osmih srednjih šolah po vsej Sloveniji. Organizirale so ga naslednje srednje šole: Škofijska klasična gimnazija Ljubljana, Gimnazija Vič Ljubljana, Srednja elektro–računalniška šola Maribor, Gimnazija Celje – Center, Gimnazija Kranj, Šolski center Nova Gorica, Gimnazija Piran in Šolski center Novo mesto. Tekmovalne komisije, sestavljene iz profesorjev fizike s sodelujočih šol, so popravile izdelke in predložile tekmovalce za državno tekmovanje iz posamezne regije.

Državno tekmovanje je bilo 15. aprila 2000. Po predlogu regijskih komisij se ga je v skupini A udeležilo 37 tekmovalcev, v skupini B 40, v skupini C 25 in v skupini D 23, skupaj 125 tekmovalcev iz 35 srednjih šol.

Soorganizator državnega tekmovanja je bil Šolski center Rudolfa Maistra Kamnik – gimnazija. Poleg izvedbe tekmovanja so pripravili za mentorje in tekmovalce tudi ogled mesta Kamnik in Kamniške Bistrice.

Tekmovanje je izvedla tekmovalna komisija DMFA Slovenije, stroške tekmovanja pa sta krila Ministrstvo za šolstvo in šport ter soorganizator državnega tekmovanja. Pri izvedbi tekmovanja in ocenitvi izdelkov so pomagali študenti FMF, Oddelka za fiziko. Na razglasitvi rezultatov je komisija podelila 7 prvih nagrad, 12 drugih, 8 tretjih in 27 pohval.

Podeljene nagrade in pohvale:

Skupina A

I. nagrada

Ni bila podeljena.

II. nagrada

Anton Potočnik, ŠC Celje – splošna in strokovna gimnazija Lava; Rafael Hofman, II. gimnazija, Maribor; Gorazd Gotovac, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana.

III. nagrada

Gašper Žerovnik, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Tadej Pajnhart-Jarc, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana.

Pohvala
Miha Halzer, Gimnazija in ekonomska SŠ Trbovlje; Ivo List, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Tadej Borovšak, Gimnazija Celje – Center; Danijel Grah, Gimnazija Murska Sobota; Tine Porenta, Gimnazija Škofja Loka; Aleš Zorec, ŠC Ptuj – gimnazija; Mitja Pišlar, Gimnazija Koper; Vanja Kovač, Škofijska gimnazija Vipava; Žiga Novšak, I. gimnazija v Celju.

Skupina B

I. nagrada
Matija Perne, Gimnazija Škofja Loka; Uroš Jurglič, SŠ Josipa Jurčiča Ivančna Gorica; Tilen Kusterle, Gimnazija Kranj.

II. nagrada
Marko Žagar, Gimnazija Tolmin; Matjaž Božič, Gimnazija Koper; Gregor Bregar, Gimnazija Šentvid, Ljubljana; Anton Gradišek, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Lovro Kuščer, Gimnazija Brežice.

III. nagrada
Bor Harej, Škofijska gimnazija Vipava; Jernej Urankar, Gimnazija Kranj.

Pohvala
Janez Krajnc, ŠC Celje – splošna in strokovna gimnazija Lava; Martin Pregl, ŠC Rudolfa Maistra Kamnik – gimnazija; Andraž Stožer, II. gimnazija, Maribor; Vid Novak, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Aleš Frece, ŠC Celje – splošna in strokovna gimnazija Lava; Boris Cergol, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Andrej Šuc, Gimnazija Piran; Andraž Kapus, Gimnazija Novo mesto; Sebastjan Rupnik, Šolski center Nova Gorica.

Skupina C

I. nagrada
Mitja Centrih, ŠC Celje – splošna in strokovna gimnazija Lava; Mojca Miklavec, Škofijska klasična gimnazija Ljubljana; Andraž Hubad, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana.

II. nagrada
Andrej Muhič, Gimnazija Novo mesto; Rok Slokar, Gimnazija Koper.

III. nagrada
Martin Gorjan, Gimnazija Tolmin.

Pohvala
Aleš Česen, Gimnazija Kranj; Martin Lukan, Tehniški šolski center Nova Gorica; Mitja Gomboc, Gimnazija Murska Sobota; Matic Smolej, Gimnazija Jesenice; Nejc Bernot, Gimnazija Šentvid, Ljubljana; Jurij Dreo, Gimnazija Brežice.

Skupina D

I. nagrada

Andrej Košmrlj, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana.

II. nagrada

Iztok Pižorn, I. gimnazija v Celju; Matej Kanduč, Srednja vzgojiteljska šola in gimnazija Ljubljana.

III. nagrada

Gregor Tavčar, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Igor Veselič, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Nejc Košnik, Gimnazija in ekonomska SŠ Trbovlje.

Pohvala

Irena Majcen, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Jernej Bodlaj, Srednja vzgojiteljska šola in gimnazija Ljubljana; Dragan Simeonov, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana.

Izbirno tekmovanje za olimpijsko ekipo je bilo 5. maja 2000 na Fakulteti za matematiko in fiziko, Oddelek za fiziko. Udeležilo se ga je devet najboljših tekmovalcev iz skupine D in trije najboljši iz skupine C z državnega tekmovanja. Na letošnjo 31. mednarodno fizikalno olimpiado, ki je potekala med 8. in 16. julijem v mestu Leicester v Veliki Britaniji, so se uvrstili: Andrej Košmrlj, Gregor Tavčar, Igor Veselič, vsi iz Gimnazije Bežigrad, Ljubljana, Matej Kanduč, Srednja vzgojiteljska šola in gimnazija Ljubljana ter Iztok Pižorn, I. gimnazija v Celju.

Ciril Dominko

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

28. letnik, šolsko leto 2000/2001, številka 1, strani 1 – 64

Dopisi in naročnine: DMFA – založništvo, Presek, Jadranska c. 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (01) 4232-460, št. ŽR 50106-678-47233. Naročnina za šolsko leto 2000/2001 je za posamezne naročnike **2.400 SIT**, za skupinska naročila šol **2.000 SIT**, posamezna številka **480 SIT**, za tujino 25 EUR, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirata MZT in MŠŠ

Založilo DMFA – založništvo

Ofset tisk DELO – Tiskarna, Ljubljana

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana


INDUSTRIE
GLÜCK