Ploščice Tantrix

Nada Razpet

Nekatere družabne igre, ki so bile priljubljene v 90-letih prejšnjega stoletja, se vračajo v novi preobleki, predvsem zaradi možnosti igranja tako na klasičen način kot z računalnikom. Ena od takih iger je TANTRIX. Izumil jo je Mike McManaway leta 1987 med okrevanjem po poškodbi, ki jo je dobil pri plezanju [1]. Osnovni komplet je imel 56 šestkotnih ploščic, povezave na ploščicah pa so bile le dveh barv. Igrali so jo na šestkotni igralni deski. Nova različica iz leta 1991 ima povezave štirih barv. Za igro so izdelani tudi računalniški programi, s katerimi ne le igramo Tantrix, ampak z njimi rešujemo tudi nekatere uganke in sestavljanke.

Igra je priljubljena po vsem svetu. Obstaja slovensko društvo in spletna stran (`www.tantrix.si`), ki je posvečena Tantrixu. Udeležite se lahko številnih tekmovanj v igranju te igre, če boste uspešni, celo svetovnega prvenstva. Nas bodo zanimale predvsem lastnosti ploščic, eno od možnih iger pa bomo omenili na koncu prispevka.

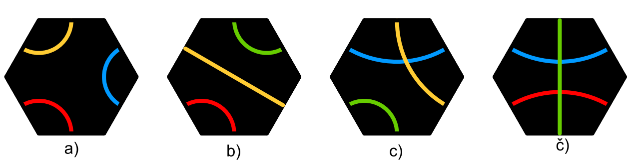
Ploščice

Črne bakelitne ploščice so pravilni šestkotniki. Po dve stranici vsakega šestkotnika sta med seboj povezani. Povezave bomo poimenovali drugače, kot je to v navodilih [1], da bo izrazoslovje matematično pravilno. Na vsaki ploščici so tri povezave, tri *črte*, vsaka v drugi barvi.

Črte so treh oblik:

- povezava razpolovišč dveh sosednjih stranic je krožni lok, s središčem v oglišču šestkotnika, polmer pa je polovična dolžina stranice. To povezavo bomo poimenovali *lok*;
- povezava razpolovišč dveh nasprotnih stranic z ravno črto, to je *daljica*,
- povezava razpolovišč dveh stranic, med katerima je ena prosta (ne sosednjih stranic in ne nasprotnih stranic), je *krivulja*. Pri naši natančnosti lahko vzamemo, da je to krožni lok, ki pripada kotu 60° in ima polmer $3a/2$, če je a stranica šestkotnika. Središče tega kroga je na presečišču podaljškov nesosednjih stranic šestkotnika. Ta krožni lok bomo označili kot *v-lok*, kar pomeni večji lok.

Vse ploščice so na hrbtni strani oštevilčene (slika 2). Številke so lahko rdeče, modre, rumene, zelene ali bele. Dve ploščici sta enaki, če lahko eno zavrtimo v drugo.



SLIKA 1.
Možne črte na ploščicah z različnim izborom barv

Možne kombinacije črt na ploščicah

Dogovorjeno je, da je na ploščici

- kvečjemu ena daljica (nobena ali ena *daljica*),
- en, dva ali trije *loki*,
- natanko dva *v-loka*.

Možne kombinacije črt na ploščicah kaže slika 1.

Preštejmo ploščice

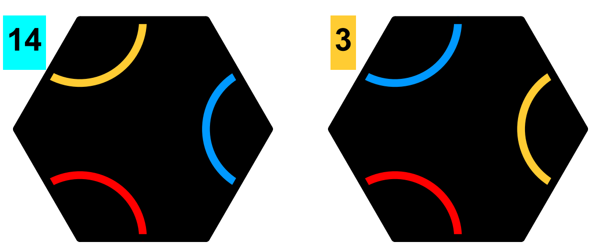
Črte na ploščicah so različnih barv. Na voljo imamo rdečo, zeleno, modro in rumeno barvo. Za vsako ploščico moramo izbrati po tri različne barve, kar pomeni, da imamo štiri ploščice z enako razporejenimi črtami, le da so te različno obarvane. Slika 1 kaže vse možne kombinacije črt na posamezni ploščici, pri čemer ima vsaka ploščica drugačno barvno trojico.

SLIKA 2.
Na hrbtnih straneh ploščic so barvne številke. Sliko smo osvetlili zato, da so številke vidnejše.

Zdaj pa se omejimo na ploščice, na katerih so osnovne barve rdeča, modra in rumena, ter jih preštejmo.

1. Dve ploščici imata tri loke. Sta zrcalno simetrični (slika 3), os simetrije je simetrala enega od kotov, v našem primeru ›rdečega‹ kota.

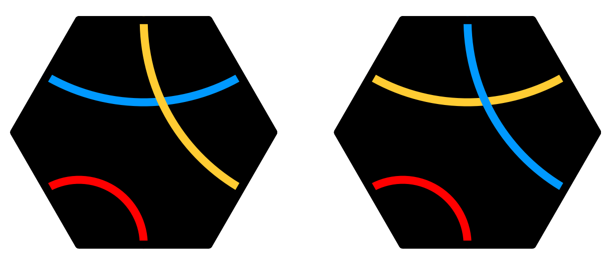
2. Preštejmo ploščice z *daljico*. Imamo dve možnosti: dva *loka* in *daljica* ali pa dva *v-loka* in *daljica*. Z zasukom ali zrcaljenjem teh ploščic (na slikah 4a in 4b) ne dobimo novih razporeditev črt na ploščicah (zakaj že?). Lahko pa seveda drugače porazdelimo barve posameznih črt, kar pa pomeni, da imamo tri ploščice s črtami oblike 4a in tri ploščice oblike 4b; skupaj šest ploščic.



SLIKA 3.
Dve ploščici imata tri *loke*.

SLIKA 4.
Z zasuki in zrcaljenji teh dveh ploščic ne dobimo novih ploščic. Lahko pa drugače razporedimo barve črt.

3. Ostale so nam še ploščice z dvema *v-lokoma* in *lokom* (slika 5). Črte prezrcalimo čez simetralo ›rdečega‹ kota. Dobimo novo razporeditev črt. Torej imamo dve ploščici z enakimi barvami črt. *Lok* je lahko rdeče, modre ali rumene barve (ustrezno spremenimo potem tudi barve *v-lokov*), torej imamo za vsako od teh dveh ploščic po tri možnosti. Dobili smo še šest novih ploščic.

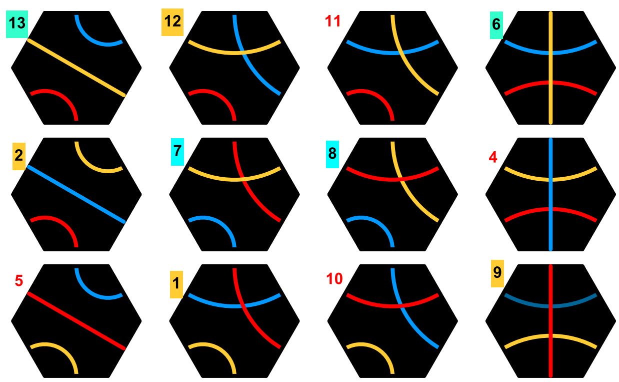


SLIKA 5.
Ploščica z dvema *v-lokoma* in *lokom* ter njena zrcalna slika

Če seštejemo vse možnosti, dobimo

- $2 + 6 + 6 = 14.$

Vseh ploščic z izbranimi tremi barvami je torej 14. Ker lahko barve izbiramo na štiri načine, je vseh ploščic $4 \cdot 14 = 56$ (sliki 3 in 6).



SLIKA 6.
Dvanajst Tantrixovih ploščic. Na hrbtnih straneh ploščic so barvne številke; mi smo jih zapisali ob ploščicah.

Dolžine črt na ploščicah

Vse črte na ploščicah povezujejo razpolovišča dveh stranic, zato lahko hitro izračunamo njihove dolžine. Označimo osnovnico šestkotnika z a.

Dolžina *daljice* je razdalja med nasprotnima stranicama šestkotnika, torej dvojna višini enakostraničnega trikotnika z osnovnico a

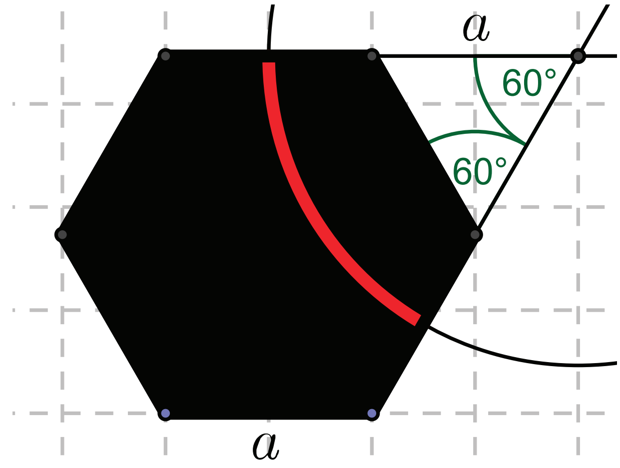
- $s_{\text{daljica}} = 2 \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$

Polmer krožnega loka, ki določa *lok*, je $a/2$, notranji koti šestkotnika merijo 120°, torej je dolžina tega loka tretjina krožnice s polmerom $a/2$

- $s_{\text{lok}} = \dfrac{2\pi a}{2 \cdot 3} = \dfrac{\pi a}{3}.$

Dolžina *v-loka* je šestina krožnice s polmerom $3a/2$ (slika 7):

- $s_{v-\text{lok}} = \dfrac{2\pi \cdot 3a}{2 \cdot 6} = \dfrac{\pi a}{2}.$



SLIKA 7.
Polmer krožnice je $3a/2$

Najdaljša je *daljica*, sledi ji *v-lok*, najkrajši je *lok*. Najdaljšo dolžino vseh treh črt na ploščici imajo ploščice z *daljico* in dvema *v-lokoma*, sledi ploščica z dvema *v-lokoma* in *lokom*, potem z dvema *lokoma* in *daljico*, najkrajšo skupno dolžino črt na ploščici pa ima ploščica s tremi *loki*.

Zakaj smo računali dolžine črt? Nekatere naloge zahtevajo, da je potrebno ploščice sestaviti tako, da je dolžina sestavljenih krivulj najdaljša.

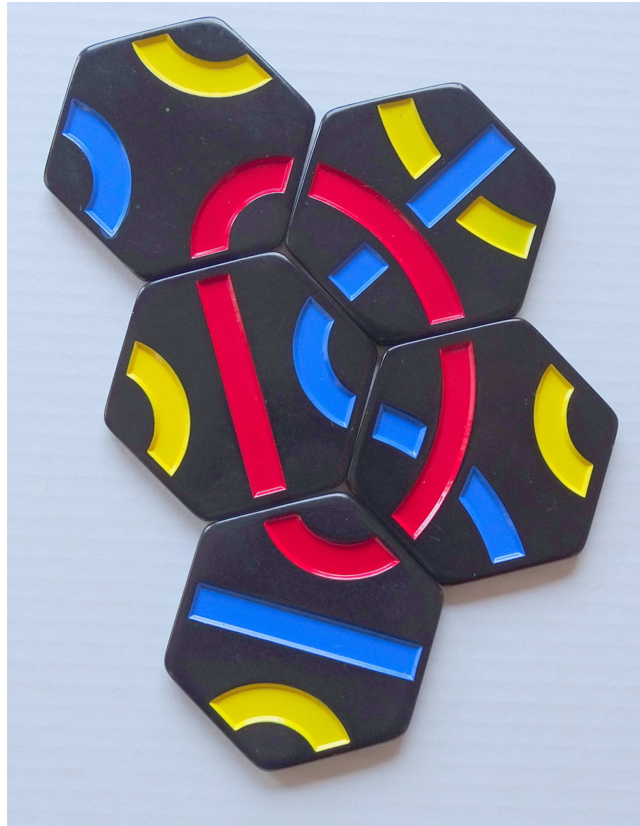
Kot domino

Igro lahko igra eden ali več igralcev. Kompleti, ki jih lahko kupimo, so sestavljeni iz različnega števila ploščic; tisti za začetnike imajo le deset ploščic. Čim več je ploščic, tem zahtevnejša je igra.

Najenostavnejša igra je podobna domini. Ploščice postavljamo tako, da se stikajo po stranicah in da se vse stične črte ujemajo po barvi. To pomeni, da se modra črta ene ploščice lahko stika le z modro črto druge ploščice (slika 8). Med ploščicami ne sme biti praznih prostorov, z drugimi besedami, ne sme biti vmesnih lukenj.

Stikajoče se črte iste barve tvorijo *pot*. Pot se torej razteza čez več ploščic. Na sliki 8 imamo rdeče, modre in rumene poti. Če se začetna točka in končna točka poti ujemata, dobimo sklenjeno pot ali *zanko*. Na sliki 8 ni zank. Na sliki 9 sta rdeča zanka in modra pot.

SLIKA 8.
Zgoraj: črte na sosednjih ploščicah se morajo ujemati po barvi.
Spodaj: napačno sestavljanje ploščic.



SLIKA 9.
Rdeča zanka iz prvih petih ploščic in modra pot

Igra Odkrivanje

V navodilih priporočajo začetnikom, da začnejo z igro *Odkrivanja*, namenjena enemu igralcu, ki začne s prvimi desetimi ploščicami. Igralec mora sestaviti *zanko* iz črt *iste* barve. Na začetku so vse ploščice obrnjene tako, da je hrbtna stran s številkami vidna. Naprej igralec izbere ploščice s številkami 1, 2 in 3 in jih obrne. Vse tri ploščice imajo rumeno obarvane številke. Ko igralec sestavi rumeno zanko, sestavo razdre in doda ploščico s številko 4 in tako naprej vse do ploščice številka 10. Barva številke ploščice, ki jo dodajamo, določa barvo zanke, ki jo moramo sestaviti. Seveda pa v nekaterih primerih obstaja več rešitev, to pomeni, da lahko sestavimo tudi zanko drugačne barve. Če so številke na hrbtni strani bele, moramo sami ugotoviti, katero barvo zanke lahko sestavimo.

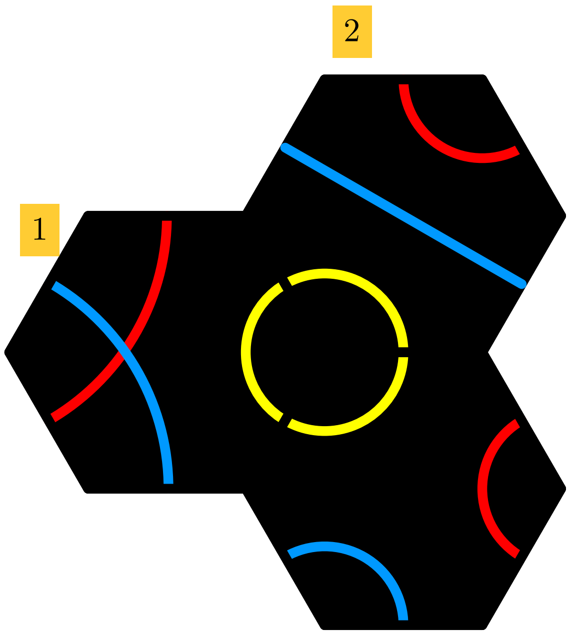
Oglejmo si nekatere primere podrobneje.

Rumena zanka

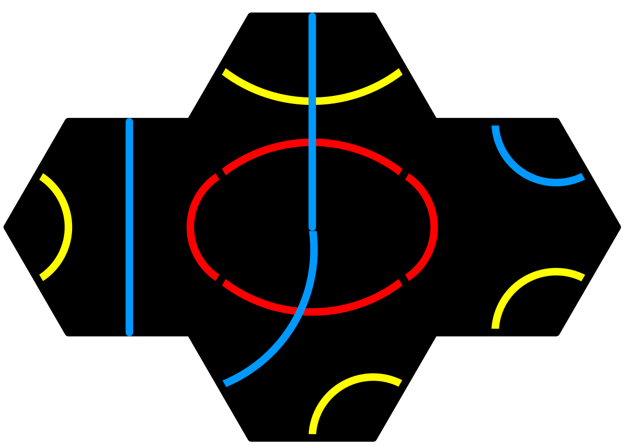
Dane so ploščice s številkami 1, 2 in 3, ki imajo vse rumeno obarvane številke. Sestaviti moramo rumeno zanko. Zanka, v našem primeru krožnica, ima obseg πa. Možni sta dve postavitvi (slika 10).

Rdeča zanka

Dane so prve štiri ploščice. Sestaviti moramo rdečo zanko. Rešitev je na sliki 11. Dolžina zanke je $5\pi a/3$.



SLIKA 10.
Rumena zanka iz prvih treh ploščic. Drugo rešitev dobimo, če zamenjamo ploščici 1 in 2.



SLIKA 11.
Rdeča zanka iz prvih štirih ploščic. Drugačno rešitev dobimo, če med seboj zamenjamo legi dveh nasprotnih ploščic.

Zanke iz prvih desetih ploščic

Zanka iz vseh desetih ploščic je lahko rdeče, modre ali rumene barve (slika 12). Ugotovite, katere barve zanka je najdaljša.

SLIKA 12.
Modra, rumena in rdeča zanka iz prvih desetih ploščic

Kdaj lahko iz danega števila ploščic sestavimo zanko?

Ali lahko sami napovemo, katere barve zanko lahko sestavimo? Poglejmo si nekaj konkretnih primerov.

Zanka iz prvih treh ploščic. Vsota kotov, treh staknjenih ploščic v skupnem oglišču je 360°, to pa lahko dosežemo le z rumenimi črtami. Rdeči loki nimajo skupnega vrha v eni točki.

Zanka iz prvih štirih ploščic. Rdeča zanka je edina možna (povezava dveh nesosednjih in dveh sosednjih stranic). Rumene zanke nimajo skupnega vrha v eni točki.

Za sestavo zanke potrebujemo sodo število *v-lokov* na ploščicah, seveda v izbrani barvi. Vendar to za sestavo zanke ni dovolj, saj npr. iz dveh *v-lokov* in *daljice* ne moremo sestaviti zanke. Pa to še dokažimo na primeru sestavljanja rdeče zanke iz prvih desetih ploščic.

Rdeča zanka na sliki 13 naj predstavlja testno dirkališče za avtomobile. Ko voznik pelje po zanki, mora zavijati. Ko naredi en obhod v nasprotni smeri urinega kazalca, se mora avto zavrteti za +360°, če to smer štejemo pozitivno. Pri tem ga *lok* lahko zavrti za 120° v levo ali desno, *v-lok* pa za 60° v levo ali desno. Naj bodo obrati v levo pozitivni, obrati v desno pa negativni. Obrate po *v-loku* označimo z L_l in L_d, obrate po *loku* pa z l_l in l_d. Vsota vseh kotov mora biti 360°. Torej velja:

- $L_l \cdot 60^\circ + L_d \cdot (-60^\circ) + l_l \cdot 120^\circ + l_d \cdot (-120^\circ) = 360^\circ$,
- $(L_l - L_d) \cdot 60^\circ + (l_l - l_d) \cdot 120^\circ = 360^\circ$.

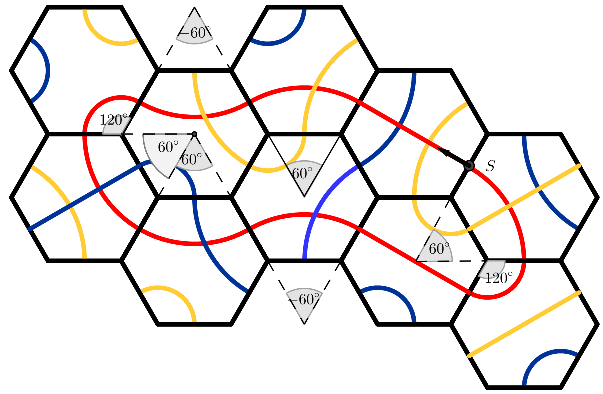
Trditev. *Za zanko v neki barvi potrebujemo sodo število v-lokov v tej barvi.*

Trditev dokažemo s protislovjem. Privzamemo, da imamo liho število *v-lokov*. Vzemimo, da se peljemo po zanki v nasprotni smeri urinega kazalca. Potem je vsota kotov +360°, zasuki v levo so pozitivni, zasuki v desno pa negativni. Torej mora biti

- $L_l - L_d = 2k + 1, \qquad k \in \mathbb{Z};$

$$(2k+1) \cdot 60^\circ + (l_l - l_d) \cdot 120^\circ = 360^\circ,$$
$$(k + l_l - l_d) \cdot 120^\circ = 360^\circ - 60^\circ,$$
$$2(k + l_l - l_d) = 5^\circ.$$

Ampak 5 je praštevilo, torej ne moremo najti takega števila k, da bi imel dvakratnik števila $(k + l_l - l_d)$ vrednost 5.



SLIKA 13.
Rdeča zanka iz prvih desetih ploščic z označenimi koti. Start je v točki S, smer obhoda označuje puščica. Zasuk v levo je pozitiven, zasuk v desno pa negativen. Vsota vseh zasukov je 360°.

Kaj pa, če gremo v smeri urinega kazalca? Potem pa štejemo desne obrate pozitivno, leve pa negativno in pridemo do enakega zaključka.

Iz opisanega sledi, da ne moremo vedno sestaviti zanke v poljubno izbrani barvi. Kdaj je možno in kdaj ne, je odvisno od izbranih ploščic.

Nekaj nalog za bralce

Izmed 14-ih ploščic na sliki 6 izberite toliko zaporednih ploščic, da bosta na sestavljenih ploščicah hkrati modra in rdeča zanka. Ali lahko ploščice sestavite tako, da bodo na njej hkrati zanke treh barv, kot je to na sliki 14? Koliko najmanj zaporednih ploščic morate izbrati? Sestavite ploščice v obliki enakostraničnega trikotnika tako, da bo v sestavu vsaj ena zanka.

In kako naprej?

Na spletnih straneh in v navodilih najdete še nekaj drugih možnosti, lahko pa se spopadete tudi še z nalogami, ki so objavljene na [2].

Nekateri kompleti vsebujejo tudi kvadratne ploščice, katerih stranice so enako dolge kot stranice šestkotnika. Ugotovite, kateri črte so lahko na ploščicah in koliko je takih ploščic, če izbiramo med štirimi barvami.

SLIKA 14.
Iz kompleta 56-ih ploščic smo izbrali 15 ploščic in sestavili trikotnik. Na njem so tri zanke.

Pravila igranja s ploščicami Tantrix in različne naloge lahko najdete na spletni strani slovenskega društva [1]. Ploščice pa lahko izdelate tudi sami.

Literatura

[1] Tantrix, Navodila, dostopno na `www.tantrix.si/`, ogled 3. 12.2019.

[2] Jaap Scherphius, dostopno na `www.jaapsch.net/puzzles/tantrix.htm`, ogled 3. 12. 2019.

SLIKA K MATEMATIČNEMU TRENUTKU.

Križne vsote

Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratku na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

■	↓4	↓12	■	■	■	■	■
10→			■	■	■	↓14	↓9
3→			↓10	■	↓20 / 8→		
■	4→			↓7 / 22→			
■	■	19→				■	■
■	■	■	10→			■	■

REŠITEV KRIŽNE VSOTE

■	↓4	↓12	■	■	■	■	■
10→	3	7	■	■	■	↓14	↓9
3→	1	2	↓10	■	↓20 / 8→	5	3
■	4→	3	1	↓7 / 22→	7	9	6
■	■	19→	9	6	4	■	■
■	■	■	10→	1	9	■	■