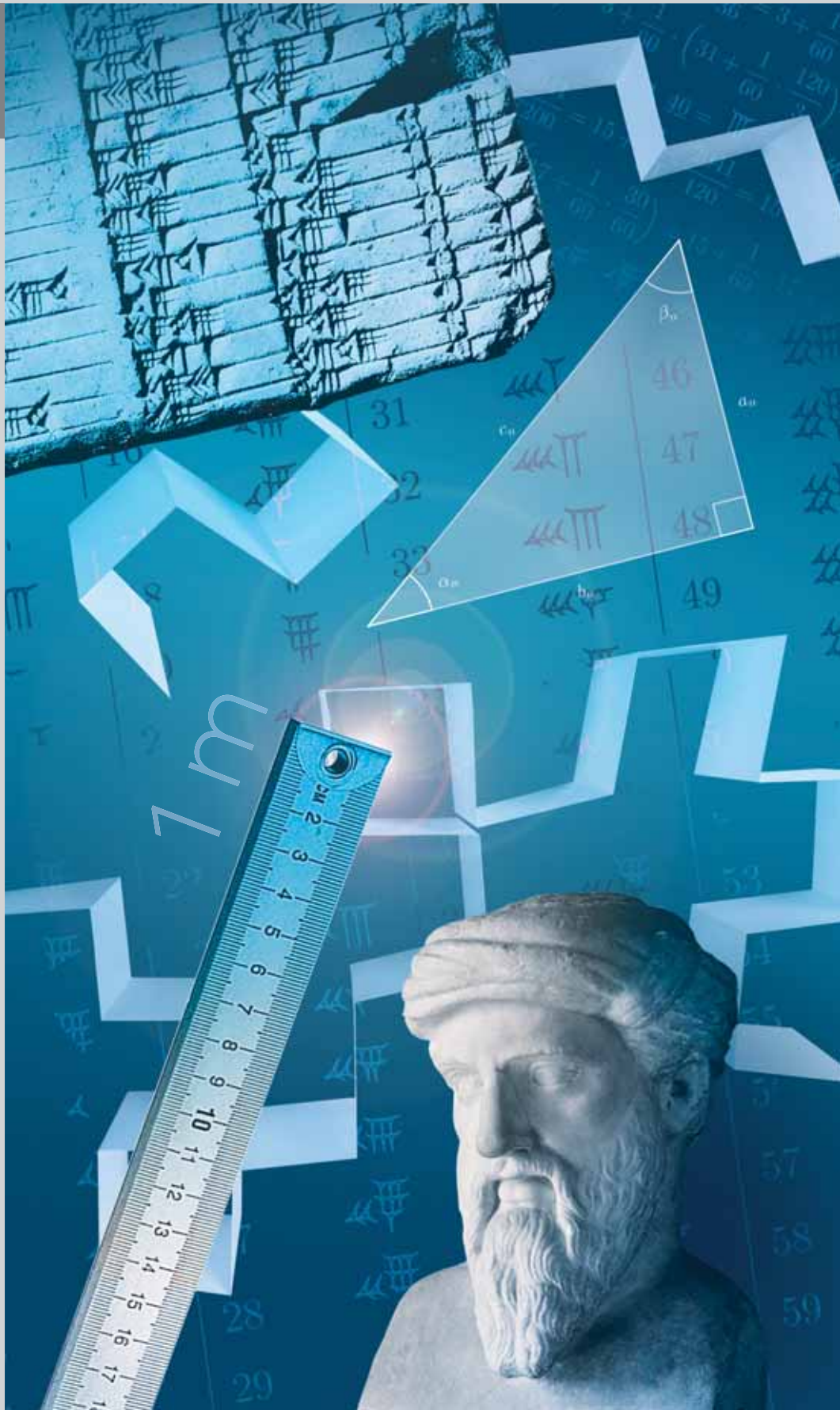
Matematika v šoli

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

2021, letnik 27

2



IZ TEORIJE ZA PRAKSO

Težave pri obdelavi podatkov in statističnem preiskovanju

Kontrolno ocenjevanje na pisnem izpitu iz matematike na poklicni maturi

IZ RAZREDA

Geolov in matematika v šoli

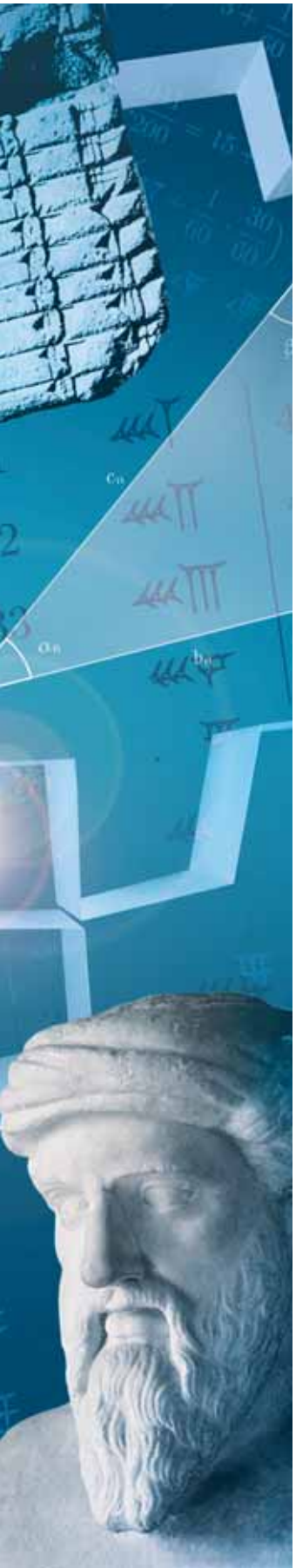
NOVICE

KUPM 2022

Zavod Republike Slovenije za šolstvo

Matematika v šoli

2021, letnik 27 2



VSEBINA

mag. Mateja Sirnik
Koliko je dolg meter in pol?

IZ TEORIJE ZA PRAKSO

dr. Andreja Drobnič Vidic
Težave pri obdelavi podatkov in statističnem preiskovanju 2

mag. Mojca Suban
Kontrolno ocenjevanje na pisnem izpitu iz matematike na poklicni maturi 13

mag. Sonja Rajh
Razlika kvadratov 18

mag. Mateja Sirnik
Do kvartilov in diagrama kvartilov s prepogibanjem papirja 27

IZ RAZREDA

Ana Radovčič
Situacije na ustnem delu poklicne mature 29

Miha Šušteršič
Geolov in matematika v šoli 36

Dragica Vračun
Tehniški dan – priložnost za medpredmetno povezovanje, ustvarjanje in utrjevanje snovi na drugačen način 42

Irena Rauter Repija in Mateja Godec; Tjaša Karas in Neja Štampar
Evropske statistične igre 45

Katja Novak
Primer raziskovanja: Kdo bo vlekel Božička 52

NOVICE

Jerneja Bone
Matematika v izobraževanju na 8. evropskem kongresu matematike 54

dr. Borut Jurčič Zlobec
Raziskovalne naloge iz matematike na Srečanju mladih raziskovalcev Slovenije 2021 59

KUPM 2022 64

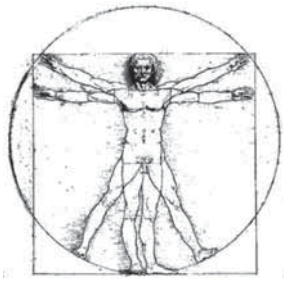
Koliko je dolg meter in pol?

Novinarka Sara Volčič je na 24ur.com objavila svoj komentar z naslovom: *Ali sploh veste, kako dolg je meter in pol?* Na konkretnih primerih opisuje, kakšne težave imamo z upoštevanjem minimalne varnostne razdalje.

Meter je ena od osnovnih merskih enot in je konec 18. stoletja začela nadomeščati številne tradicionalne enote dolžine. Danes veljavna definicija dolžinske enote **meter** je bila sprejeta na 17. Generalni konferenci za uteži in mere leta 1983 in je vezala meter na enoto sekunde ter fizikalno količino hitrosti svetlobe. To pomeni, da se *meter* izraža z naravnimi konstantami, saj je sekunda sama izražena s številom hiperfinih prehodov cezijevega atoma. Definicija metra je:

Meter je dolžina poti, ki jo prepotuje svetloba v vakuumu v časovnem intervalu 1/299792458 sekunde.

Antični in renesančni umetniki so pogosto uporabljali zlati rez, ko so hoteli ustvariti idealni prikaz človeka. Najbolj znani primer je Vitruvijev človek Leonarda da Vincija. To je njegovo najznamenitejše delo na področju matematike in razmerij človeškega telesa.



Vir: https://sl.wikipedia.org/wiki/Leonardo_da_Vinci

Rimski arhitekt Vitruvij je menil, da se idealna razmerja človeškega telesa, ki ima navzven iztegnjene roke in noge, do popolnosti prilagajajo v geometrični telesi kroga in kvadrata. Leonardo pa je to tezo v sliki nekoliko popravil ter prilagodil lego in odnos med krogom in kvadratom in v sliki natančno uresničil Vitruvijeve besede. Središče kvadrata je postavil nekoliko nižje od središča kroga. S svojimi meritvami je ustvaril sliko, ki prikazuje idealna razmerja človeškega telesa.

Iz kvadrata vidimo, da je višina človeka enaka dolžini razpona njegovih rok. Kaj to pomeni? Da je pri učencih, visokih 1,5 m, tudi razpon rok približno 1,5 m. Višino 1,5 m imajo običajno učenci pri dvanajstih letih, torej v 7. razredu osnovne šole. Zato predlog: z učenci naredimo kratek rekreativni odmor, kjer tudi raztegnemo roke. Starejši učenci jih malo skrčijo, mlajši si predstavljajo, da bodo roke še malo zrastle na vsako stran in dobimo predstavo, koliko je en meter in pol.

Vabim vas k branju prispevkov in izvedbi katere od dejavnosti v razredu. Kar bi radi delili z ostalimi učitelj matematike, pa zapišite in pošljite uredniškemu odboru revije.

Želim vam zdrave zimske dni.

mag. Mateja SIRNIK, *odgovorna urednica*

Mateja Sirnik

ISSN 1318-010X
MATEMATIKA V ŠOLI
letnik XXVII, številka 2, 2021

Izdajatelj in založnik: Zavod RS za šolstvo
Predstavnik: dr. Vinko Logaj

Odgovorna urednica: mag. Mateja Sirnik, Zavod RS za šolstvo
Uredniški odbor:
dr. Darja Antolin Drešar, Univerza v Mariboru, Pedagoška fakulteta,
dr. Andreja Drobnič Vidic, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko,
mag. Melita Gorše Pihler, Zavod RS za šolstvo,
mag. Valentina Herbaj, Ekonomska gimnazija in srednja šola Radovljica,
Silva Kmetič,
Sabina Kumer, Šolski center Krško – Sevnica,
dr. Zlatan Magajna, Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta,
Lidija Pulko, Zavod RS za šolstvo,
mag. Sonja Rajh, Zavod RS za šolstvo,
Simona Vreš, Gimnazija Ravne na Koroškem,
dr. Lucija Željko, Osnovna šola Dravlje,
dr. Herremans Adriaan, Universiteit Antwerpen, Belgija,
dr. Evgenia Sendova, Institute of Matematics and Informatics at the Bulgarian academy of Sciences, Bolgarija.

Jezikovni pregled: Katja Križnik Jeraj
Prevod izvlečkov v angleščino: Ensitra prevajanje, Brigita Vogrinec Škraba, s. p.
Urednica založbe: Andreja Nagode
Oblikovanje: Simon Kajtna
Ilustracije (na str. 32, 33, 34, 46 in 52): Davor Grgičević
Fotografije: avtorji člankov
Računalniški prelom: ABO grafika, d. o. o., zanj Igor Kogelnik
Tisk: Present, d. o. o.
Naklada: 510 izvodov

Prispevke pošljite na naslov:
Zavod RS za šolstvo, OE Kranj (za revijo Matematika v šoli), Kidričeva 53, 4000 Kranj, e-naslov: mateja.sirnik@zrss.si
Naročila: Zavod RS za šolstvo – založba, Poljanska cesta 28, 1000 Ljubljana, faks: 01/30 05 199, e-naslov: zalozba@zrss.si
Letna naročnina (2 številki): 22,00 EUR za šole in ustanove, 16,50 € za fizične osebe, 8,50 € za študente, dijake in upokojence. Cena posamezne številke v prosti prodaji je 13,00 EUR.

Revija Matematika v šoli je vpisana v razvid medijev, ki ga vodi Ministrstvo za kulturo, pod zaporedno številko 568. Revija je indeksirana in vključena v mednarodne baze podatkov: MathEduc – Mathematics Education Database, Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik (ZDM), Co-operative Online Bibliographic System and Services (COBISS)

Priznanje avtorstva-Nekomercialno-Brez predelav

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

Matematika v šoli, št. 2., letnik 27, 2021

Težave pri obdelavi podatkov in statističnem preiskovanju

dr. Andreja Drobnič Vidic
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko

Izvleček

Statistične vsebine, s katerimi se mladi v vzgojno-izobraževalnem procesu srečajo že v vrtcu in jih pogosto srečujejo v vsakdanjem življenju, učiteljem matematike pri poučevanju povzročajo nemalo težav. Poleg nizkega števila ur, namenjenih tem vsebinam, se soočajo z neenotnostjo poimenovanj in definicij ter nelagodjem ob premalo poznanih empiričnih preiskavah, v katerih naj bi mladi uporabili pridobljeno statistično znanje. Namen prispevka je ob navedbi strukturirane in čim bolj učinkovite obravnave statističnih vsebin v gimnaziji izpostaviti težave, na katere lahko naletijo učitelji in dijaki, in jih odpraviti. Z njim želimo vzpostaviti vez med statističnimi vsebinami v osnovni in srednji šoli ter pomagati učiteljem statistične vsebine jasno in čim učinkoviteje predstaviti mladim.

Ključne besede: statistika, empirična preiskava, učni načrt, težave pri poučevanju in učenju

Problems with Data Processing and Statistical Investigation

Abstract

Statistical contents, which young people encounter in the educational process as early as kindergarten and which they often come across in their daily lives, cause quite a few problems to mathematics teachers in their teaching practice. Besides the small number of hours devoted to such contents, teachers also deal with inconsistent names and definitions, and with unease due to a lack of knowledge about empirical investigations in which young people are to apply their acquired statistical knowledge. The purpose of the article is to provide a structured and maximally effective discussion of statistical contents in grammar school, while highlighting potential problems that teachers and secondary school students may face and eliminating them. The aim is to establish a link between statistical contents in primary and secondary schools, and help teachers to introduce them to their students as clearly and effectively as possible.

Keywords: statistics, empirical investigation, curriculum, problems with teaching and learning

1 Uvod

Od matematičnih vsebin je statistika posebna, saj se v visokošolskem izobraževanju pogosto »odcepi« od matematike in jo obravnavamo samostojno. Njeni temelji so oblikovani z elementi verjetnosti, vendar je sčasoma postala tako vsestransko uporabna in tako hitro razvijajoča se veda, da pogosto seže le v uporabo in se tako uči samostojno (brez matematičnih temeljev). Tudi način poučevanja se pogosto razlikuje od običajnih metod pri čisto matematičnih vsebinah, kar prikazuje Preglednica 1.

Razlike se odražajo tudi v zahtevah, izpostavljenih procesih učenja, in v zastavljenih nalogah oziroma problemih.

Za vsebinski sklop Statistika je po učnem načrtu za matematiko za program gimnazija predvidenih 10 ur in priporočajo obravnavo v 1. letniku; vsebine za statistiko v gimnaziji so naslednje (Žakelj in sod., 2008):

Preglednica 1: Razlike med učenjem matematičnih in statističnih vsebin.

MATEMATIKA:	STATISTIKA:
doslednost	preglednost
natančno podajanje	povzemanje
trditve – prepričanost	domneve – zanesljivost
dokazovanje	posploševanje
problem – ena ali več poti – rešitev	problem – več poti – več (odprtih) rešitev
idealizacija	realizacija

- Osnovni statistični pojmi;
- Vrste podatkov;
- Zbiranje podatkov;
- Urejanje in strukturiranje podatkov;
- Prikazovanje podatkov (stolpčni, pozicijski, tortni diagram, histogram, razsevni diagram, linijski in krivuljni diagram, škatla z brki);
- Aritmetična sredina, mediana, modus;
- Variacijski razmik, standardni odklon, medčetrtinski razmik;
- Statistična naloga.

Dijaki naj bi samostojno izvedli statistično nalogo tako, da bi obravnavali realističen problem, povezali pri matematiki pridobljeno znanje o osnovah statistike z drugimi predmeti in ga morda vključili v projektni teden ter rešili z uporabo digitalne tehnologije.

Kot bomo spoznali v prispevku, učitelji pri poučevanju statističnih vsebin naletijo na nemalo težav. Poleg nizkega števila ur, namenjenih tem vsebinam, naletijo na težave v neenotnosti poimenovanj in definicij ter v premalo poznani izvedbi statistične naloge za uvajanje v realno empirično preiskavo, v kateri uporabimo pridobljeno statistično znanje.

Izpostavili bomo, da je večina zapisanih vsebin že del osnovnošolskega učnega načrta, tako da v gimnaziji nekatere vsebine lahko nekoliko hitreje ponovimo in strukturirano predstavimo dijakom ter tako pridobimo čas. V prispevku bomo ob navedbi strukturirane obravnave vsebin izpostavili težave, na katere lahko naletijo učitelji in dijaki in jih seveda skušali odpraviti. Za kakovostno izvedbo empirične preiskave je sicer potrebno tudi znanje, pridobljeno pri matematiki ob koncu srednješolskega izobraževanja, ko dijaki spoznajo osnove verjetnostnega računa. Toda »kvazi« empirično preiskavo lahko dijaki v obliki statistične naloge izvedejo že v 1. letniku, ko običajno obravnavamo zapisane statistične vsebine. S prispevkom želimo vzpostaviti vez med statističnimi vsebinami v osnovni in srednji šoli ter pomagati učiteljem statistiko jasno in čim učinkoviteje predstaviti mladim.

2 Statistično predznanje

O obdelavi podatkov in verjetnosti govorijo že **v vrtcu**, saj kurikulum za vrtce omenja, da otrok v vrtcu napoveduje rezultat (ali bo na sprehodu opazil kakšno lužo ali ne), pridobiva izkušnje o tem, kaj se pogosto in kaj se vedno zgodi (pogosto je oblačno, voda je vedno mokra), razporeja predmete v skupine po eni ali dveh lastnostih in razporeja skupine predmetov (Bahovec, Bregar, Čas in sod., 1999).

V osnovni šoli do konca 6. razreda učenci sistematično zbirajo podatke (beleženje štetja in meritev), strukturirajo podatke (urejanje podatkov po velikosti, razvrščanje), razporejajo podatke v smiselne skupine po enem ali dveh kriterijih, se seznanijo s predstavitvijo podatkov (npr. s preglednico, prikazi), spoznajo računalniške preglednice in znanje o obdelavi podatkov uporabijo v krajši preiskavi. Nato znanje sistematično predstavijo v zadnji triadi (Kmetič in Sirnik, 2010, str. 233):

7. razred: Zbiranje, urejanje in predstavitev podatkov: krožni diagram, razsevni diagram, črtni (linijski) diagram, empirična preiskava; Merila za sredino in razpršenost: aritmetična sredina.

8. razred: Zbiranje, urejanje in predstavitev podatkov: grafi (odvisnost diskretnih spremenljivk z grafi, odvisnost zveznih spremenljivk z grafi), empirična preiskava; Merila za sredino in razpršenost: pomen aritmetične sredine.

9. razred: Zbiranje, urejanje in predstavitev podatkov: vprašalniki, uporaba (računalniških) orodij, empirična preiskava; Merila za sredino in razpršenost: pomen aritmetične sredine, modus, mediana, škatla z brki; Izkušnje s slučajnimi dogodki: poskus, dogodek (nemogoč, gotov, slučajni), izid, verjetnost dogodka na osnovi poskusa (statistična verjetnost); Empirična preiskava: načrtovanje, zbiranje podatkov, urejanje in analiziranje, interpretacija, predstavitev.

Podoben učni načrt imajo tudi v Italiji, Veliki Britaniji in ponekod drugod po Evropi. Doseganje ciljev učnega načrta v slovenskih osnovnih šolah preverjamo enotno z nacionalnimi preverjanji znanja. Pregled nalog iz Nacionalnega preverjanja znanja (NPZ) iz matematike v 9. razredu kaže, da je na preverjanju vselej vsaj ena naloga iz obdelave podatkov, naloge iz osnovnošolskih statističnih vsebin pa so z leti vse bolj zahtevne (Državni izpitni center, NPZ). Največjo vlogo pri preverjanju ima branje podatkov iz preglednic, stolpčnih prikazov, linijskih diagramov ali krožnih diagramov in njihovo pretvarjanje iz ene oblike v drugo. Tako znanje zahteva prav vsaka statistična naloga na NPZ. Naloge v zadnjih letih zahtevajo tudi izračun aritmetične sredine, določitev modusa in mediane, nekaj nalog pa je tudi iz verjetnosti.

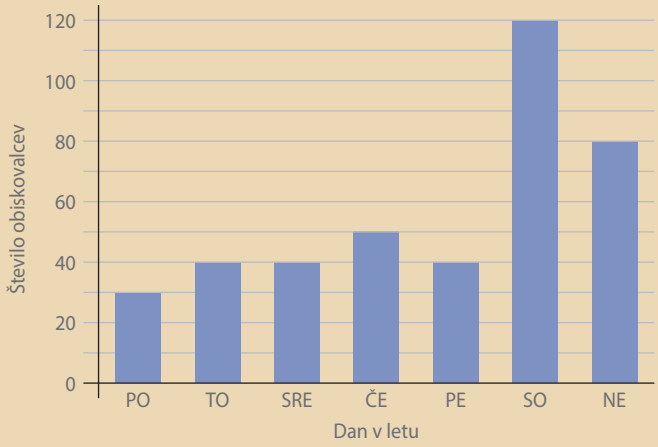
Za zgled bomo podali dve nalogi iz NPZ, eno iz leta 2006 in drugo iz leta 2021 ter preiskovalno nalogo za osnovnošolce. Prek njih bomo nakazali naraščanje zahtev po znanju statistike in težave, s katerimi se v praksi srečujejo tako učenci kot učitelji.

2.1 Naloga na NPZ iz leta 2006

Naloga iz obdelave podatkov je predstavljena na Sliki 1.

7. naloga

Stolpčni prikaz kaže število obiskovalcev v kinu prejšnji teden.

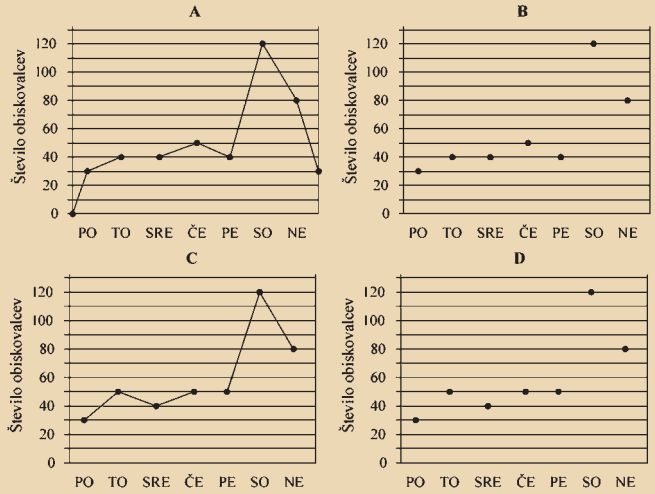


a) Kateri dan je bilo v kinu najmanj obiskovalcev? _____

Slika 1: Naloga o obdelavi podatkov na NPZ leta 2006.

Prvemu vprašanju sledi še vprašanje na Sliki 2:

b) Kateri izmed spodnjih prikazov pravilno kaže podatke iz zgornjega stolpčnega prikaza?
Obkroži črko nad pravilnim odgovorom.



Slika 2: Možni prikazi za dani stolpčni prikaz na NPZ leta 2006.

Prvo vprašanje je zelo enostavno, drugo pa z nanizanimi štirimi prikazi na Sliki 2 kar malo zavajajoče. Najprej učenec sploh ne ve, na kaj naj bo pri prikazih pozoren. Šele daljše opazovanje privede do spoznanja, da prikaza C in D odpadeta, saj za torek ni enakega števila obiskovalcev kot je navedeno v stolpčnem prikazu. Izbira prikazov med A in B zopet ni posrečena. Frekvence podatkov pogosto prikazujemo z linijskim diagramom (frekvenčnim poligonom), kot bomo spoznali v nadaljevanju. Linijski diagram je lomljena črta med točkami, katerih prva koordinata predstavlja vrednosti spremenljivke, druga pa njihove frekvence. Tako bi bil sicer primeren graf A, vendar je lomljena črta na levi speljana do točke (0,0), kar je v mnogih statističnih knjigah tudi svetovano storiti (Košmelj, 2008), a na desni strani ni storjeno enako. Kot pravilen je podan graf B, četudi predstavitev z razsevnim diagramom pri eni spremenljivki ni običajna.

V nalogi je dodano še vprašanje:

c) *Ob sobotah in nedeljah je cena vstopnice 1000 SIT, druge dni pa 800 SIT. Kateri tortni prikaz kaže primerjavo skupnega zaslužka v soboto in nedeljo s skupnim zaslužkom preostalih dni v tednu?*

Učenci izbirajo med štirimi tortnimi prikazi. To vprašanje zahteva tudi izračun skupnega zaslužka med tednom in čez vikend.

Naloga 7 iz obdelave podatkov na NPZ iz leta 2006 torej zahteva branje, preoblikovanje in interpretacijo prikazov, zadnje vprašanje pa tudi malo računanja.

2.2 Naloga na NPZ iz leta 2021

Naloga iz obdelave podatkov v šolskem letu 2021 zajema podatke iz realnega sveta:

Slovensko reprezentanco so na Evropskem prvenstvu v košarki 2017 zastopali igralci, ki so zapisani v spodnji preglednici (Slika 3).

Številka na dresu	Ime in priimek	Igralno mesto	Višina v cm	Starost v letih
0	Anthony Randolph	krilni center	211	28
1	Matic Rebec	branilec	180	22
3	Goran Dragić	branilec	194	31
6	Aleksej Nikolić	branilec	191	22
7	Klemen Prepelič	branilec	191	25
8	Edo Murić	krilo	202	26
11	Jaka Blažič	branilec	196	27
14	Gašper Vidmar	center	211	30
17	Saša Zagorac	krilni center	206	33
22	Žiga Dimec	center	211	24
31	Vlatko Čančar	krilo	203	20
77	Luka Dončić	branilec	201	18

Slika 3: Podatki ob nalogi iz obdelave podatkov na NPZ v letu 2021.

9. a) *Kolikšna je bila mediana starosti igralcev slovenske reprezentance na Evropskem prvenstvu v košarki 2017? Reševanje: Mediana je _____ let. (2 točki)*

9. b) *Igralci slovenske reprezentance, ki so imeli na dresu eno izmed številk 0, 3, 11, 14 in 77, so tekmo začeli. Modus višine igralcev, ki so začeli tekmo, je _____ cm. (1 točka)*

9. c) *Eden izmed snemalcev tekme je kamero naključno usmeril v enega izmed igralcev slovenske reprezentance, ki so začeli tekmo. Verjetnost, da je kamero usmeril v branilca, je _____ . (1 točka)*

9. d) *Povprečna višina igralcev slovenske reprezentance, ki so začeli tekmo, je _____ cm. (1 točka)*

9. e) *Edo Murić je v 5. minuti zamenjal igralca, ki je začel tekmo. Zaradi tega se je povprečna višina slovenskih košarkarjev na igrišču spremenila na 203,8 centimetra. Zapiši ime in priimek igralca, ki ga je Edo Murić zamenjal. _____ (1 točka)*

Naloga iz obdelave podatkov na NPZ iz leta 2021 zahteva branje in interpretacijo prikaza, ki vključuje različne vrste spremenljivk v preglednici, računanje mer sredine (osredinjenosti ali srednje vrednosti) in računanje verjetnosti, zadnje vprašanje pa tudi nemalo računskih spretnosti.

Primerjava nalog iz vsebin statistike na NPZ iz prvega in zadnjega leta spletne dostopne verzije NPZ do tega prispevka kaže na porast zahtev statističnega znanja. Obravnavani nalogi ravno tako kažeta, da se moramo učitelji za poučevanje statističnih vsebin nenehno izobraževati, da postopoma delamo manj napak.

2.3 Empirična preiskava

Pri empiričnih preiskavah realnega sveta pridejo v ospredje značilnosti statistike, navedene v Tabeli 1: preglednost, povzemanje, domnevanje, posploševanje in realizacija. Kot učitelji matematike morda nismo vajeni pri učenju izpostavljati teh značilnosti, zato nemalokrat delamo napake (potemtakem moramo biti še toliko bolj strpni do učencev). Na primeru opisane osnovnošolske mini raziskave bomo izpostavili značilnosti pri poučevanju statistike in nekatere pogoste napake, ki pa so sestavni del učenja. Primer take mini raziskave z naslovom *Najbolj priljubljen šport na šoli* je podan v priročniku za učitelje (Kmetič in Sirnik, 2010, str. 245).

> *Šola organizira pet vrst športnih dejavnosti. Razišči, kateri šport je med učenci najbolj priljubljen.*

Podan je tudi postopek reševanja:

> *Razmislimo, kaj vse lahko vpliva na priljubljenost posameznega športa, nato pa se odločimo, s kakšnimi vprašanji bomo raziskali dani izziv ... Pojavi se veliko vprašanj. Na vsa ne bomo mogli in znali odgovoriti. Odločimo se za eno vprašanje, in sicer: Koliko učencev trenira posamezni šport? in v sklopu dobljenih rezultatov na koncu poskušajmo komentirati izsledke.*

Pri empirični preiskavi, ki je raziskava realnega sveta, je podobno kot v fiziki treba pretehtati, kateri podatki so za reševanje problema ključni, katere bomo zanemarili. Pri tem pa moramo biti previdni. Že res, da je v dani raziskavi priljubljenost športa na šoli povezana s številom učencev, ki se danega športa na šoli udeležujejo, vendar je udeležba pri športu odvisna še od mnogih drugih dejavnikov: od danega termina vadbe, od lokacije, od nevarnosti športa in podobno in ne le od priljubljenosti. Pri predlagani **poenostavitvi**, da priljubljenost merimo s številom učencev, ki se danega športa udeležujejo, se je zato treba vsaj zavedati, da vprašanje o številu učencev, ki trenirajo posamezni šport, ne more neposredno odgovoriti na vprašanje, kateri šport je na šoli najbolj priljubljen. Tako lahko učencem že ob začetku raziskave pojasnimo, da ne bomo iskali najbolj priljubljenega športa na šoli, ampak šport, ki ga izbere največ učencev. Tako smo na podlagi mnogih lastnosti, ki vplivajo na priljubljenost športa, **povzeli** eno lastnost – udeležba, ki jo bomo lahko kakovostneje raziskali. Seveda bi lahko ostali pri vprašanju učencem: *Razišči, kateri šport je med učenci najbolj priljubljen,* ki je vsekakor **ena od možnih poti reševanja problema** oziroma preiskovanja in bi prinesla lahko **drugačen** odgovor.

Sledi pridobivanje podatkov. Kako pridobiti verodostojne podatke? V Kmetič in Sirnik (2010, str. 245) navajajo, da podatke lahko zberemo z vprašalnikom: *Z anketo bomo zbrali, koliko učencev trenira posamezni šport. Med učenci, ki se ne udeležujejo nobenega športa, ne bomo delali ankete. Če se učenec ukvarja z več športi, se v anketi opredeli le za enega, najljubšega.* V tej mini raziskavi opozorijo, da med učenci, ki ne obiskujejo nobenega športa, ne izvedemo ankete, torej prvega vprašanja o tem, ali učenec sploh kaj trenira, po dogovoru ne štejemo v anketo. Ne ukvarjajo se s pomembnim vprašanjem, ali uspemo anketirati vse učence, kajti taka **realizacija** je zelo malo verjetna. Tako v njej ni **posploševanja** iz vzorca na celotno populacijo, ki je sicer sestavni del statistične preiskave, saj za posploševanje osnovnošolci nimajo dovolj znanja.

Po zbranih podatkih in izračunih moramo pri interpretaciji raziskave učence navajati na natančnost izražanja pri postavljanju **domnev.** V podani preiskavi je opredeljeno, naj bi odgovarjali le učenci, ki trenirajo vsaj en šport. V primeru, da trenirajo več športov, naj bi se opredelili za najljubšega. Podani so rezultati ankete: košarka 30, namizni tenis 15, nogomet 20, ples 15 in plavanje 10 in interpretacija rezultatov: *Največ učencev trenira košarko*. Ta domneva ni nujno pravilna, ker so učenci, ki trenirajo na šoli več športov, navedli najljubšega. Lahko bi se namreč zgodilo, da bi poleg navedenega športa še 11 učencev treniralo nogomet, vendar ta ni njihov najljubši šport. V primeru, da na primer košarke ne trenira nihče drug od navedenih 30, bi največ učencev treniralo nogomet – kar 31 in v tem primeru bi bil podani odgovor napačen. Bolj **zanesljiva** je trditev: *Največ učencev je za najljubši šport, ki ga trenirajo, navedlo košarko.* Pri tem privzamemo, da je v primeru obiskovanja enega športa ta hkrati najbolj priljubljen. Še bolje je, če zaključimo: *Rezultati so pokazali, da je med športi na šoli, ki se jih učenci udeležujejo, največ učencev navedlo košarko.*

Osnovnošolski učitelji naj opozarjajo na težave, se z učenci pogovarjajo in povedo, da so tudi opažanja teh težav del statističnega preiskovanja.

3 Obdelava podatkov v gimnaziji in z njimi povezane težave

Z **namenom učinkovite razlage** zahtevanih statističnih pojmov v srednji šoli smo v sklopu pouka na daljavo predstavili **statistične vsebine preko enega samega Primera 1**, z njim pa tudi izvedli zgled statistične naloge, ki predstavlja uvod v empirično preiskovanje.

Primer 1 izzove pri dijakih znanje, ki so ga pridobili v osnovni šoli in je dalje podlaga za bazo podatkov in nove naloge, ki jih uporabimo pri učenju statističnih vsebin, vse to najdete v spletni učilnici Zavoda Republike Slovenije za šolstvo, namenjeni podpori učiteljem matematike v gimnazijah v sklopu poučevanja na daljavo (Drobnič Vidic, 2020): https://skupnost.sio.si/course/view.php?id=65&section=1. Ker je v nekaterih srednješolskih

Primer 1: *Učitelj gimnazije Bič se v šolskem letu 2020/2021 odloči dati anketni vprašalnik dijakom 1. b oddelka, ko so bili v februarju vsi pri pouku. Dijaki so dobili naslednji vprašalnik, ki so ga izpolnili.*

Obkrožite po en ponujeni odgovor ali odgovor napišite na črto:

- *Vaš spol: moški ženski*
- *Kako priljubljen predmet vam je matematika v gimnaziji:*

  1: Sploh ne maram. 2: Ne maram preveč.

  3: Imam še kar rad. 4: Imam zelo rad.
- *Število desetic doseženih odstotkov pri merjenju znanja matematike na zadnjem testu v tem šolskem letu (pri 38 % obkrožite 3):*

  0 1 2 3 4 5

  6 7 8 9 10
- *Čas, ki ga v tem letu običajno namenite domačemu delu pri matematiki tedensko: _____ ur.«*

Učitelj je od dijakov dobil odgovore, ki jih prikazuje preglednica 1.

Nato je dijakom podal vprašanja, na katera so odgovorili!

a) Določite delež moških in žensk, ki so odgovorili na vprašalnik.

b) Kateri odgovor se pri vprašanju o priljubljenosti matematike največkrat pojavi?

c) Zapišite krajšo tabelo, v kateri so predstavljeni dosežki dijakov na zadnjem testu.

d) Izračunajte povprečno število ur, ki jih dijaki iz 1. b običajno namenijo tedenskemu delu za matematiko.

Številka dijaka	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Spol	ž	ž	ž	m	ž	m	m	m	ž	m	ž	ž	ž	m	m	ž	m	m	ž	m	ž	m	ž	ž	m	m	m	m	m	ž	m	m
Priljubjenost	4	3	2	3	3	2	4	2	3	2	4	2	2	2	2	3	2	2	1	2	3	1	3	3	3	3	1	1	2	3	1	3
Dosežki	9	7	4	8	5	7	9	3	8	8	9	6	4	5	0	6	7	5	0	4	7	6	8	7	6	7	7	4	6	9	5	6
Aktivnost	13	10	7	4	5	4	4	3	11	8	8	7	7	6	2	5	4	3	3	2,5	3	2	2	6	2	2,5	1	0	2	1	0	2

učbenikih razlaga statistične vsebine pomanjkljiva, določeni izračuni obravnavanih pojmov pa celo napačni, podamo tudi razlago pomembnih pojmov in definicij, zahtevanih z učnim načrtom za matematiko, ki jih razvrstimo v 4 skupine:

(1) Osnovni pojmi statistike pri zbiranju podatkov,

(2) Urejenost in prikazovanje podatkov,

(3) Mere srednje vrednosti,

(4) Mere razpršenosti.

Natančne definicije in razlage najdete na omenjenem spletnem mestu, v prispevku pa se osredotočimo na težave, ki pestijo tako učitelje kot učence.

3. 1 Osnovni pojmi statistike pri zbiranju podatkov

Populacija je končna ali neskončna množica, opredeljena stvarno, krajevno in časovno. To pomeni, da pri opisu populacije znamo odgovoriti na vprašanje: koga ali kaj proučujemo, kje proučujemo in kdaj. V matematiki ponavadi množico sestavljajo elementi (če ni prazna), v statistiki pa populacijo sestavljajo (statistične) enote. Če iz populacije izberemo določeno število enot, dobimo vzorec. Na populaciji ali vzorcu proučujemo določene lastnosti, ki se od enote do enote lahko spreminjajo. Imenujemo jih **statistične spremenljivke** ali kratko spremenljivke. Za izbrano spremenljivko vsaki enoti določimo vrednost spremenljivke. Glede na to, kako opisujemo vrednosti spremenljivk, ločimo **opisne** spremenljivke in številske spremenljivke. Vrednosti opisnih spremenljivk izražamo z opisi, na primer z besedami, kot opisujemo na primer spol ali stopnjo priljubljenosti predmeta matematika v gimnaziji (Sploh ne maram., Ne maram preveč., Imam še kar rad., Imam zelo rad.), vrednosti številskih spremenljivk zapišemo s števili. Številske spremenljivke so lahko **diskretne** ali **zvezne**. Diskretna spremenljivka lahko zavzame le končno ali števno neskončno mnogo vrednosti (ki lahko tvorijo zaporedje). Navadno te spremenljivke opisujejo lastnosti, ki jih dobimo s preštevanjem, kot je na primer število desetic ipd. Za zvezne spremenljivke velja, da lahko zavzamejo katerokoli vrednost iz določenega intervala. Take spremenljivke navadno dobimo z merjenjem ali izračunavanjem. Zvezna je na primer spremenljivka v Primeru 1, ki meri čas, ki ga dijak nameni domačemu delu pri matematiki tedensko (in bi bil lahko teoretično 15 min = 0,25 ure oziroma katerakoli pozitivna vrednost z danega intervala). Glede na urejenost pa ločimo naslednje 4 vrste spremenljivk:

(1) **imenske ali nominalne**: kjer ni urejenosti, ločimo le enote z različnimi vrednostmi (spol, naziv cigaret, naziv igralnega mesta v košarki, šolski predmeti ...);

(2) **vrstne ali ordinalne**: kjer vrednosti lahko razvrstimo po nekem vrstnem redu (stopnja izobrazbe, stopnja zadovoljstva z danim predmetom, zaključni uspeh ...);

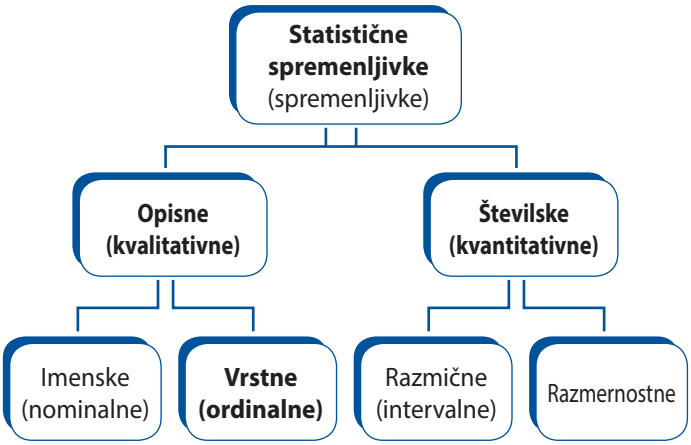
(3) **razmične ali intervalne**: izražene številsko, kjer je poljubni dve vrednosti smiselno odštevati, ne pa deliti, saj vrednosti nimajo pomenske ničle (leto rojstva (0 ni pomenska, saj ne

pomeni, da leta rojstva ni ali da oseba ni bila rojena), temperatura v stopinjah Celzija, rezultati testov znanja (število desetic na testu znanja) ...);

(4) **razmernostne:** izražene številsko, kjer je vrednosti spremenljivke smiselno odštevati in deliti in imajo pomensko ničlo (čas, namenjen matematiki v povprečju na teden, telesna višina, čas reševanja testa, dolžina proizvoda ...).

Urejenost narašča od imenske do razmernostne spremenljivke. Imenske in vrstne spremenljivke so navadno opisne spremenljivke, razmične in razmernostne spremenljivke pa so številske. Vrsta spremenljivke vpliva tako na prikaz podatkov kot na statistične izračune.

V srednješolskih učbenikih in priročnikih zasledimo **različne delitve vrst spremenljivk**. Vrste spremenljivk danih s podatki delimo na opisne (atributivne) in številske (numerične) glede na obliko podajanja vrednosti, torej z opisi ali s številkami, je zapisano v (Felda in sod., 2021; Kmetič in Sirnik, 2010: str. 255); po učnem načrtu za matematiko za program gimnazija dijaki razlikujejo med opisnimi ali kvalitativnimi podatki, vrstnimi ali ordinalnimi ter številskimi ali kvantitativnimi podatki (Žakelj in sod., 2008: str. 37). Štiri skupine glede na urejenost so podane v (Kmetič in Sirnik, 2010: str. 255; Košmelj, 2008; Korenjak Černe, 2007). Razne delitve povzemimo s prikazom na Sliki 4.



Slika 4: Različne delitve vrst spremenljivk v srednješolskih učbenikih.

Včasih se zgodi, da zaradi dolgih opisov spremenljivk le-te nadomestimo s številskimi znaki (na primer učni uspeh: odličen: 5, prav dober: 4, dober: 3, zadosten: 2, nezadosten: 1). Taka spremenljivka je še vedno opisna, saj razlike med uspehom niso enake, glede na stopnjo urejenosti je to še vedno vrstna spremenljivka.

3.2 Urejenost in prikazovanje podatkov

Vrednosti spremenljivk v vzorcu (ali populaciji) navadno uredimo in podatke organiziramo tako, da so čim bolj pregledni. Urejanje in prikazovanje podatkov je odvisno od vrste spremenljivke, ki ji podatki pripadajo ter od števila in raznolikosti samih podatkov.

Vrednosti imenske spremenljivke (1), ki so navadno podane opisno, uredimo tako, da enote v populaciji (ali vzorcu) velikosti n z dano enako vrednostjo (oziroma z enakim opisom) preštejemo. Število enot, ki ustreza dani vrednosti x_i ($i = 1, \ldots, k$ za k različnih vrednosti) imenujemo frekvenca (tudi absolutna frekvenca) z oznako f_i. Podatke take spremenljivke uredimo v **frekvenčno tabelo,** za večjo preglednost pa jih lahko grafično prikažemo.

V šolski praksi zasledimo **neenotno poimenovanje prikazov**. Učni načrt za matematiko za program gimnazija (Žakelj in sod., 2008), priročnik za učitelje (Kmetič in Sirnik, 2010), statistični terminološki slovar (Košmelj in sod., 2002) in uveljavljeni univerzitetni učbenik (Košmelj, 2008) se močno razlikujejo v poimenovanjih prikazov, zahtevanih v učnem načrtu za matematiko (izpustimo pozicijski diagram, ki se uporablja večinoma na osnovnošolskem nivoju):

Preglednica 2: Različna poimenovanja prikazov iz učnega načrta za gimnazije v slovenskem jeziku.

Učni načrt za matematiko	Priročnik za učitelje	Statistični slovar	Visokošolski učbenik
Tortni diagram, tortni prikaz	Krožni prikaz, strukturni krog	Strukturni krog	Strukturni krog
Stolpčni diagram stolpčni prikaz	Diagram s stolpci	Prikaz s stolpci	Razrezani strukturni stolpec
Linijski diagram	Frekvenčni poligon, linijski poligon	Frekvenčni poligon	Poligon, linijski grafikon
Histogram	Histogram	Histogram	Histogram
Škatla z brki	Škatla z brki	Grafikon kvantilov	Okvir z ročaji
Razsevni diagram, razsevni prikaz	Razsevni diagram, razsevni prikaz	Razsevni diagram, korelacijski grafikon	Razsevni grafikon

Tudi učbeniki si v poimenovanjih niso enotni, le ime histogram je enotno. Različna poimenovanja niso problematična, a dijaki več novih besed za pojme lažje pomešajo. Pri definicijah lahko navedemo več imen, vendar se pri obravnavi in uporabi opredelimo le za eno. V prispevku smo se pri opisih v nadaljevanju

Slika 5: Tortni prikaz za spremenljivko Spol iz Primera 1.

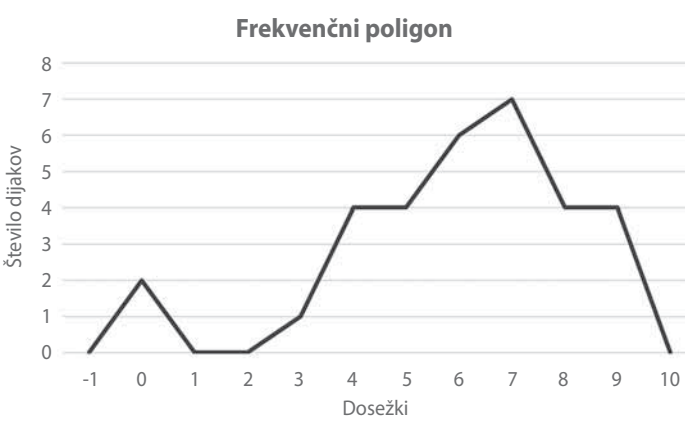
držali imen, zapisanih v gimnazijskem učnem načrtu, razen za linijski diagram smo uporabili ime frekvenčni poligon.

Za grafični prikaz imenskih spremenljivk navadno uporabimo **tortni prikaz**, ki je krog, razdeljen na izseke, katerih ploščine ustrezajo posameznim zastopanim deležem (Slika 5). Krog poudarja, da vrednosti spremenljivk niso nujno razvrščene po vrstnem redu, kar lahko storimo z vrednostmi vrstnih spremenljivk (2) in drugih bolj urejenih v urejenostni lestvici.

Pri bolj urejenih spremenljivkah vrednosti lahko razporedimo v ranžirno vrsto po danem vrstnem redu. Pri tem navedemo vse podatke, tudi če se ponavljajo. Če je precej podatkov z enako vrednostjo, za prikaz v primeru vrstnih spremenljivk lahko uporabimo **stolpčni prikaz** na Sliki 6. Na abscisno os nanesemo različne vrednosti, ki jih spremenljivka lahko zavzame (urejene po vrsti), na ordinatno os pa frekvence (ali tudi relativne frekvence) posameznih vrednosti. Pri stolpčnem prikazu do višine frekvenc vrišemo ozke stolpce, katerih širina je lahko poljubno izbrana.

Slika 6: *Stolpčni prikaz za spremenljivko Priljubljenost iz Primera 1.*

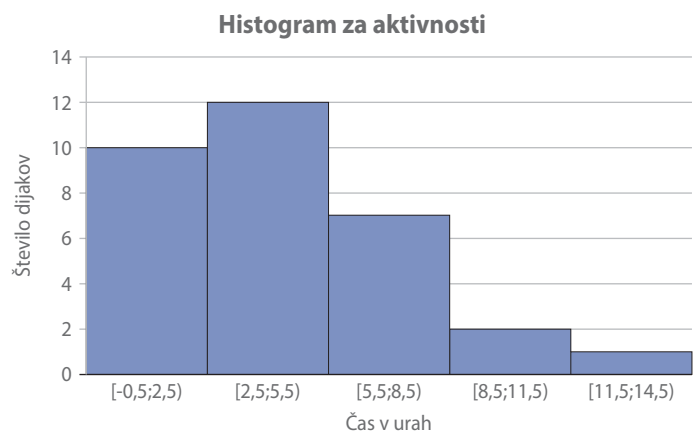
Številske podatke (vrednosti razmičnih (3) ali razmernostnih spremenljivk (4)), razvrščene po frekvencah v frekvenčno tabelo, lahko prikažemo s **frekvenčnim poligonom** (v učnem načrtu linijski diagram) na Sliki 7. Oznake vrednosti na abscisi so enako oddaljene druga od druge. V primeru, ko so frekvence pri mnogih vrednostih na abscisni osi nič ali so le-te pogosto zastopane le enkrat, podatke lahko ob izračunu mer srednjih vrednosti in razpršenosti pregledno predstavimo s škatlo z brki**.** Meje škatle, ki je poljubno široka določata prvi in tretji kvartil, z navpičnico



Slika 7: Frekvenčni poligon za spremenljivko Dosežek iz Primera 1.

v njej predstavimo tudi mediano, brki z vodoravnicama na vsako stran pa se končajo z navpičnicama pri najmanjši in največji vrednosti. Celotno škatlo z brki lahko tudi zasukamo za kot 90 stopinj kot kaže Slika 10.

Pri velikem številu različnih številskih podatkov postane ranžirna vrsta nepregledna in vrednosti spremenljivk pri urejanju razporedimo v navadno enako velike (frekvenčne) razrede. Kadar so podatki razvrščeni v razrede, jih navadno prikazujemo s **histogramom.** Histogram je predstavljen s pravokotniki, ki jih je toliko kot razredov. Vsak pravokotnik ima dolžine stranic enake širini razreda (razliki med zgornjo mejo razreda z_i in spodnjo mejo razreda s_i, $i = 1, \ldots, r$) in frekvenci razreda (Slika 8). Izbira razredov je odvisna od naloge in od količine podatkov. Navadno priporočamo, naj bo razredov od 5 do 15, toliko informacij človek lahko naenkrat absorbira. Za število razredov r lahko uporabimo Sturgesovo formulo: $r = 1 + 3{,}322 \log n$, kjer je n število podatkov, ki jih razvrščamo v razrede (Sturges, 1926). V Primeru 1 s podatki na Sliki 8 je $n = 32$ in dobimo $r = 6{,}0001$. Formula priporoča 6 razredov, vendar v tem primeru meje (ali sredine) razredov ne bi bile celoštevilčne, ali pa bi bil kak razred prazen. Za primer 5 razredov smo blizu priporočljivega števila in sredine razredov so naravna števila (slika 8), kar omogoča hitro računanje mer »na roko«.



Slika 8: Histogram za spremenljivko Aktivnost iz Primera 1.

Razsevni diagram uporabimo za prikaz vrednosti dveh spremenljivk na enoti v populaciji (ali vzorcu) in je prikazan na Sliki 11.

3.3 Mere srednje vrednosti

Tako kot se z urejenostjo spremenljivk veča možnost predstavitve podatkov, podobno z urejenostjo narašča število različnih mer, ki jih danim podatkom določamo. Dijakom predstavimo tri **mere srednje vrednosti** (oziroma mere osredinjenosti po gimnazijskem ali mere sredine po osnovnošolskem učnem načrtu), ki so jih spoznali že v osnovni šoli, v gimnaziji pa skušamo podati razlike med njimi v uporabi.

Z mero srednje vrednosti skušamo z eno vrednostjo čim bolje določiti (opisati) vrednosti vseh podatkov. Za različne vrste spremenljivk in različne namene imamo različne mere. Katero mero bomo uporabili, je odvisno od vrste spremenljivk (imenske, vrstne, razmične, razmernostne) in od tega, čemu naj bi izračunana mera služila.

Od treh mer srednjih vrednosti, ki jih učenci spoznajo že v osnovni šoli, lahko vsem spremenljivkam določimo le modus,

mediane ne moremo določati imenskim spremenljivkam, aritmetične sredine pa niti imenskim niti vrstnim spremenljivkam.

Modus *Mo* lahko določimo vsem spremenljivkam v primeru 1: za Spol je *Mo* = moški, za Priljubljenost sta modusa dva: *Mo* = Ne maram preveč., *Mo* = Imam še kar rad., za Dosežek dobimo *Mo* = 7 (desetic), torej je največ dijakov na testu dobilo med 70 % in 79 %, in za Aktivnost velja *Mo* = 2. V največjem številu so dijaki zapisali, da v povprečju tedensko namenijo 2 uri za učenje matematike.

Medino *Me* določimo spremenljivkam Priljubljenost: *Me* = Ne maram preveč., Dosežek: *Me* = 6 in Aktivnost: *Me* = 3,5. Aritmetično sredino $\overline{x}$ določimo le številskim spremenljivkam. Za Dosežek dobimo $\overline{x}$ = 6 in za Aktivnost $\overline{x}$ = 4,375.

Vsaka od srednjih vrednosti ima prednosti in slabosti. Mediana se na primer ne more računati za imenske spremenljivke, a je lahko boljša od aritmetične sredine, kadar se v veliki količini podatkov pojavljajo kakšne ekstremne vrednosti (osamelci), ki močno popačijo izračun aritmetične sredine. Nekaj prednosti in slaboti smo povzeli po (Korenjak Černe, 2007).

Prednosti modusa so:

- določamo ga vsem vrstam spremenljivk, če se vsaj kakšna vrednost ponovi,
- dobimo ga s preštevanjem enakih vrednosti (brez računanja),
- ni odvisen od vrednosti, ki za populacijo niso tipične.

Pomanjkljivosti modusa so:

- premalo občutljiv za spreminjanje posameznih vrednosti,
- modusov je lahko več in tedaj informacija ni popolna (določanje modusa je lahko vprašljivo tudi pri zaokroževanju vrednosti).

Prednosti mediane so:

- lahko razumljiva,
- za določanje ni treba poznati vseh vrednosti (le vrstni red enot in tiste enote, ki ležijo okoli sredine v ranžirni vrsti).

Pomanjkljivosti mediane so:

- za asimetrične porazdelitve podatkov je mediana različna od večine vrednosti,
- ni zelo občutljiva za spremembe vrednosti (vrednost mediane se spremeni le, če so spremembe vrednosti spremenljivk take, da vrednosti preidejo iz ene polovice ranžirne vrste v drugo).

Prednosti aritmetične sredine:

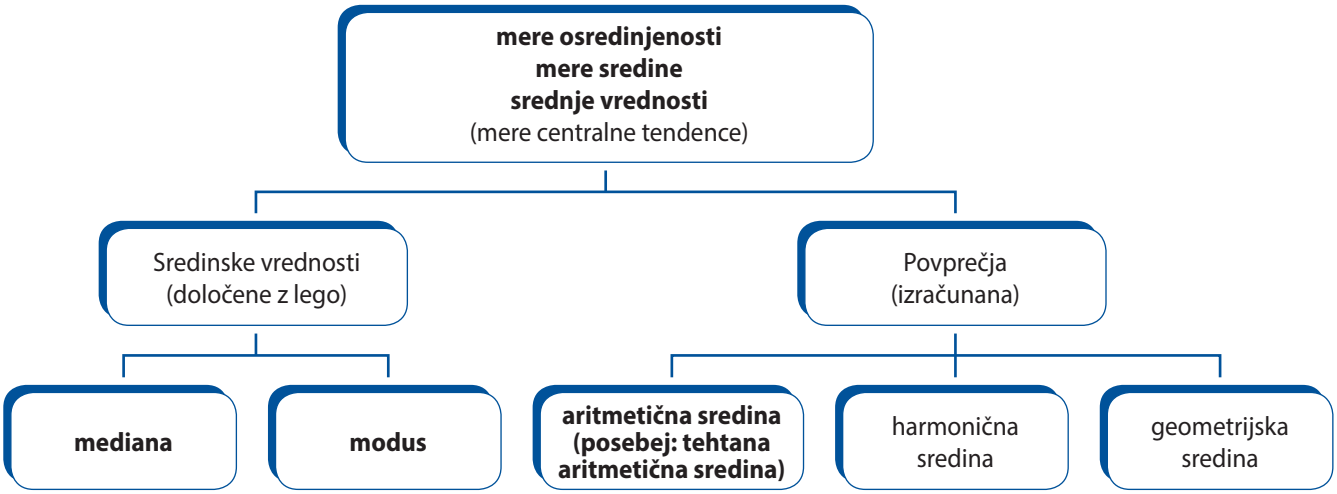
- občutljiva na spremembe vrednosti (nanjo vplivajo vse vrednosti podatkov),
- dobro povzame celoto podatkov,
- računamo jo lahko tudi za velike količine podatkov, razvrščenih v razrede.

Pomanjkljivosti aritmetične sredine:

- izračunamo jo lahko le za številske spremenljivke,
- osamelci (ekstremno velike ali majhne vrednosti) močno popačijo njeno vrednost.

Kadar imamo možnost za dano spremenljivko določiti več mer srednje vrednosti, nam njihova primerjava daje še več informacij o spremenljivki. Spremenljivka Dosežek iz Primera 1 ima vse mere zelo blizu skupaj: *Mo* = 7, *Me* = 6, $\overline{x}$ = 6. Za spremenljivko to pomeni, da je vrednost z največjo frekvenco blizu sredine vseh vrednosti razvrščenih v ranžirno vrsto in da sta obe polovici porazdelitve podatkov dokaj simetrični, saj je tudi aritmetična sredina blizu tej vrednosti. Pri spremenljivki Aktivnost pa se mere bolj razlikujejo med seboj (*Mo* = 2, *Me* = 3,5, $\overline{x}$ = 4,375), kar nakazuje, da porazdelitev podatkov ni simetrična.

Namesto besed modus, mediana ali aritmetična sredina v medijih, pri pouku in v **vsakdanjem življenju pogosteje zasledimo izraz povprečje**. Wikipedija (2021) ima preprosto definicijo: aritmetična sredina ali povprečje je ena izmed srednjih vrednosti. Tudi v srednješolskem učbeniku Matematika 1 (Felda in sod., 2021: str.123) enačijo povprečno vrednost ali povprečje z aritmetično sredino. Korenjak Černe (2007) ravno tako enači pojma: povprečje ali aritmetična sredina; dalje pa mere srednje vrednosti deli na sredinske vrednosti (to sta modus, mediana) in povprečja (to pa so aritmetična sredina ali povprečje, harmonična sredina, geometrijska sredina, ki jih lahko računamo za številske spremenljivke). Povprečje je torej uporabljeno dvakrat: kot sopomenka za aritmetično sredino in kot nadpomenka za številske mere srednje vrednosti. Košmelj (2008) v visokošolskem učbeniku podobno uporabi povprečje za nadpomenko in pravi: Pov-



Slika 9: Mere srednje vrednosti, ki se pojavijo v srednješolskih učbenikih.

prečje se računa le za številske spremenljivke in je vrednost, za katero velja: če bi bili vsi podatki enaki, bi bili enaki povprečju. Predstavimo izraze na Sliki 9.

Morda je sedaj bolj razumljiva definicija v Statističnem terminološkem slovarju (Košmelj in sod., 2002: str. 98), ki pravi, da je povprečje srednja vrednost, ki je izračunana iz vseh vrednosti številske spremenljivke, npr. aritmetična sredina, harmonična sredina, geometrijska sredina, povprečni verižni indeks. Na Wikipedijo ali spletne razlage se pač ne smemo vselej zanesti, na to je dobro opozarjati tudi dijake.

Različno poimenovanje v statistiki dijaka lahko pošteno zmede, še bolj problematične pa so **neenotne definicije** določenih pojmov za vrednosti, ki jih dijaki računajo. Tako se pojavijo v srednješolskih učbenikih različne definicije za **kumulativno frekvenco** ali imenovano tudi kumulativa frekvenc s simbolom F_i:

a) Kumulativna frekvenca F_i, $i = 1, \ldots, r$ podatkov razvrščenih v r razredov nam poda število enot, ki so manjše od zgornje meje i-tega razreda in se določi s formulo:

$$F_i = F_{i-1} + f_i; \quad i = 2, \ldots, r; \quad F_1 = f_1.$$

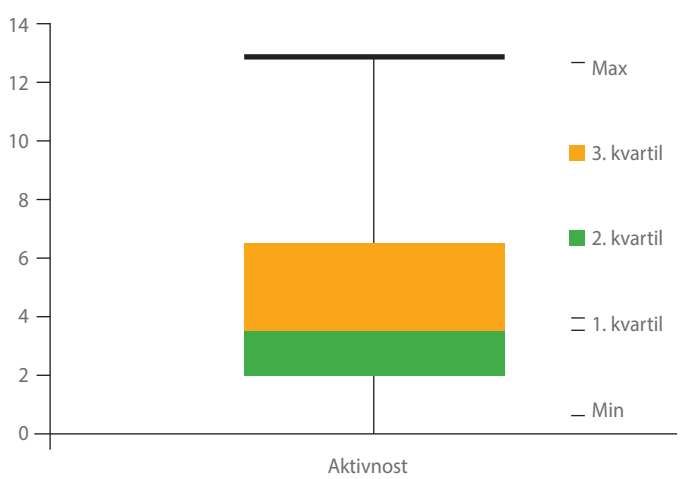
b) Kumulativna frekvenca je število enot F_i, ki imajo manjše vrednosti od spodnje meje i-tega razreda:

$$F_i = F_{i-1} + f_{i-1}; \quad i = 2, \ldots, r; \quad F_1 = 0.$$

S prvo definicijo sovpadajo tudi definicije v učbenikih (Pavlič in sod. 2013), str. 158 in (Felda in sod., 2021). Druga definicija je navedena v priročniku za učitelje (Kmetič in Sirnik, 2008: str. 266) z dodano opombo, da je mogoča tudi definicija z zgornjo mejo razreda. Začetno kumulativno frekvenco 0 najdemo tudi v definiciji spletnega učbenika Vega 1 (2013), kjer preberemo: *Kumulativna frekvenca F_i pove, koliko podatkov je manjših od zgornje meje i-tega razreda. Enaka je vsoti vseh frekvenc do i-tega razreda, vključno z njim.*

3. 4 Mere razpršenosti

Z merami razpršenosti želimo povedati, kako so razvrščeni številski podatki okrog mere srednje vrednosti; ali so podatki blizu srednje vrednosti (majhna razpršenost) ali daleč (velika razpršenost). Obravnavamo naslednje mere razpršenosti podatkov: variacijski razmik (VR), medčetrtinski razmik (Q) in standardni odklon (σ), ki jih lahko določimo le številskim spremenljivkam.



Slika 10: Škatla z brki za podatke spremenljivke Aktivnost v Primeru 1 s kvartili na mejah obarvanega polja, ki kažejo nesimetričnost.

V mnogih srednješolskih učbenikih ni natančne definicije za kvartile, ki so potrebni za izračun medčetrtinskega razmika Q, ki je predpisan v učnem načrtu. Kvartili so uvedeni tudi v obravnavo pri matematičnih vsebinah v osnovni šoli in so predpisani v predmetnem izpitnem katalogu za poklicno maturo. Z njimi lahko narišemo škatlo z brki.

Za pojem kvartil so v učbenikih raznolike trditve:

- Kvartil je vsaka od treh vrednosti številske spremenljivke, s katerimi so opazovane enote, urejene od najmanjše do največje, razdeljene na 4 enake dele (Košmelj in sod., 2002).
- Trije kvartili Q_1, Q_2 in Q_3 razdelijo podatke v štiri skupine tako, da je v vsaki skupini četrtina vseh podatkov (Vega 1, 2013).
- Mediana razdeli podatke na dve polovici, lahko pa razdelimo tudi ti dve polovici in dobimo 4 enako močne skupine podatkov. Mejnike posameznih skupin imenujemo kvartile (Pavlič in sod., 2013: str. 166).
- 1. kvartil je mediana prve oz. spodnje polovice podatkov (Pavlič in sod., 2013: str. 166).
- 1. kvartil je mediana vseh podatkov, ki so v nizu dosežkov, urejenih po velikosti, levo od mediane vseh podatkov (Felda in sod., 2021).
- 1. kvartil je vrednost opazovane spremenljivke, od katere ima 25 % enot manjše in 75 % enot večje vrednosti (Košmelj in sod., 2002).

Omenjene definicije so preveč splošne, saj na primer na množici s 15 podatki v ranžirni vrsti (ki se lahko tudi ponavljajo) ne moremo določiti treh vrednosti kvartilov, ki razdelijo podatke v 4 skupine tako, da je v vsaki skupini natanko četrtina podatkov (da ima 25 % enot manjše vrednosti in 75 % večje vrednosti). Dijakom definicije ne omogočajo konkretnega izračuna kvartilov na posameznih množicah podatkov. Statistični terminološki slovar (Košmelj in sod. 2002) podaja definicijo za velike količine podatkov, toda v srednješolskih učbenikih, kjer dijaki pojme spoznavajo na majhnih količinah, da jih samostojno lahko določijo, je definicija za majhne množice podatkov potrebna. Žal so v nekaterih učbenikih tudi izračuni za kvartile nepravilni.

V večini učbenikov je podana natančna definicija za 2. kvartil, imenovan tudi mediana ali središčnica, vendar za ostala dva kvartila v učbenikih ni podane natančne definicije za enolično določanje. Brez uporabe pojma mediane bi lahko podali naslednjo definicijo:

1. kvartil je vrednost z oznako Q_1, od katere je vsaj 25 % podatkov manjših ali enakih tej vrednosti in vsaj 75 % podatkov večjih ali enakih tej vrednosti Q_1. *(to definicijo najdemo v Vega 1, 2013).*

2. kvartil je vrednost Q_2, od katere je vsaj polovica vseh podatkov manjših ali enakih tej vrednosti in vsaj polovica podatkov večjih ali enakih tej vrednosti (2. kvartil ima tudi ime mediana $Q_2 = M_e$).

3. kvartil je vrednost z oznako Q_3, od katere je vsaj 75 % podatkov manjših ali enakih tej vrednosti in vsaj 25 % podatkov večjih ali enakih tej vrednosti Q_3.

Za enolično določanje je treba še dodati, da v primeru, ko po izbrani definiciji kvartilu ustreza vsako število med dvema vrednostma spremenljivke x_k in x_{k+1} v ranžirni vrsti, zanj uporabimo vrednost $(x_k + x_{k+1})/2$.

Za spremenljivko Dosežek v Primeru 1 lahko določimo variacijski razmik kot razliko med največjo in najmanjšo vrednostjo: $VR = 9$, medčetrtinski razmik: $Q = Q_3 - Q_1 = 2{,}5$ in standardni odklon $\sigma = 2{,}24$, za spremenljivko Aktivnost pa vrednosti $VR = 13$, $Q = 4{,}5$ in $\sigma = 3{,}13$.

Mer razpršenosti ni smiselno primerjati med seboj, saj nam variacijski razmik kaže razliko med največjim in najmanjšim podatkom, medčetrtinski razmik kaže odmik polovice podatkov od mediane in standardni odklon predstavlja koren povprečja kvadratov razdalj posameznih podatkov od aritmetične sredine.

3.5 Empirična preiskava v obliki statistične naloge

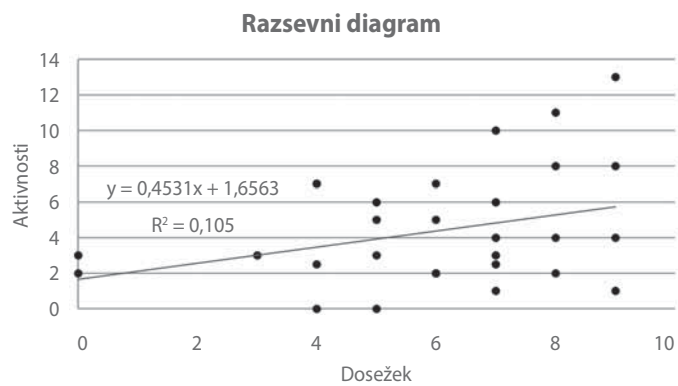
Iskanje povezav dveh ali več spremenljivk v učbenikih ni posebej obdelano. A je iskanje odvisnosti ali povezanosti spremenljivk navadno cilj empiričnih statističnih preiskav. Tako je dobro, da napravimo kak zgled, preden damo dijakom samostojno statistično preiskavo. Na spletni strani (Drobnič Vidic, 2020) skozi urejanje, prikazovanje podatkov, določanja mer srednje vrednosti in variabilnosti podatkov iz Primera 1 gradimo statistično preiskavo, ki jo predstavimo dijakom kot statistično nalogo ob koncu obdelane statistične vsebine. Primer 1 nadgradimo na primer tako:

Učitelj 1. b razreda gimnazije Bič iz Primera 1 si je v šolskem letu 20/21 zaradi učenja na daljavo zadal vprašanje, ali spol, priljubljenost matematike (kot predmeta) pri dijakih ali njihove samostojne aktivnosti vplivajo na dosežek pri matematičnem testu. Izvedel je anketo med dijaki, podatke pridobil in uredil, prikazal in obdelal ter iskal morebitne povezave. Zapiši ugotovitve, ki jih je na podlagi podatkov v Primeru 1 učitelj lahko dobil!

Podatki, ki jih je učitelj pridobil in jih dijaki pri pouku ali samostojno skozi učne ure statističnih vsebin obdelajo, kratko pa smo jih predstavili tudi v prispevku, kažejo, da ima razred kot celota pri njegovem predmetu dokaj slabo oceno, saj je aritmetična sredina dosežkov na testu 6 desetic odstotkov (kar je med 60 odstotkov in 69 odstotkov celotnih točk in ustreza navadno oceni dobra 2 ali slaba 3. Mediana kaže, da je polovica vseh dijakov dosegla tak dosežek ali manj! Ugotovil je tudi, da je polovica dijakov dosegla uspeh med 5 desetic odstotkov in 7,5 desetic odstotkov, četrtina pa je dosegla 5 desetic ali manj, kar določajo medčetrtinski razmiki na sliki 10. Znanje spodnje četrtine dijakov je torej zelo šibko. Toda kaj je vzrok za slabo znanje na testu? Odgovor na to vprašanje nam da lahko le ugotavljanje povezanosti in odvisnosti spremenljivk, kar pa je za dijake prvih letnikov precej trd oreh.

Razsevni diagram znajo dijaki sicer brati že iz osnovne šole, saj se zahtevajo tudi na NPZ (Državni izpitni center, NPZ), kar predstavlja prvi stik s povezanostjo. Če dijaki prikažejo vrednosti dveh številskih spremenljivk (dva podatka na vsaki enoti) z razsevnim diagramom in ležijo podatki na neki premici, lahko zaključijo, da podatki spremenljivk kažejo linearno odvisnost (povezanost). Če pa so podatki blizu neke premice, so blizu linearne odvisnosti. Mera za to, kaj pomeni pojem »blizu neke premice« je na primer vzorčni korelacijski koeficient, za njegovo izpeljavo pa potrebujemo znanje odvodov, zato je **natančnejša obravnava povezanosti spremenljivk bolj primerna za 4. letnik**. Če obdelamo statistiko v 1. letniku, potem dijake le seznanimo z računalniškim izrisom take premice (t. i. regresijske premice) v razsevnem diagramu. Tako pravzaprav dijaki nekih oprijemljivih postopkov za ugotavljanje povezanosti pri številskih spremenljivkah tedaj še nimajo. Glede na razsevni diagram lahko postavljajo neke domneve o povezanosti, kakšna je zanesljivost njihovih domnev, pa ostane skrito.

Podatki dijakov v Primeru 1 za spremenljivki Dosežek in Aktivnost so vrisani v razsevni diagram na sliki 11. Točke so precej razpršene in niso nanizane blizu ene same premice, zato diagram ne nakazuje domneve, da bi bili ti dve spremenljivki linearno povezani, torej ne moremo trditi, da samostojno domače delo za matematiko vpliva na slab izid testa. Ali na dosežek morda vpliva spol ali priljubljenost predmeta?



Slika 11: Razsevni diagram s premico za možno povezanost dveh številskih spremenljivk.

Povezanost dveh spremenljivk, od katerih je vsaj ena opisna (imenska ali vrstna) z malo različnimi vrednostmi, lahko raziskujemo grafično (Kmetič in Sirnik, 2010: str. 302) ali z več frekvenčnimi tabelami. Pri eni opisni spremenljivki (z malo različnimi vrednostmi) in drugi številski spremenljivki lahko za vsako različno vrednost opisne spremenljivke določimo frekvenčno tabelo s pripadajočimi vrednostmi številske spremenljivke ter izračunamo aritmetično sredino in standardni odklon. S primerjavo teh mer lahko podamo določene domneve.

Primerjajmo spremenljivki Priljubljenost in Dosežek iz Primera 1. Prva je opisna, druga številska. Ker ima Priljubljenost le 4 različne vrednosti, lahko določimo frekvenčno tabelo za Dosežek pri posameznih enotah z enako vrednostjo opisne spremenljivke in povprečni dosežek za te enote (določimo aritmetično sredino). Dobimo 4 frekvenčne tabele in izračunamo povprečni dosežek 4,4, pri enotah (dijakih), ki matematike sploh ne marajo, povprečni dosežek 4,9 pri dijakih, ki matematike ne marajo preveč, povprečni dosežek 7,0 pri dijakih, ki imajo matematiko še kar radi in povprečni dosežek 9 pri dijakih, ki imajo matematiko zelo radi. Vrednosti povprečij nakazujejo, da pri naraščanju priljubljenosti do predmeta tudi dosežek pri testu tega predmeta narašča. Podoben zaključek lahko podamo iz slike 12. Seveda zopet ne vemo, kako zanesljive so naše domneve o povezanosti.

Slika 12: Prikaz možne povezanosti številske in opisne spremenljivke, kjer so boljši dosežki prikazani z bolj temno barvo.

Prikazi nakazujejo, da dosežek na testu 1. b razreda najbrž ni odvisen toliko od samostojnih matematičnih aktivnosti pri dijakih, kot od priljubljenosti tega predmeta med dijaki tega razreda. O zanesljivosti takih domnev seveda ne moremo povedati nič.

Dijaki nato lahko za samostojno domače delo izvedejo podobno statistično nalogo, kjer podatke pridobijo sami:

Statistična naloga:

Sam naredi anketo med sošolci z vprašanji (4–6) o neki temi, ki te zanima. Vprašanja naj se nanašajo naj vsaj 3 različne vrste spremenljivk, pri katerih te bo zanimala tudi kakšna povezanost pri odgovorih nanje. Vprašanja pošlji po e-pošti ali telefonu in pridobi podatke, postopek v raziskavi opiši. Uredi podatke in jih primerno predstavi (tudi z delitvijo v razrede). Lahko si pomagaš s programom Microsoft Excel. Določi možne mere srednje vrednosti in mere razpršenosti in jih interpretiraj. Skušaj najti povezavo med spremenljivkami. Podaj ugotovitve tvoje raziskave.

Zaključek

Hitro razvijajoče in vsestransko uporabne statistične vsebine mladi začnejo spoznavati že v vrtcu in v osnovni šoli. Da bi v srednji šoli znanje v kratkem času, namenjenim tem vsebinam, čim učinkoviteje nadgradili, lahko celotno vsebino predelamo z enim samim primerom in hkrati gradimo primer statistične naloge, ki naj bi jo dijaki izvedli sami. Pri tem v poplavi različnih imen pazimo na dosledno uporabo izbranega poimenovanja in definicije, ki bodo omogočala pravilen izračun statističnih mer. Z dijaki razpravljamo o interpretaciji rezultatov in se neprestano učimo, da delamo čim manj napak.

Literatura

Bahovec, E., Bregar, K., Čas, M. in sod. (1999). *Kurikulum za vrtce*. Dostopno na: https://www.gov.si/assets/ministrstva/MIZS/Dokumenti/Sektor-za-predsolsko-vzgojo/Programi/Kurikulum-za-vrtce.pdf

Drobnič Vidic, A. (2020). Obdelava podatkov in statistika. Pouk na daljavo. Dostopno na: https://skupnost.sio.si/course/view.php?id=65&section=1.

Državni izpitni center: Nacionalno preverjanje znanja. Dostopno na: https://www.ric.si/preverjanje_znanja/predmeti/matematika3/:

Felda, D., Bon Klanjšek, M., Škrlec, M., Dvoržak, B. in sod. (2021). *Matematika 1, učbenik za gimnazije*. Državna Založba Slovenije (DZS), Ljubljana.

Kmetič, S. in Sirnik, M. ur. (2010). *Posodobitve pouka v gimnazijski praksi*. Zavod RS za šolstvo.

Korenjak Černe, S. (2007). *Statistika 1: gradiva.* Ekonomska fakulteta. Pridobljeno 28 februar 2019. Dostopno na: https://pdfslide.tips/documents/6-ranzirna-vrsta-rang-kvantilni-rang-in-s-korenjak-cerne-statisticne.html

Košmelj K. (2008). *Uporabna statistika*. Biotehniška fakulteta, Ljubljana.

Košmelj, B., Arh, F., Doberšek-Urbanc, S., Ferligoj, A. in Omladič, M. (2002). *Statistični terminološki slovar*. Statistično društvo Slovenije.

Pavlič, G., Kavka, D., Rugelj, M. Šparovec, J. in sod. (2013). *LINEA NOVA, matematika za gimnazije*. Modrijan založba d. o. o.

Sturges, H.A. (1926). The choice of class interval. *Journal of the American Statistical Association*, 21 (153): 65–66.

Vega 1, i-učbenik za matematiko v 1. letniku gimnazij (2013). Dostopno na: https://eucbeniki.sio.si/vega1/index.html

Wikipedia: Aritmetična sredina (Slo). Dostopno na: https://sl.wikipedia.org/wiki/Aritmeti%C4%8Dna_sredina

Žakelj, A., Bon Klanjšek, M., Jerman, M., Kmetič, S., Repolusk, S., Ruter, A. (2008). *Učni načrt: Matematika - Gimnazija; Splošna, klasična in strokovna gimnazija*. Učni načrt, obvezni predmet in matura (560 ur). Ministrstvo za šolstvo in šport: Zavod RS za šolstvo, Ljubljana. Dostopno na: http://eportal.mss.edus.si/msswww/programi2018/programi/media/pdf/un_gimnazija/un_matematika_gimn.pdf

Kontrolno ocenjevanje na pisnem izpitu iz matematike na poklicni maturi

mag. Mojca Suban
Zavod RS za šolstvo

Izvleček

Ocenjevanje pol na pisnem izpitu iz matematike na poklicni maturi poteka tako, da učitelji na srednjih šolah ovrednotijo izpitne pole po *Navodilih za ocenjevanje*, ki jih pripravi Državna predmetna komisija za poklicno maturo za matematiko (DPK PM MAT). Za spremljanje kakovosti ocenjevanja pisnega izpita je bilo v letih 2009, 2011, 2013, 2015, 2017 in 2019 na spomladanskem roku na vzorcu izpitnih pol izvedeno kontrolno ocenjevanje. V članku je predstavljena metodologija kontrolnega ocenjevanja, izbira vzorca, rezultati primerjalne analize točk pri ocenjevanju na šoli in kontrolnem ocenjevanju ter primer naloge, kjer dodeljene točke pri ocenjevanju na šoli in točke pri kontrolnem ocenjevanju ne sovpadajo. Nakazani so morebitni vzroki za razlike pri ocenjevanju na šoli in kontrolnem ocenjevanju ter nadaljnja usmeritev spremljanja kakovosti ocenjevanja izpitnih pol na poklici maturi iz matematike.

Ključne besede: poklicna matura, matematika, pisni izpit, kontrolno ocenjevanje

Assessment on the Written Examination in Mathematics at the Vocational Matura

Abstract

The assessment on the written examination in mathematics at the vocational matura is carried out in such a way that secondary school teachers evaluate the written exam papers according to the Assessment Instructions prepared by the National Mathematics Commission for the Vocational Matura (DPK PM MAT). In order to monitor the quality of assessment on the written examination, a control assessment was performed on a sample of examination papers in 2009, 2011, 2013, 2015, 2017 and 2019. The article presents the methodology of double assessment, the sample selection, the results of a comparative analysis of scores from the school assessment and the control assessment, and an example of a task where the scores assigned in the school assessment did not coincide with the scores assigned in the control assessment. Possible reasons for the differences in the school assessment and the control assessment are indicated, as well as the future direction of monitoring the quality of the assessment of exam papers in mathematics at the vocational matura.

Keywords: vocational matura, mathematics, written examination, double assessment

Uvod

Poklicna matura se v Sloveniji izvaja od leta 2002. Od takrat redno poteka tudi izpit iz poklicne mature iz matematike, in sicer v treh izpitnih rokih: spomladanskem, jesenskem in zimskem. Pisni izpit iz matematike poteka za vse kandidate v državi na isti dan, ki je predviden z maturitetnim koledarjem. Vsi kandidati pišejo enako izpitno polo pod enakimi pogoji. Izpitna pola je sestavljena iz dveh delov. Od leta 2017 prvi del vsebuje 11 nalog. Drugi del vsebuje tri naloge, izmed katerih kandidat izbere in reši dve. Število točk, ki jih kandidat lahko doseže, je 70, od tega 50 v prvem delu in 20 v drugem delu. Pred letom 2017 je prvi del vseboval 9 nalog, drugi del pa prav tako tri, izmed katerih je kandidat izbral in rešil dve. Število točk, ki jih je kandidat lahko dosegel, je bilo 70, od tega 40 v prvem delu in 30 v drugem delu. Ustni izpit je interne narave in praviloma poteka na šoli, ki jo je kandidat obiskoval. Ovrednotenje izpitnih pol pisnega izpita izvajajo učitelji matematike na šolah v skladu z *Navodili za ocenjevanje*, ki jih pripravi Državna predmetna komisija za poklicno maturo za matematiko (DPK PM MAT). Pridobljene točke tajnik šolske maturitetne komisije za posameznega kandidata vnese v aplikacijo. Za ugotavljanje kakovosti ocenjevanja pisnega izpita je DPK PM MAT v sodelovanju z učitelji na spomladanskem roku poklicne mature v letih 2009, 2011, 2013, 2015, 2017 in 2019 ponovno ocenila vzorec izpitnih pol in primerjala točke s točkami, ki so bile kandidatu dodeljene na šoli.

Metodologija in vzorec

Ko se na dan, ki je z maturitetnim koledarjem določen za pisni izpit, pisanje izpita na šoli zaključi, tajnik šolske maturitetne komisije v skladu z izpitnim redom pripravi gradivo za prevzem, ki ga opravi Državni izpitni center (RIC). Vsako leto je nekaj šol s strani RIC zaprošeno, da glede na kriterije, ki jih opredeli RIC, izberejo vzorec izpolnjenih izpitnih pol in jih fotokopirajo. Število pol, ki jih mora posamezna šola izbrati v vzorec, je različno med šolami in tudi med izpitnimi roki. Na spomladanskem roku je to število praviloma med 8 in 10 za posamezno šolo.

Fotokopije izpitnih pol so podpora moderaciji *Navodil za ocenjevanje*. Moderacijo izvedejo člani DPK PM MAT in skupina učiteljev, ki poučujejo v programih srednjega strokovnega izobraževanja in pripravljajo dijake na poklicno maturo iz matematike. V preteklih letih so člani DPK PM MAT in sodelujoči učitelji na moderaciji prostovoljno opravili kontrolno ocenjevanje določenega števila izpitnih pol iz moderacije. V Preglednici 1 je predstavljeno število ponovno ocenjenih izpitnih pol (število izpitnih pol na kontrolnem ocenjevanju) za spomladanske izpitne roke v letih 2009, 2011, 2013, 2015, 2017, 2019. Leti 2017 in 2019 z vidika števila ponovno ocenjenih pol nekoliko odstopata navzdol glede na prejšnja leta.

Preglednica 1: Število izpitnih pol pri kontrolnem ocenjevanju za spomladanske izpitne roke v letih 2009, 2011, 2013, 2015, 2017, 2019.

Spomladanski izpitni rok za leto	2009	2011	2013	2015	2017	2019
Število ponovno ocenjenih izpitnih pol	170	185	203	171	92	62

Podatki o točkah, dodeljenih na rednem ocenjevanju na šoli, in podatki o številu točk, dodeljenih na kontrolnem ocenjevanju za isto izpitno polo se v nadaljevanju med seboj primerjajo.

Rezultati

Korelacijo med številom točk, dodeljenih pri rednem ocenjevanju, in številom točk, dodeljenih pri kontrolnem ocenjevanju iste izpitne pole, smo ugotavljali s pomočjo indeksa objektivnosti[1]. Rezultati te primerjave so podani v Preglednici 2. Rezultati kažejo na visoko ujemanje med rednim in kontrolnim ocenjevanjem. Med posameznimi leti ni opaziti bistvenih razlik.

Preglednica 2: Indeksi objektivnosti za dvojno ocenjevanje pisnega izpita iz matematike na poklicni maturi za posamezne izpitne roke. (vir: RIC)

Spomladanski izpitni rok za leto	**Indeks objektivnosti za 1. del izpitne pole**	**Indeks objektivnosti za 2. del izpitne pole**	**Indeks objektivnosti za izpitno polo v celoti**
2009	0,97	0,96	0,98
2011	0,96	0,97	0,98
2013	0,97	0,95	0,97
2015	0,97	0,96	0,98
2017	0,95	0,95	0,96
2019	0,98	0,95	0,98

Indekse objektivnosti so bili izračunani na RIC. Za bolj poglobljeno analizo smo nato naredili še dodatno statistično analizo. Kakovost ocenjevanja smo opazovali tudi skozi izračunane razlike med številom točk, dodeljenih na rednem ocenjevanju na šoli, in številom točk, dodeljenih na kontrolnem ocenjevanju za isto izpitno polo. V Preglednici 3 so za vsako leto, ko se je kontrolno ocenjevanje izvajalo, navedeni aritmetična sredina razlik, standardni odklon razlik, mediana in modus razlik skupnega števila točk. Pri branju rezultatov je treba upoštevati naslednje: če je razlika pozitivno število, je bil kandidat bolje ocenjen na šoli, če je razlika negativno število, je bil kandidat bolje ocenjen pri kontrolnem ocenjevanju. Rezultati kažejo, da so aritmetične sredine razlik števila točk na rednem ocenjevanju in števila točk na kontrolnem ocenjevanju pozitivna števila z izjemo dvojnega ocenjevanja v letu 2019.

Preglednica 3: Vrednosti za izračunane razlike med skupnim številom točk, dodeljenih na rednem ocenjevanju na šoli in številom točk, dodeljenih na kontrolnem ocenjevanju za vzorec izpitnih pol.

Spomladanski izpitni rok za leto	**Aritmetična sredina razlik $\bar{x}$**	**Standardni odklon razlik σ**	**Mediana razlik**	**Modus razlik**
2009	0,68	2,62	1	0
2011	0,44	3,38	0	0, -2
2013	1,71	3,38	2	1
2015	0,57	3,26	0	0
2017	0,80	3,80	0	0
2019	-0,24	3,13	0	0

1 Indeks objektivnosti (IO) je mera za korelacijo dveh nizov podatkov (meri soodvisnost dveh nizov podatkov) in lahko zavzema vrednosti od –1 do 1. Kadar izdelek ocenjujeta dva ocenjevalca, lahko izračunamo IO med prvim in drugim ocenjevanjem. IO govori o tem, koliko se ocenjevalci ujemajo pri ocenjevanju istega izdelka. Če je ocenjevanje pravično, mora biti ta povezanost zelo tesna – visok indeks objektivnosti. IO je Izračunan kot Pearsonov korelacijski koeficient med ocenama dveh neodvisnih ocenjevalcev. (Vir: RIC)

Preglednica 4: Aritmetične sredine števila točk na 1. delu izpitne pole, 2. delu izpitne pole in skupnega števila točk na pisnem delu izpita za redno ocenjevanje in za kontrolno ocenjevanje

Spomladanski izpitni rok za leto	Aritmetična sredina števila točk na 1. delu izpitne pole pri rednem ocenjevanju	Aritmetična sredina števila točk na 1. delu izpitne pole pri kontrolnem ocenjevanju	Aritmetična sredina števila točk na 2. delu izpitne pole pri rednem ocenjevanju	Aritmetična sredina števila točk na 2. delu izpitne pole pri kontrolnem ocenjevanju	Aritmetična sredina skupnega števila točk pri rednem ocenjevanju	Aritmetična sredina skupnega števila točk pri kontrolnem ocenjevanju
2009	23,63	23,00	17,50	17,18	41,13	40,18
2011	19,71	19,42	15,98	15,88	35,69	35,25
2013	24,31	23,63	16,83	15,90	41,14	39,52
2015	19,99	19,97	19,05	18,51	39,05	38,49
2017	32,17	31,61	11,77	11,53	43,95	43,14
2019	31,50	31,71	12,83	12,87	44,34	44,58

Za dodaten vpogled v kakovost ocenjevanja pisnega izpita smo izračunali aritmetične sredine števila točk na 1. delu izpitne pole, 2. delu izpitne pole in skupnega števila točk za redno ocenjevanje in za kontrolno ocenjevanje (Preglednica 4). Razen v primerih 2013 *1. del*, 2017 *1.del* in 2019 *1. del*, *2. del, skupaj* je aritmetična sredina števila točk pri rednem ocenjevanju večja od aritmetične sredine točk pri kontrolnem ocenjevanju.

Interpretacija in razprava

Pri interpretaciji rezultatov je nujno treba upoštevati omejitve vzorca, na katerem se je izvajalo dvojno ocenjevanje. Med omejitvami omenimo velikost in značilnosti vzorca, ki sta pogojena s kriteriji RIC in zmožnostjo sodelujočih na moderaciji, da kontrolno ocenijo čim večje število pol.

Rezultati dvojnega ocenjevanja vzorca izpitnih pol iz matematike pokažejo, da so indeksi objektivnosti ocenjevanja pisnega izpita na poklicni maturi iz matematike na šolah zelo visoki. Ob tem ne kaže pozabiti na dejstvo, da je v primeru ocenjevanja izpitnih pol na poklicni maturi situacija drugačna, kot je v primeru ocenjevanja izpitnih pol pri splošni maturi ali vrednotenja pisnih preizkusov na nacionalnem preverjanju znanja (NPZ) v osnovni šoli.

V primeru splošne mature »anonimne izdelke kandidatov ocenjujejo posebej usposobljeni zunanji ocenjevalci v skladu z vnaprej pripravljenimi navodili za ocenjevanje, enakimi za vse kandidate. Zunanje ocenjevalce za predmete splošne mature imenuje RIC na podlagi javnega razpisa, ki ga v novembru objavi v Šolskih razgledih (dokler so še izhajali, t. j. do 15. 6. 2018) in na spletni strani RIC. Pogoje za zunanje ocenjevalce določa 33. člen Zakona o maturi« (RIC).

Pisne preizkuse pri NPZ vrednotijo učitelji posameznih predmetov, in sicer »pri vrednotenju preizkusov znanja učencev 6. razreda sodelujejo učitelji, ki izpolnjujejo pogoje za poučevanje posameznih predmetov v 6. razredu (lahko tudi razredni učitelji), preizkuse devetošolcev pa vrednotijo učitelji, ki poučujejo v tretjem triletju. Preizkuse vrednotijo po navodilih, ki jih za posamezni predmet pripravijo predmetna komisija in pomočniki glavnega ocenjevalca. Med vrednotenjem učiteljem pri morebitnih vsebinskih vprašanjih kakor do sedaj pomagajo pomočniki glavnega ocenjevalca« (RIC). Vrednotenje poteka elektronsko v posebnem programu Scoris Assessor.

Pri poklicni maturi »pisni izpit ocenjujejo učitelji posameznega predmeta na šoli. Vsak kandidat dobi šifro, tako da sta njegovo ime in priimek ocenjevalcu neznana« (RIC).

Med nekaterimi možnimi vzroki za odstopanja med rednim in kontrolnim ocenjevanjem pisnega izpita iz matematike bi lahko navedli:

- **Neupoštevanje moderiranih *Navodil za ocenjevanje***

  Navodila za ocenjevanje so sestavljena iz splošnih navodil, ki niso vezana na posamezno nalogo ali v nalogah zajeto snov, in navodil za vrednotenje nalog na posameznem izpitnem roku. Do odstopanj pri upoštevanju splošnih navodil je prihajalo v nekaterih primerih, ki so bili povezani z zapisovanjem merskih enot, uporabo znaka ≐ (je približno), predpisani natančnosti, poenostavljanjem rezultatov, označevanjem količin na skicah, risanjem grafov. DPK PM MAT je ugotovitve v zvezi z odstopanji upoštevala in posodobila splošni del *Navodil za ocenjevanje* (npr. iz navodil je izpuščeno navodilo, da mora biti zapis ≐ obvezen). Prav tako se je komisija pri navodilih za ocenjevanje posameznih nalog v primerih, kjer bi bilo možno različno razumevanje, odločila za dodatna navodila (npr. Če kandidat nikjer ne zapiše enot, se mu v celoti odšteje ena točka.)

- **Nerazumevanje moderiranih *Navodil za ocenjevanje***

  DPK PM MAT si je prizadevala, da bi v moderiranih navodilih zapisala vse napotke ocenjevalcem, ki bi omogočili enotno ocenjevanje izpitnih pol. V primerih, kjer je bilo mogoče pričakovati, da bodo kandidati uporabili več različnih (pravilnih) načinov reševanja, so bili med navodili razdelani in točkovani različni možni načini reševanja. V primerih, kjer je bilo pričakovati, da bodo kandidati pogosto naredili napako in se je

to potrdilo pri moderaciji, so bila zapisana navodila za točkovanje v teh primerih v obliki opomb. DPK PM MAT je pri strokovnih srečanjih z učiteljih na seminarjih, študijskih srečanjih in konferencah redno pridobivala povratne informacije o kakovosti *Navodil za ocenjevanje* in sporočila učiteljev skrbno premislila ter upoštevala pri pripravi nadaljnjih dokumentov.

- **Površnost in nezbranost pri ocenjevanju**

  Najmanjše odstopanje pri ocenjevanju izpitnih pol je bilo opaziti pri ocenjevanju nalog objektivnega tipa. To so bile naslednje naloge: 3. naloga 1. dela na spomladanskem roku 2009 (naloga alternativnega tipa), 1. naloga 1. dela na spomladanskem roku 2013 (naloga z več možnimi izbirami), 2. naloga 1. dela na spomladanskem roku 2015 (naloga alternativnega tipa), 5. naloga 1. dela na spomladanskem roku 2019 (naloga alternativnega tipa). Vendar je kljub pričakovanju, da pri teh nalogah ne bo nobenih odstopanj pri vrednotenju, pri vsaki od prej navedenih nalog vsaj v enem primeru zabeleženo odstopanje.

- **Pretirano ocenjevanje v korist kandidata na šoli**

  Rezultati dvojnega ocenjevanja kažejo, da so večinoma kandidati bolje ocenjeni pri rednem ocenjevanju z izjemo dvojnega ocenjevanja v letu 2019[2]. To bi bila lahko posledica prekomernega ocenjevanja v korist kandidata, kar na dolgi rok lahko neugodno vpliva na kakovost ocenjevanja pisnega izpita iz matematike. Pri tem je treba opozoriti, da se lahko ocenjevanje na pisnem izpitu poklicne mature v kakšnem primeru razlikuje od običajne prakse ocenjevanja učitelja v razredu. Učitelj v razredu dijaka pozna, ima boljši vpogled v njegovo znanje, vendar pa je koristno, da se dijaki seznanijo z ocenjevalnim maturitetnim standardom že pri pouku.

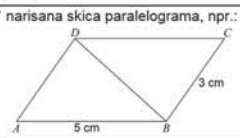
- **(Pre)kratek čas, ki je namenjen ocenjevanju**

  Z maturitetnim koledarjem je vsako leto določeno, kdaj se piše pisni izpit iz matematike, kdaj potekajo ustni izpiti in kdaj so kandidati seznanjeni z uspehom na poklicni maturi. Znotraj intervala med pisanjem izpitne pole in objavo rezultatov se čas za vrednotenje izpitnih pol zoži na čas med objavo moderiranih *Navodil za ocenjevanje*, ki jih pripravi DPK PM MAT, in rokom, ko mora tajnik šolske maturitetne komisije vnesti podatke v aplikacijo. Ta čas je lahko nekaj dni, pri tem pa je treba upoštevati, da morajo nekateri ocenjevalci včasih oceniti veliko število pol (odvisno od velikosti šole, števila zaključnih razredov, števila kandidatov na šoli, ki so opravljali poklicno maturo iz matematike, števila učiteljev matematike na šoli). Prav tako ta čas sovpada z zaključevanjem vzgojno-izobraževalnega procesa v nezaključnih letnikih, kar prinaša dodatno delo in stres.

V nadaljevanju kot primer naloge, pri kateri so bila zabeležena odstopanja med rednim in kontrolnim ocenjevanjem, navajamo 8. nalogo 1. dela na spomladanskem roku poklicne mature v letu 2015 (Slika 1).

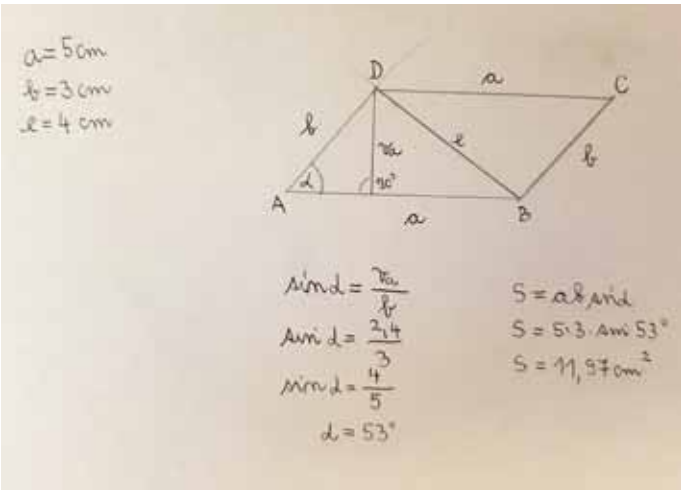
8. Dolžini stranic paralelograma merita 5 cm in 3 cm, krajša izmed diagonal pa 4 cm. Narišite skico in izračunajte ploščino paralelograma.

(5 točk)

Naloga	Točke	Rešitev	Dodatna navodila
8	1	• narisana skica paralelograma, npr.: 	
	1*	• uporabljen ustrezen postopek za izračun ploščine paralelograma	
	3	• izračun ploščine paralelograma, npr.: $S = 2 \cdot \sqrt{6(6-5)(6-4)(6-3)} = 2 \cdot 6 = 12\ \text{cm}^2$	1 + 1* + 1 Kandidat lahko ploščino izračuna tudi kako drugače, npr. z upoštevanjem, da je trikotnik, katerega stranice merijo 3 cm, 4 cm in 5 cm, pravokoten.
Skupaj	5		

Slika 1: Primer naloge iz spomladanskega roka 2015 z navodili za ocenjevanje[3].

Primera izdelkov, na katerem je naloga rešena, sta na Slika 2 in Slika 3. V obeh primerih sta izdelka kandidatov zaradi varstva osebnih podatkov prepisana. Naloga na Sliki 2 je bila pri rednem ocenjevanju ocenjena s 5 točkami, pri kontrolnem ocenjevanju pa z 2 točkama. Naloga na Sliki 3 je bila pri rednem ocenjevanju ocenjena s 4 točkami, pri kontrolnem pa s 5 točkami.



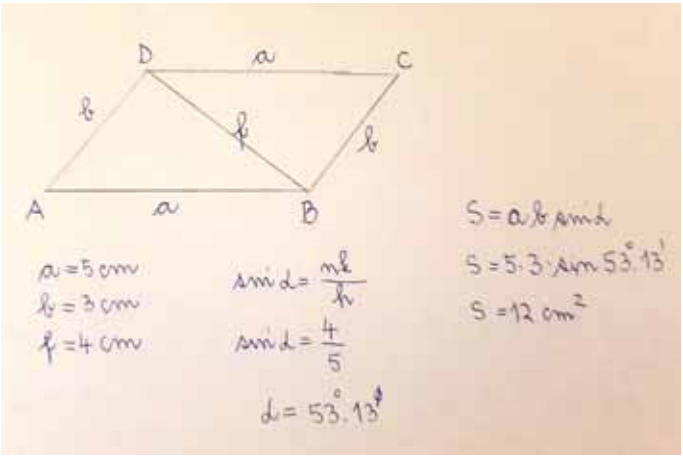
Slika 2: Primer izdelka pri 8. nalogi na spomladanskem roku poklicne mature 2015.

Pri nalogi je uporabljen postopek reševanja, kjer je ploščina paralelograma izračunana s pomočjo formule, pri kateri je treba poznati dolžini obeh stranic paralelograma in velikost kota med njima. Velikosti kota ni med podatki, v tem primeru pa je najverjetneje izračunana s kotno funkcijo sinus v pravokotnem trikotniku s hipotenuzo, ki je enaka krajši stranici paralelograma, in eno od katet, ki je enaka višini trikotnika. Utemeljitve, da je trikotnik ABD pravokoten, kandidat ni zapisal. Podatka o višini ni, kandidat je do njega morda prišel tako, da je paralelogram načrtal in višino izmeril. Ni povsem jasno, zakaj je kandidat poleg razmerja $\frac{2,4}{3}$ zapisal tudi razmerje $\frac{4}{5}$, in ali se je zavedal enakosti

2 Za leto 2019 je bilo število ponovno ocenjenih izpitnih pol manjše kot v ostalih letih.

3 Zapis 1* označuje postopkovno točko.

obeh razmerij. Izračunal je velikost kota α. Izračunal je ploščino paralelograma, pri čemer ni uporabil znaka $\doteq$. Pri rednem ocenjevanju je bila rešitev ovrednotena z vsemi točkami, pri kontrolnem ocenjevanju pa je najverjetneje ena točka dodeljena za skico, druga pa postopkovna za uporabo ustreznega postopka za računanje ploščine paralelograma.



Slika 3: Primer izdelka pri 8. nalogi na spomladanskem roku poklicne mature 2015.

Tudi pri tej nalogi je uporabljen postopek reševanja, kjer je ploščina paralelograma izračunana s pomočjo formule, pri kateri je treba poznati dolžini obeh stranic paralelograma in velikost kota med njima. Velikost kota med stranicama je izračunana s kotno funkcijo sinus v pravokotnem trikotniku s hipotenuzo, ki je enaka daljši stranici paralelograma, kateti pa sta krajša stranica in krajša diagonala paralelograma. Pri zapisu enot za velikost kota se pojavijo nejasnosti. Rezultat za ploščino paralelograma je pravilen. Pri rednem ocenjevanju naloga ni ovrednotena z vsemi petimi točkami (kot pri kontrolnem ocenjevanju), saj je verjetno ocenjevalcu manjkalo to, da ni utemeljitve, da je trikotnik ABD pravokoten oz. da na sliki ni označenega pravega kota pri oglišču D ali pa je kriva nejasnost pri zapisu enote.

O razlogih za različno dodeljene točke lahko zgolj ugibamo: ocenjevanje v korist kandidata ali vpliv šolske prakse v prvem primeru, v drugem primeru pa premajhna pozornost usmerjena na to, da ni označenega pravega kota in neustrezen zapis enote za merjenje velikosti kota. Na ravni navodil sta predvideni dve postopkovni točki (v navodilih označeni z *), kar lahko predvsem pri zadnjem delu 1 + 1* + 1 preveč odpira prostor ocenjevalcem v primeru, da kandidat ni reševal naloge z uporabo Heronove formule, ampak z uporabo kakšne druge pravilne strategije.

Za zaključek

Kontrolno ocenjevanje izpitnih pol pri poklicni maturi iz matematike v letih 2009, 2011, 2013, 2015, 2017 in 2019 je pokazalo, da je ocenjevanje objektivno in ti rezultati nas lahko zelo veselijo. Zaradi drugačnih pravil pri ocenjevanju izpitnih pol pri splošni maturi ali vrednotenju pisnih preizkusov pri NPZ je na ocenjevalcih izpitnih pol pri poklicni maturi iz matematike velika odgovornost, da pole res ocenijo v skladu z *Navodili za ocenjevanje*, čeprav se morda ta v določenih vidikih razlikujejo od njihove običajne prakse v razredu. Skupna navodila namreč zagotavljajo enake pogoje za vse kandidate in pomembno prispevajo k objektivnosti ocenjevanja pisnega izpita. Ob tem je treba omeniti, da je manj razveseljivo dejstvo, da se v izjemno majhnem deležu točke na rednem ocenjevanju razlikujejo od točk na kontrolnem ocenjevanju tudi za 5 in več točk. To v nobenem primeru ni sprejemljivo, tudi če gre za razliko v prid kandidata, še manj pa, če gre njemu v škodo. V nekaj primerih je DPK PM MAT o odstopanjih obvestila RIC, ki je o odstopanjih opozoril določene šole oz. organizacije, ki izvajajo poklicno maturo. Ugotovitve glede kontrolnega ocenjevanja so bile predstavljene na seminarjih za poklicno maturo.

V bodoče bi bilo treba s kontrolnim ocenjevanjem nadaljevati v bolj formalni obliki in ga še nagraditi tako, da bi se:

- vključilo več izpitnih rokov (npr. tudi jesenski in zimski),
- kontrolno ocenjevanje izvajalo vsako leto (ne zgolj vsako drugo leto),
- povečalo število ponovno ocenjenih pol v kontrolnem ocenjevanju in tako zvišal delež ocenjenih pol glede na število vseh pol pri matematiki (delež ponovno ocenjenih pol v primerjavi z celotnim številom pol pri matematiki se je pri dvojnem ocenjevanju gibal med 1,7 % leta 2019 in 4,4 % leta 2013), kar bi gotovo prispevalo k še večji objektivnosti ocenjevanja pisnega izpita.

Literatura

https://www.ric.si/splosna_matura/ocenjevanje/ (pridobljeno 3. 5. 2020)

https://www.ric.si/preverjanje_znanja/vrednotenje_rezultati/ (pridobljeno 3. 5. 2020)

Razlaga merskih indeksov, interno gradivo Državnega izpitnega centra

Vzorec fotokopij izpolnjenih izpitnih pol za spomladanski rok 2009, 2011, 2013, 2015, 2017, 2019

Matematika v šoli, št. 2., letnik 27, 2021

Razlika kvadratov

mag. Sonja Rajh
Zavod RS za šolstvo

Izvleček

Na študijskih srečanjih v osnovnih in srednjih šolah smo se z učitelji matematike lotili preiskovanja. V vlogi učečih smo si zadali cilj, da poiščemo čim več različnih načinov reševanja dane problemske naloge. Nekatere od načinov reševanja predstavljamo v prispevku.

Ključne besede: preiskovanje, posploševanje, razlika kvadratov, (številski) vzorec, algebrski zapis, računalniške preglednice, večkratniki

Difference of Squares

Abstract

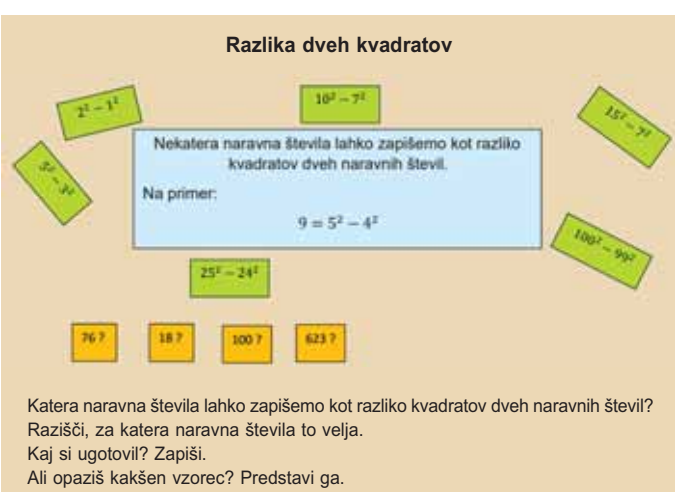
At academic meetings in primary and secondary schools, we tried our hand at investigation with mathematics teachers. Assuming the role of learners, we set the goal of finding as many different ways as possible of solving the given problem-solving task. Some of these ways are presented in the article.

Keywords: investigation, generalization, difference of squares, (number) pattern, algebraic notation, computer spreadsheets, multiples

Uvod

Na srečanju študijskih skupin za matematiko smo se z osnovnošolskimi in srednješolskimi učitelji matematike v okviru **Učenja in poučevanja matematike s preiskovanjem** ukvarjali z enakim matematičnim problemom (Slika 1).

Osnovnošolski učitelji matematike so reševali problem:



Slika 1: Matematični problem

Pristope k reševanju smo razdelili v tri večje skupine:

1. Preiskovanje številskih vzorcev do posploševanja in algebrskega zapisa
2. Preiskovanje z algebro
3. Preiskovanje v geometriji

V tem prispevku si bomo podrobneje ogledali prva dva pristopa k reševanju.

1. Preiskovanje številskih vzorcev do posploševanja in algebrskega zapisa

Predvidevamo, da bi se osnovnošolci lotili reševanja s preizkušanjem posameznih številskih vrednosti, nato bi primere sistematično urejali in šele potem bi sistematično preiskovali. Navajamo različne pristope k reševanju problema na nivoju številskih vzorcev.

1.1 Prvi način preiskovanja

Sistematičnega urejanja se lahko lotimo tako, da za vsako od naravnih števil (po)iščemo kvadrata naravnih števil s to razliko. Pri tem nam je lahko v pomoč tabela kvadratov naravnih števil ali pa uporabljamo žepno računalo.

Ta način je precej neproduktiven, saj je težko poiskati naravni števili, katerih kvadrata dajeta željeno razliko. Poleg tega ne moremo utemeljiti, da nekega števila sploh ni možno zapisati kot razliko dveh kvadratov. Morda pa samo ne znamo najti rešitve. Je pa ta način dobra vaja v urjenju kvadriranja.

Preglednica 1: Z zeleno so obarvana števila od 1 do 30, ki jih lahko zapišemo kot razliko kvadratov dveh naravnih števil.

1 =	11 = $6^2 - 5^2$	21 = $5^2 - 2^2$
2 =	12 = $4^2 - 2^2$	22 =
3 = $2^2 - 1^2$	13 = $7^2 - 6^2$	23 = $12^2 - 11^2$
4 =	14 =	24 = $7^2 - 5^2$
5 = $3^2 - 2^2$	15 = $8^2 - 7^2$	25 = $13^2 - 12^2$
6 =	16 = $5^2 - 3^2$	26 =
7 = $4^2 - 3^2$	17 = $9^2 - 8^2$	27 = $6^2 - 3^2$
8 = $3^2 - 1^2$	18 =	28 = $8^2 - 6^2$
9 = $5^2 - 4^2$	19 = $10^2 - 9^2$	29 = $15^2 - 14^2$
10 =	20 = $6^2 - 4^2$	30 =

Obrnimo način reševanja in najprej sistematično kvadriramo števila ter nato iščemo razliko kvadratov, kot je ponazorjeno v preglednici 2.

Preglednica 2: Eden od načinov sistematičnega postopka reševanja.

$2^2 - 1^2 = 3$	$3^2 - 1^2 = 8$ $3^2 - 2^2 = 5$	$4^2 - 1^2 = 15$ $4^2 - 2^2 = 12$ $4^2 - 3^2 = 7$	$5^2 - 1^2 = 24$ $5^2 - 2^2 = 21$ $5^2 - 3^2 = 16$ $5^2 - 4^2 = 9$

Sistematično lahko preiskujemo tudi tako, da najprej kvadriramo števila, ki se razlikujejo za 1 (za 2, 3, 4 …) ter izračunamo razliko teh kvadratov (glejte preglednico 3). Nato izpišemo števila, ki so dobljena kot razlika dveh kvadratov naravnih števil.

Iz preglednice 3 je razvidno, da nekatera števila lahko na več različnih načinov zapišemo kot razliko dveh kvadratov. Npr.: 15 = $4^2 - 1^2$ in tudi 15 = $8^2 - 7^2$. 24 = $7^2 - 5^2$ in tudi 24 = $5^2 - 1^2$. 32 = $9^2 - 7^2$ in tudi 32 = $6^2 - 2^2$.

Če želimo ugotoviti, katera od naravnih števil lahko zapišemo kot razliko dveh kvadratov, jih moramo iz preglednice 3 sistematično zbrati/izpisati. Kot razliko kvadratov dveh naravnih števil lahko zapišemo naslednjih 20 naravnih števil do števila 30 (urejena so po velikosti): 3, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 27, 28, 29. Ta zapis nam pri iskanju pravila kaj dosti ne koristi. Zato polja s števili, ki jih lahko zapišemo kot razliko kvadratov dveh naravnih števil, pobarvamo v shemi zaporednih števil.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140

Shema 1: Obarvana so polja v shemi z naravnimi števili do 140, ki jih lahko zapišemo kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}$.

V obarvani shemi takoj opazimo vzorec, ki nam nakazuje, da bi morali pobarvati še polji s številoma 1 in 4. Števili 1 in 4 lahko

Preglednica 3: Z zeleno so obarvana števila, ki jih zapišemo kot razliko kvadratov dveh naravnih števil, ki se razlikujeta za 1, 2, 3 oziroma 4.

Števili, ki ju kvadriramo, se razlikujeta za 1.	Števili, ki ju kvadriramo, se razlikujeta za 2.	Števili, ki ju kvadriramo, se razlikujeta za 3.	Števili, ki ju kvadriramo, se razlikujeta za 4.
$2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$	$3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8$	$4^2 - 1^2 = 16 - 1 = 15$	$5^2 - 1^2 = 25 - 1 = 24$
$3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$	$4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$	$5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21$	$6^2 - 2^2 = 36 - 4 = 32$
$4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$	$5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$	$6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27$	$7^2 - 3^2 = 49 - 9 = 40$
$5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$	$6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20$	$7^2 - 4^2 = 49 - 16 = 33$	$8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48$
$6^2 - 5^2 = 36 - 25 = 11$	$7^2 - 5^2 = 49 - 25 = 24$	$8^2 - 5^2 = 64 - 25 = 39$	$9^2 - 5^2 = 81 - 25 = 56$
$7^2 - 6^2 = 49 - 36 = 13$	$8^2 - 6^2 = 64 - 36 = 28$	$9^2 - 6^2 = 81 - 36 = 45$	$10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$
$8^2 - 7^2 = 64 - 49 = 15$	$9^2 - 7^2 = 81 - 49 = 32$	$10^2 - 7^2 = 100 - 49 = 51$	$11^2 - 7^2 = 121 - 49 = 72$
Učenci ugotovijo, da - zaporedje števil narašča za 2, - dobijo liha števila.	Zaporedje števil narašča za 4. Dobljena števila so soda (oz. deljiva z 2), deljiva s 4.	Zaporedje števil narašča za 6. Dobljena števila so liha, deljiva s 3.	Zaporedje števil narašča za 8. Dobljena števila so soda, deljiva s 4, z 8.

dobimo kot razliko dveh kvadratov le v primeru, da upoštevamo kvadrate naravnih števil in števila 0. Velja $1^2 - 0^2 = 1$ in $2^2 - 0^2 = 4$.

Zaradi te ugotovitve smo za izvedbo študijskih skupin za srednjo šolo spremenili in dopolnili navodilo naloge.

> Nekatera naravna števila lahko zapišemo kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$.
> Npr.:
> $9 = 5^2 - 4^2$
> $28 = 8^2 - 6^2$
> Raziščite, za katera naravna števila to velja.
> Zapišite ugotovitve in pripravite poročilo.

V spodnji shemi so obarvana polja z naravnimi števili do 140, ki jih lahko zapišemo kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$. V tem primeru nam barvanje polj z rešitvami pokaže številski vzorec, iz katerega lahko delamo posplošitve.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140

Shema 2: Obarvana so polja v shemi z naravnimi števili do 140, ki jih lahko zapišemo kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$.

Ugotovimo, da se med dvema zaporednima številoma, ki ju ne moremo napisati kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$, nahajajo tri zaporedna naravna števila, ki jih lahko zapišemo kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$. Tako ostane nepobarvano vsako četrto polje v shemi. To bi bilo lažje razvidno, če bi namesto sheme, ki ima 10 števil v vrsti, uporabili shemo, ki ima manj/več števil v vrsti ali pa številski trak (Shema 3).

Ugotovimo: Kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$ lahko zapišemo vsa naravna števila, razen števil: 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42, 46, 50 … Opazimo, da so vsa ta števila soda in da jih lahko zapišemo kot dvakratnik zaporednega lihega števila: $2 = 2 \cdot 1$, $6 = 2 \cdot 3$, $10 = 2 \cdot 5$, $14 = 2 \cdot 7$, $18 = 2 \cdot 9$, $22 = 2 \cdot 11$, $26 = 2 \cdot 13$, $30 = 2 \cdot 15$ … Torej: števil oblike $2(2x - 1) = 4x - 2$, $x \in \mathbb{N}$, **ne moremo zapisati kot razlike kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$.**

Pri delu si lahko pomagamo z računalniškimi preglednicami kot na sliki 2.

Slika 2: Delovni list iz delovnega zvezka v excelu. Datoteka, ki je v aktivni obliki, se nahaja v spletni učilnici študijskih skupin za matematiko v mapi Gradiva študijskega srečanja 2019.

Pri tem primeru je zelo dobrodošla uporaba računalniških preglednic, ki precej olajšajo delo, poleg tega nam pa ponujena aktivnost nudi priložnost za realizacijo ciljev iz učnega načrta za matematiko v OŠ, po katerem naj bi se že šestošolci srečali z enostavnimi računalniškimi preglednicami in se jih naučili uporabljati, v naslednjih letih šolanja pa naj bi to znanje le še dopolnjevali in elektronske računalniške preglednice uporabljali pri različnih tematskih sklopih.

Ob tem primeru preiskovanja se učenci v računalniških preglednicah naučijo kreirati zaporedja (nize števil), računati vrednosti enostavnih številskih izrazov, kopirati formule in jih prenašati znotraj stolpca ali vrstice (niza) ali jih uporabljati na različnih delovnih listih znotraj istega delovnega zvezka. Na podlagi velikega števila primerov lažje posplošujejo in iščejo rešitve, saj ne izgubljajo časa z računanjem. Ko imajo izpolnjeno prvo vrstico s števili in v vseh poljih vpisane formule za računanje, lahko te formule samo prenesejo (kopirajo in prilepijo) v naslednje vrstice in dobijo preglednico s poljubnim številom rešitev problema.

1.2 Drugi način preiskovanja

Vrednosti izraza $a^2 - b^2$ zberimo v preglednici, pri čemer število a zapisujemo v vrstice, število b pa v stolpce preglednice.

V preglednici 4 opazimo številske vzorce. Po diagonali preglednice se nahajajo same ničle, saj v primeru, ko je $a = b$, velja $a^2 - b^2 = 0$.

Na vzporednicah diagonale najdemo naslednja zaporedja številskih vrednosti za $a^2 - b^2$:

- Zaporedje lihih števil: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 … dobimo v primeru, ko je $a - b = 1$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33

Shema 3: Obarvana so polja na traku z naravnimi števili do 33, ki jih lahko zapišemo kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$.

a^2-b^2		b							
		0	1	2	3	4	5	6	7
a	0	0							
	1	1	0						
	2	4	3	0					
	3	9	8	5	0				
	4	16	15	12	7	0			
	5	25	24	21	16	9	0		
	6	36	35	32	27	20	11	0	
	7	49	48	45	40	33	24	13	0

Preglednica 4: Tabeliranje izraza $a^2 - b^2$ za $a \geq b$.

- Zaporedje večkratnikov števila štiri: 4 , 8, 12, 16, 20, 24 … dobimo v primeru, ko je $a - b = 2$
- Zaporedje lihih večkratnikov števila 3 od števila 9 naprej: 9, 15, 21, 27, 33 … dobimo v primeru, ko je $a - b = 3$
- Zaporedje večkratnikov števila 8 od števila 16 naprej: 16, 24, 32, 40 … dobimo v primeru, ko je $a - b = 4$
- Zaporedje lihih večkratnikov števila 5 od števila 25 naprej: 25, 35, 45 … dobimo v primeru, ko je $a - b = 5$
- Zaporedje večkratnikov števila 12 od števila 36 naprej: 36, 48, 60 … dobimo v primeru, ko je $a - b = 6$
- …

Več številskih vrednosti, ki nam olajšajo posploševanje, zberemo v računalniških preglednicah (glejte preglednico 5). Po stolpcih preglednice opazimo še do sedaj neopisane vzorce števil, zato se jim na tem mestu podrobneje posvetimo.

V stolpcih preglednice 5 najdemo naslednja zaporedja številskih vrednosti za $a^2 - b^2$

- V prvem stolpcu so kvadrati števil iz množice $\mathbb{N}_0$: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 … torej števila oblike x^2
- V drugem stolpcu so števila: 0, 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99 … ki so za 1 manjša od kvadratov števil, torej števila oblike $x^2 - 1 = x^2 - 1^2$
- V tretjem stolpcu so števila: 0, 5, 12, 21, 32, 45, 60, 77, 96 … ki so za 4 manjša od kvadratov števil, torej števila oblike $x^2 - 4 = x^2 - 2^2$
- V četrtem stolpcu so števila: 0, 7, 16, 27, 40, 55, 72, 91, 112 … ki so za 9 manjša od kvadratov števil, torej števila oblike $x^2 - 9 = x^2 - 3^2$
- V petem stolpcu so števila: 0, 9, 20, 33, 48, 65, 84, 105, 128 … ki so za 16 manjša od kvadratov števil, torej števila oblike $x^2 - 16 = x^2 - 4^2$
- V šestem stolpcu so števila: 0, 11, 24, 39, 56, 75, 96, 119, 144 … ki so za 25 manjša od kvadratov števil, torej števila oblike $x^2 - 25 = x^2 - 5^2$
- V sedmem stolpcu so števila: 0, 13, 28, 45, 64, 85, 108, 133 … ki so za 36 manjša od kvadratov števil, torej števila oblike $x^2 - 36 = x^2 - 6^2$
- V osmem stolpcu so števila: 0, 15, 32, 51, 72, 95, 120, 147 … ki so za 49 manjša od kvadratov števil, torej števila oblike $x^2 - 49 = x^2 - 7^2$
- V devetem stolpcu so števila: 0, 17, 36, 57, 80, 105, 132, 161 … ki so za 64 manjša od kvadratov števil, torej števila oblike $x^2 - 64 = x^2 - 8^2$

$a^2 - b^2$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
0	0																						
1	1	0																					
2	4	3	0																				
3	9	8	5	0																			
4	16	15	12	7	0																		
5	25	24	21	16	9	0																	
6	36	35	32	27	20	11	0																
7	49	48	45	40	33	24	13	0															
8	64	63	60	55	48	39	28	15	0														
9	81	80	77	72	65	56	45	32	17	0													
10	100	99	96	91	84	75	64	51	36	19	0												
11	121	120	117	112	105	96	85	72	57	40	21	0											
12	144	143	140	135	128	119	108	95	80	63	44	23	0										
13	169	168	165	160	153	144	133	120	105	88	69	48	25	0									
14	196	195	192	187	180	171	160	147	132	115	96	75	52	27	0								
15	225	224	221	216	209	200	189	176	161	144	125	104	81	56	29	0							
16	256	255	252	247	240	231	220	207	192	175	156	135	112	87	60	31	0						
17	289	288	285	280	273	264	253	240	225	208	189	168	145	120	93	64	33	0					
18	324	323	320	315	308	299	288	275	260	243	224	203	180	155	128	99	68	35	0				
19	361	360	357	352	345	336	325	312	297	280	261	240	217	192	165	136	105	72	37	0			
20	400	399	396	391	384	375	364	351	336	319	300	279	256	231	204	175	144	111	76	39	0		
21	441	440	437	432	425	416	405	392	377	360	341	320	297	272	245	216	185	152	117	80	41	0	
22	484	483	480	475	468	459	448	435	420	403	384	363	340	315	288	259	228	195	160	123	84	43	0

Preglednica 5: Tabeliranje izraza $a^2 - b^2$ za $a \geq b$ s pomočjo računalniških preglednic.

- V desetem stolpcu so števila: 0, 19, 40, 63, 88, 115, 144, 175 … ki so za 81 manjša od kvadratov števil, torej števila oblike $x^2 - 81 = x^2 - 9^2$
- …
- V n-tem stolpcu so števila, ki so za $(n - 1)^2$ manjša od kvadratov števil, torej števila oblike $x^2 - (n - 1)^2$.

Opazimo, da se v takem zapisu nekatera števila pojavijo večkrat, npr. število 0 je v vseh zaporedjih, števili 9 in 16 se pojavita dvakrat …

Preverimo še, ali smo na ta način iskanja in ponazarjanja števil, ki jih dobimo kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$, dobili vsa naravna števila, ki smo jih s sivo obarvanim poljem označili že v shemi 2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Shema 4: Naravna števila do 50, ki jih lahko zapišemo kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$.

Ugotovimo, da smo v shemi 4 z istimi barvami, s katerimi smo obarvali določena števila v preglednici 5, obarvali vsa števila v sivih poljih sheme 2 do števila 50, razen števila 47, ki se v preglednici 5 nahaja šele v 25. vrstici kot vrednost $24^2 - 23^2 = 47$. Opazimo, da so v preglednici 5 nekatera relativno majhna števila, ki so v preglednici sicer ponazorjena blizu diagonale, zelo daleč od »izhodišča« (levega zgornjega polja) preglednice.

1.3 Tretji način preiskovanja

Z opazovanjem številskih vzorcev lahko zapišemo mnoge posplošitve in ugotovitve. Vzorce števil lahko posplošimo do algebrskega izraza.

- Števili, ki ju kvadriramo, se razlikujeta za 1.

$1^2 - 0^2 = 1 - 0 = 1$ $2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$ $3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$ $4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$ $5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$ $6^2 - 5^2 = 36 - 25 = 11$ $7^2 - 6^2 = 49 - 36 = 13$ Če odštejemo kvadrata dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$, ki imata razliko 1, dobimo liho število. $x^2 - (x - 1)^2 = 2x - 1$, $x \in \mathbb{N}$	$(1 + 0)(1 - 0) = 1 \cdot 1 = 1$ $(2 + 1)(2 - 1) = 3 \cdot 1 = 3$ $(3 + 2)(3 - 2) = 5 \cdot 1 = 5$ $(4 + 3)(4 - 3) = 7 \cdot 1 = 7$ $(5 + 4)(5 - 4) = 9 \cdot 1 = 9$ $(6 + 5)(6 - 5) = 11 \cdot 1 = 11$ $(7 + 6)(7 - 6) = 13 \cdot 1 = 13$ Produkt dveh lihih števil je liho število. Vsota dveh zaporednih števil iz množice $\mathbb{N}_0$ (od katerih je eno liho, drugo pa sodo) je vedno liho število. Vijoličasto število je vedno 1 (razlika obeh števil).

- Števili, ki ju kvadriramo, se razlikujeta za 2.

$2^2 - 0^2 = 4 - 0 = 4$ $3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8$ $4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$ $5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$ $6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20$ $7^2 - 5^2 = 49 - 25 = 24$ $8^2 - 6^2 = 64 - 36 = 28$ Če odštejemo kvadrata dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$, ki imata razliko 2, dobimo večkratnik števila 4. $x^2 - (x - 2)^2 = 4x - 4 = 4(x - 1)$, $x \in \mathbb{N}, x \geq 2$	$(2 + 0)(2 - 0) = 2 \cdot 2 = 4$ $(3 + 1)(3 - 1) = 4 \cdot 2 = 8$ $(4 + 2)(4 - 2) = 6 \cdot 2 = 12$ $(5 + 3)(5 - 3) = 8 \cdot 2 = 16$ $(6 + 4)(6 - 4) = 10 \cdot 2 = 20$ $(7 + 5)(7 - 5) = 12 \cdot 2 = 24$ $(8 + 6)(8 - 6) = 14 \cdot 2 = 28$ Produkt dveh sodih števil je sodo število, ki je večkratnik števila 4. Rdeče število je večkratnik števila 4. $(4 = 2 \cdot 2)$ Zeleno število je vsota števil z razliko 2. Obe števili sta sodi ali obe lihi, zato je tudi njuna vsota sodo število oz. večkratnik števila 2. Vijoličasto število je vedno 2 (razlika obeh števil).

- Števili, ki ju kvadriramo, se razlikujeta za 3.

$3^2 - 0^2 = 9 - 0 = 9$ $4^2 - 1^2 = 16 - 1 = 15$ $5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21$ $6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27$ $7^2 - 4^2 = 49 - 16 = 33$ $8^2 - 5^2 = 64 - 25 = 39$ $9^2 - 6^2 = 81 - 36 = 45$ Če odštejemo kvadrata dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$, ki imata razliko 3, dobimo lihi večkratnik števila 3. $x^2 - (x - 3)^2 = 6x - 9 = 3(2x - 3)$, $x \in \mathbb{N}, x \geq 3$	$(3 + 0)(3 - 0) = 3 \cdot 3 = 9$ $(4 + 1)(4 - 1) = 5 \cdot 3 = 15$ $(5 + 2)(5 - 2) = 7 \cdot 3 = 21$ $(6 + 3)(6 - 3) = 9 \cdot 3 = 27$ $(7 + 4)(7 - 4) = 11 \cdot 3 = 33$ $(8 + 5)(8 - 5) = 13 \cdot 3 = 39$ $(9 + 6)(9 - 6) = 15 \cdot 3 = 45$ Produkt dveh lihih števil je liho število. Rdeče število je lihi večkratnik števila 3, saj je vijoličasto število vedno 3 (razlika obeh števil), zeleno število (vsota števil z razliko 3) pa je vedno liho (saj je eno od števil vedno sodo, drugo pa vedno liho).

- Števili, ki ju kvadriramo, se razlikujeta za 4.

$4^2 - 0^2 = 16 - 0 = 16$ $5^2 - 1^2 = 25 - 1 = 24$ $6^2 - 2^2 = 36 - 4 = 32$ $7^2 - 3^2 = 49 - 9 = 40$ $8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48$ $9^2 - 5^2 = 81 - 25 = 56$ $10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$ Če odštejemo kvadrata dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$, ki imata razliko 4, dobimo večkratnik števila 8. $x^2 - (x - 4)^2 = 8x - 16 = 8(x - 2)$, $x \in \mathbb{N}, x \geq 4$	$(4 + 0)(4 - 0) = 4 \cdot 4 = 16$ $(5 + 1)(5 - 1) = 6 \cdot 4 = 24$ $(6 + 2)(6 - 2) = 8 \cdot 4 = 32$ $(7 + 3)(7 - 3) = 10 \cdot 4 = 40$ $(8 + 4)(8 - 4) = 12 \cdot 4 = 48$ $(9 + 5)(9 - 5) = 14 \cdot 4 = 56$ $(10 + 6)(10 - 6) = 16 \cdot 4 = 64$ Produkt dveh sodih števil je sodo število, ki je večkratnik števila 4. Rdeče število je večkratnik števila 8. $(8 = 2 \cdot 4)$ Zeleno število je vsota števil z razliko 4. Obe števili sta sodi ali obe lihi, zato je tudi njuna vsota sodo število oz. večkratnik števila 2. Vijoličasto število je vedno 4 (razlika obeh števil).

- Števili, ki ju kvadriramo, se razlikujeta za 5.

$5^2 - 0^2 = 25 - 10 = 25$ $6^2 - 1^2 = 36 - 1 = 35$ $7^2 - 2^2 = 49 - 4 = 45$ $8^2 - 3^2 = 64 - 9 = 55$ $9^2 - 4^2 = 81 - 16 = 65$ $10^2 - 5^2 = 100 - 25 = 75$ $11^2 - 6^2 = 121 - 36 = 85$ Če odštejemo kvadrata dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$, ki imata razliko 5, dobimo lihi večkratnik števila 5. $x^2 - (x-5)^2 = 10x - 25 = 5(2x-5)$, $x \in \mathbb{N}, x \geq 5$	$(5+0)(5-0) = 5 \cdot 5 = 25$ $(6+1)(6-1) = 7 \cdot 5 = 35$ $(7+2)(7-2) = 9 \cdot 5 = 45$ $(8+3)(8-3) = 11 \cdot 5 = 55$ $(9+4)(9-4) = 13 \cdot 5 = 65$ $(10+5)(10-5) = 15 \cdot 5 = 75$ $(11+6)(11-6) = 17 \cdot 5 = 85$ Produkt dveh lihih števil je liho število. Rdeče število je lihi večkratnik števila 5, saj je vijoličasto število vedno 5 (razlika obeh števil), zeleno število (vsota števil z razliko 5) pa je vedno liho (saj je eno od števil vedno sodo, drugo pa vedno liho).

- Števili, ki ju kvadriramo, se razlikujeta za 6.

$6^2 - 0^2 = 36 - 0 = 36$ $7^2 - 1^2 = 49 - 1 = 48$ $8^2 - 2^2 = 64 - 4 = 60$ $9^2 - 3^2 = 81 - 9 = 72$ $10^2 - 4^2 = 100 - 16 = 84$ $11^2 - 5^2 = 121 - 25 = 96$ $12^2 - 6^2 = 144 - 36 = 108$ Če odštejemo kvadrata dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$, ki imata razliko 6, dobimo večkratnik števila 12. $x^2 - (x-6)^2 = 12x - 36 = 12(x-3)$, $x \in \mathbb{N}, x \geq 6$	$(6+0)(6-0) = 6 \cdot 6 = 36$ $(7+1)(7-1) = 8 \cdot 6 = 48$ $(8+2)(8-2) = 10 \cdot 6 = 60$ $(9+3)(9-3) = 12 \cdot 6 = 72$ $(10+4)(10-4) = 14 \cdot 6 = 84$ $(11+5)(11-5) = 16 \cdot 6 = 96$ $(12+6)(12-6) = 18 \cdot 6 = 108$ Produkt dveh sodih števil je sodo število, ki je večkratnik števila 4. Rdeče število je večkratnik števila 12. $(12 = 2 \cdot 6)$ Zeleno število je vsota števil z razliko 6. Obe števili sta sodi ali obe lihi, zato je tudi njuna vsota sodo število oz. večkratnik števila 2. Vijoličasto število je vedno 6 (razlika obeh števil).

…

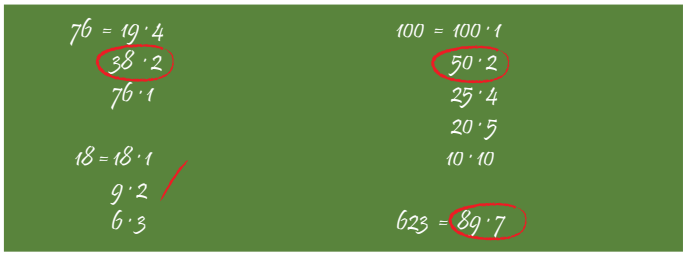
- Števili, ki ju kvadriramo, se razlikujeta za n.

$x^2 - (x-n)^2 = 2nx - n^2 = n(2x-n)$, $x \in \mathbb{N}, x \geq n$ Če je n liho število, dobimo lihi večkratnik števila n. Če je n sodo število, dobimo večkratnik števila $2n$.	$(x + (x-n)) \cdot (x - (x-n)) = (2x-n) \cdot (n) = n(2x-n)$ Če je n liho število, dobimo **produkt dveh lihih števil**, kar je liho število $n(2x-n)$. Če je n sodo število, je $n(2x-n)$ **produkt dveh sodih števil** (dveh večkratnikov števila 2), kar je sodo število, ki je večkratnik števila 4.

V izrazih desnega stolpca, ki so oblike $(x - (x-n)) \cdot (x + (x-n))$, ne dobimo produkta sodega in lihega števila oziroma lihega in sodega števila, da bi dobili dvakratnik lihega števila.

Torej števil, ki so dvakratniki lihega števila ($2 = 2 \cdot 1$, $6 = 2 \cdot 3$, $10 = 2 \cdot 5$, $14 = 2 \cdot 7$, $18 = 2 \cdot 9$, $22 = 2 \cdot 11$, …), ne moremo dobiti kot razlike kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$.

Te ugotovitve so s številskimi primeri na tablo zapisali tudi udeleženci študijske skupine za matematiko v osnovni šoli. Glejte sliko 3.



Slika 3: Zapis učiteljev na tablo.

Iz zapisov sledi, da se kot razlika kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$ lahko zapišejo le števila, ki jih lahko vsaj na ena način razcepimo na produkt dveh lihih števil (npr. $623 = 89 \cdot 7$) ali kot produkt dveh sodih števil (npr. $76 = 38 \cdot 2$, $100 = 50 \cdot 2 = 10 \cdot 10$).

Števila 18 pa ne moremo zapisati kot produkt dveh sodih ali dveh lihih števil ($18 = 1 \cdot 18 = 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$, saj je vedno en faktor sod, drugi pa lih), zato ga ne moremo zapisati kot razlike kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$.

Barvanje števil v shemi

V shemi naravnih števil pobarvamo polja s števili, ki jih lahko zapišemo kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$. Glejte shemo 5. Najprej z zeleno pobarvamo polja z lihimi števili, saj jih dobimo kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$, ki imata razliko 1. Nato z oranžno pobarvamo polja z večkratniki števila 4, saj jih dobimo kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$, ki imata razliko 2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Shema 5: Pobarvana so polja z naravnimi števili do števila 100, ki jih lahko zapišemo kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$.

Ko želimo pobarvati tiste večkratnike števila 3, ki jih dobimo kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$, ki imata razliko 3, ugotovimo, da so števila 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45 ... že pobarvana z zeleno, saj so to liha števila. (Predlagamo, da ta števila v shemi obkrožite in preiskujete nastali številski vzorec.) Torej: števila oblike $6x - 9 = 3(2x - 3)$, $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 3$, so liha števila.

Ko želimo pobarvati tiste večkratnike števila 4, ki jih dobimo kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$, ki imata razliko 4, ugotovimo, da so števila 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64 … že pobarvana z oranžno, saj so to večkratniki števila 4. Torej: vsi večkratniki števila 8 so tudi večkratniki števila 4, saj velja: $8x - 16 = 8(x - 2) = 4(2x - 4)$, $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 4$.

Ko želimo pobarvati tiste večkratnike števila 5, ki jih dobimo kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$, ki imata razliko 5, ugotovimo, da so števila 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85 … že pobarvana z zeleno, saj so to liha števila. Torej: števila oblike $10x - 25 = 5(2x - 3)$, $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 5$, so liha števila.

Ko želimo pobarvati tiste večkratnike števila 6, ki jih dobimo kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$, ki imata razliko 6, ugotovimo, da so števila 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108 … že pobarvana z oranžno, saj so to večkratniki števila 4. Torej: vsi večkratniki števila 12 so tudi večkratniki števila 4, saj velja: $12x - 36 = 12(x - 3) = 4(3x - 9)$, $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 6$.

….

Posplošimo:

Vsa liha števila lahko zapišemo kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$, ki imata liho razliko.

Vse večkratnike števila 4 lahko zapišemo kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$, ki imata sodo razliko.

Torej lahko samo nekatera soda števila zapišemo kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$, in to so samo tista soda števila, ki so hkrati tudi večkratniki števila 4. V shemi 5 so ostala nepobarvana soda števila, ki niso večkratniki števila 4, saj jih ne moremo zapisati kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$. **Torej števil oblike $4x - 2 = 2(2x - 1)$, $x \in \mathbb{N}$, ne moremo zapisati kot razlike kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$.**

2. Preiskovanje z algebro

Srednješolci so že sposobni ta matematični problem utemeljiti in tudi dokazati z algebro.

2.1 Prvi način reševanja

Naj bosta števili $a, b \in \mathbb{N}_0$, za kateri velja $a \geq b$.

Imamo natanko tri možnosti:

1. možnost: **Razlika med številoma a in b je liho število, torej $a - b = 2k - 1$**, $k \in \mathbb{N}$

Če iz tega zapisa izrazimo $a = b + 2k - 1$, in to vstavimo v izraz za $a + b$, dobimo $a + b = b + 2k - 1 + b = 2(b + k) - 1$ spet liho število.

Iz tega sledi, da je

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = (2k - 1)(2(b + k) - 1) = 2(2k - 1)(b + k) - 2k + 1 = 2((2k - 1)(b + k) - k) + 1$$

liho število (produkt dveh lihih števil je liho število).

Ugotovitev: Če je razlika med številoma a in b liho število, je tudi razlika kvadratov števil a in b liho število.

Primeri: Če je $k = 1$, je $a - b = 1$ in dobimo: $a^2 - b^2 = 2b + 1$ … vsa liha števila.

Če je $k = 2$, je $a - b = 3$ in dobimo: $a^2 - b^2 = 3(2b + 3)$ … nekatere lihe večkratnike števila 3.

Če je $k = 3$, je $a - b = 5$ in dobimo: $a^2 - b^2 = 5(2b + 5)$ … nekatere lihe večkratnike števila 5.

…

2. možnost: **Razlika med številoma a in b je sodo število, torej $a - b = 2k$**, $k \in \mathbb{N}$,

Če iz tega zapisa izrazimo $a = b + 2k$, in to vstavimo v izraz za $a + b$, dobimo $a + b = b + 2k + b = 2(b + k)$ spet sodo število.

Iz tega sledi, da je

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = 2k(2(b + k)) = 4k(b + k)$$

večkratnik števila 4 (produkt dveh sodih števil je večkratnik števila 4).

Ugotovitev: Če je razlika med številoma a in b sodo število, je razlika kvadratov števil a in b večkratnik števila 4.

Primeri:

Če je $k = 1$, je $a - b = 2$ in dobimo: $a^2 - b^2 = 4(b + 1)$ … vse večkratnike števila 4.

Če je $k = 2$, je $a - b = 4$ in dobimo: $a^2 - b^2 = 8(b + 2)$ … nekatere večkratnike števila 8.

Če je $k = 3$, je $a - b = 6$ in dobimo: $a^2 - b^2 = 12(b + 3)$ … nekatere večkratnike števila 12.

…

3. možnost: **Razlika med številoma a in b je 0 oziroma števili a in b sta med seboj enaki,** iz tega sledi, da je

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = \mathbf{0}$

Ugotovitev: Če sta števili a in b med seboj enaki, je razlika kvadratov števil a in b enaka 0.

Obravnavali smo vse tri možnosti. Več možnosti ni. Zato sodih števil, ki niso večkratniki števila 4, ne moremo zapisati kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$.

2.2 Drugi način reševanja

Preiskujmo razliko kvadratov dveh sodih števil, dveh lihih števili, ter po enega sodega in enega lihega. Glejte sliko 4.

$S^2 - S^2 = (2n)^2 - (2m)^2 = 4n^2 - 4m^2 = 4(n^2 - m^2)$	S
$S^2 - L^2 = (2n)^2 - (2m - 1)^2 = 4n^2 - 4m^2 + 4m - 1$	L
$L^2 - L^2 = 4\cdot(\ldots)$	

Slika 4: Na tabelski sliki je ideja dokaza učiteljev, ki nastala na srečanju študijske skupine.

$S^2 - S^2$

Če kvadriramo dve sodi števili (ki sta večkratnika števila 2), za razliko kvadratov dobimo večkratnik števila 4.

$$(2n)^2 - (2m)^2 = 4(n^2 - m^2)$$

Če sta ti dve sodi števili, ki ju kvadriramo, zaporedni sodi števili, dobimo 4-kratnik lihega števila: $(2m + 2)^2 - (2m)^2 = 4(2m + 1)$.

Polja s 4-kratniki lihega števila v shemi 6 pobarvamo z oranžno barvo.

$L^2 - L^2$

Tudi če kvadriramo dve lihi števili, za razliko kvadratov dobimo večkratnik števila 4.

$$(2n - 1)^2 - (2m - 1)^2 = 4(n^2 - n - m^2 + m)$$

Če sta ti dve lihi števili, ki ju kvadriramo, zaporedni lihi števili, dobimo 4-kratnik sodega števila:

$$(2m + 1)^2 - (2m - 1)^2 = 8m = 4 \cdot 2m.$$

Polja s 4-kratniki sodega števila v shemi 6 pobarvamo z zeleno barvo.

Torej lahko vse večkratnike števila 4 dobimo kot razliko kvadratov dveh sodih oziroma dveh lihih števil. V shemi 6 smo jih pobarvali z oranžno (4-kratniki lihega števila) oziroma z zeleno (4-kratniki sodega števila) barvo.

$S^2 - L^2$

Če od kvadrata sodega števila odštejemo kvadrat lihega števila, dobimo liho število.

$$(2n)^2 - (2m - 1)^2 = 4(n^2 - m^2 + m) - 1$$

Če sta števili, ki ju kvadriramo, zaporedni števili, za razliko kvadratov dobimo večkratnik števila 4 zmanjšan za ena:

$$(2m)^2 - (2m - 1)^2 = 4m - 1 .$$

Večkratnik števila 4 zmanjšan za 1 v shemi 6 pobarvamo z modro barvo.

$L^2 - S^2$

Tudi če od kvadrata lihega števila odštejemo kvadrat sodega števila, dobimo liho število.

$$(2n - 1)^2 - (2m)^2 = 4(n^2 - n - m^2) + 1$$

Če sta števili, ki ju kvadriramo, zaporedni števili, za razliko kvadratov dobimo večkratnik števila 4 povečan za ena:

$$(2m + 1)^2 - (2m)^2 = 4m + 1 .$$

Večkratnik števila 4, povečan za 1, v shemi 6 pobarvamo z vijoličasto barvo.

Torej lahko vsa števila, ki so za 1 večja oziroma manjša od večkratnika števila 4, dobimo kot razliko kvadratov po enega sodega in enega lihega števila. V shemi 6 smo jih pobarvali z modro (za 1 manjše od večkratnika števila 4) oziroma z vijoličasto (za 1 večje od večkratnika števila 4) barvo.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

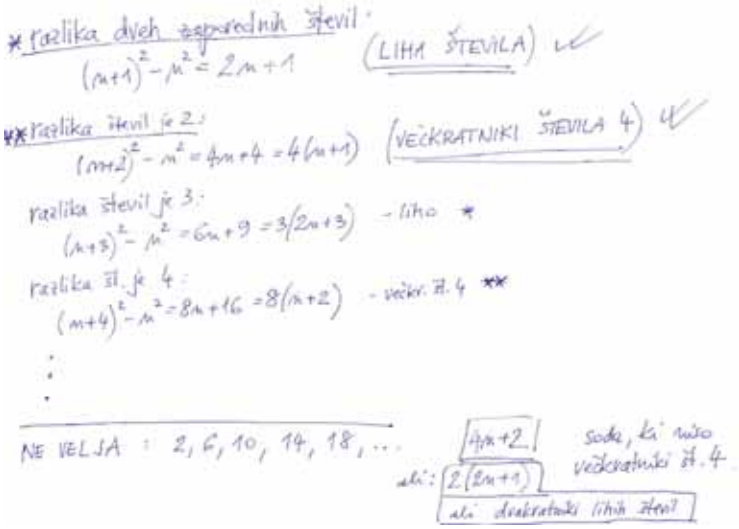
Shema 6: Pobarvana so polja z naravnimi števili do 100, ki jih lahko zapišemo kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$.

V shemi 6 tako ostanejo nepobarvana števila, ki so za 2 manjša oziroma večja od večkratnikov števila 4, torej števila oblike $4m - 2$ oziroma $4m + 2$.

Torej števil oblike $4m - 2 = 2(2m - 1)$, $m \in \mathbb{N}$, (oziroma $4m + 2 = 2(2m + 1)$, $m \in \mathbb{N}_0$) **ne moremo zapisati kot razliko kvadratov dveh števil iz množice $\mathbb{N}_0$.**

2.3 Tretji način reševanja

Na srečanju študijskih skupin so učitelji s pomočjo algebre zapisali povzetke ugotovitev (slika 5), ki smo jih zapisali že v prvem poglavju *Preiskovanje številskih vzorcev do posploševanja in algebrskega zapisa*.



Slika 5: Zapis učiteljev na srečanju študijskih skupin.

2.4 Četrti način reševanja

Učitelji so na srečanju študijskih skupin s pomočjo algebre dokazali, da če se števili, ki ju kvadriramo, razlikujeta za 1, dobimo liho število. Če se števili, ki ju kvadriramo, razlikujeta za *k*, dobimo večkratnik števila *k*. Glejte sliko 6.

Tudi ti dve trditvi sta s številskimi primeri zajeti v prvem poglavju.

I. primer n, n + 1

$$(n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

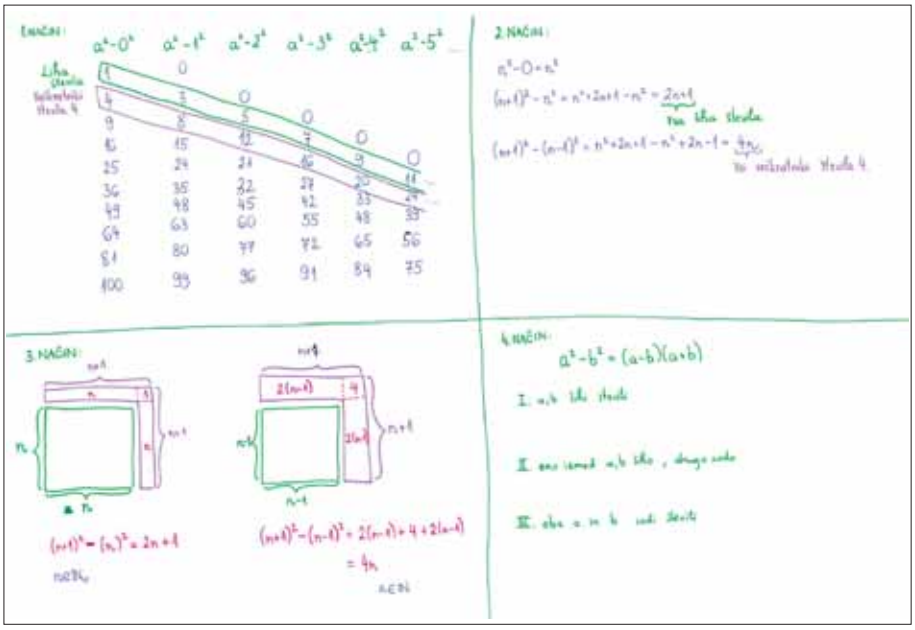
II. primer n, n + k

$$(n + k)^2 - n^2 = n^2 + 2nk + k^2 - n^2 = 2nk + k^2 = k(2n + k)$$

Slika 6: Zapis učiteljev na tablo.

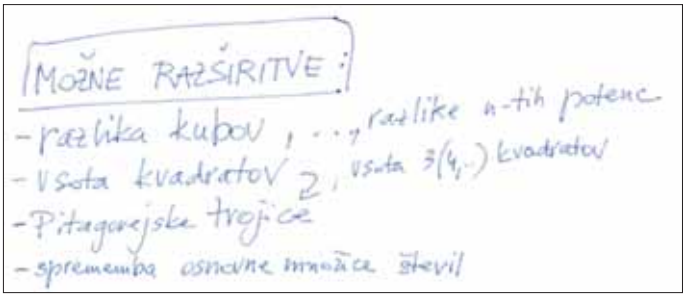
Zaključek

Ta prispevek zaključimo s plakatom (Slika 7), na katerega so učitelji na srečanju študijskih skupin za matematiko zapisali vse prej navedene pristope k reševanju ter omenili še Geometrijsko reševanje problema (3. način na plakatu).



Slika 7: Plakat, na katerem so povzeti različni načini preiskovanja.

Ob reševanju problema so se nam nakazovale možnosti razširitve problema, npr. iz množice $\mathbb{N}$ v množico $\mathbb{N}_0$. O nadaljnjih možnostih razširitve problema so razpravljali tudi učitelji. Na sliki 8 navajamo enega od njihovih zapisov.



Slika 8: Zapis učiteljev na študijskem srečanju.

Vir

Generalizing patterns: *The Difference of Two Squares*, MARS, University of Nottingham & UK Berkeley, 2015.

Do kvartilov in diagrama kvartilov s prepogibanjem papirja

mag. Mateja Sirnik
Zavod RS za šolstvo

V uvodnem prispevku *Težave pri obdelavi podatkov in statističnem preiskovanju* v tej številki revije avtorica dr. Andreja Drobnič Vidic piše o raznolikih poimenovanjih za kvartil in preveč splošnih definicijah v učbenikih za matematiko.

Poglejmo, kako lahko definicije kvartilov prikažemo s konkretnim materialom – trakom papirja, ki je razdeljen na enako velike pravokotnike.

Za definicije kvartilov uporabimo zapis v i-učbeniku Matematika 9 (https://eucbeniki.sio.si/mat9/897/index2.html), kjer je zapisano:

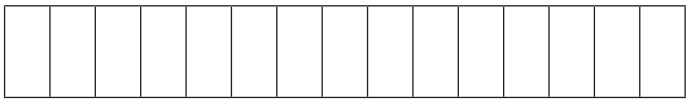
> Kvartili razdelijo urejeno množico podatkov na štiri enake dele. Število Q_2 je mediana vseh podatkov. Število Q_1 je mediana prve polovice podatkov. *Število* Q_3 je mediana druge polovice podatkov.
>
> Pri lihem številu podatkov upoštevamo mediano k prvi in k drugi polovici podatkov. Pri sodem številu podatkov razdelimo podatke na polovico brez upoštevanja mediane.

Vzemimo naslednji primer (Pustavrh, Posodobitve pouka v gimnazijski praksi, str. 297):

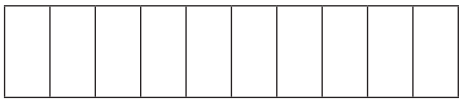
> **SKOK V DALJINO**
>
> Pri *športu* je 15 učencev in 10 učenk skakalo v daljino z mesta. Rezultati učencev v decimetrih so 21, 18, 22, 23, 17, 25, 26, 22, 24, 23, 21, 20, 23, 25, 22, rezultati učenk v metrih pa 16, 18, 20, 17, 15, 19, 17, 18, 19, 18. Rezultate učencev in učenk predstavi s škatlama z brki in jih primerjaj med seboj.
>
> Kaj opaziš?

Podatke za učence in učenke uredimo po velikosti na trak s pravokotniki enake velikosti:

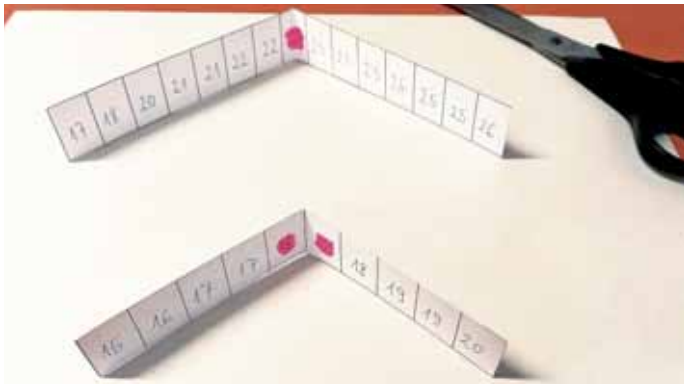
Učenci



Učenke

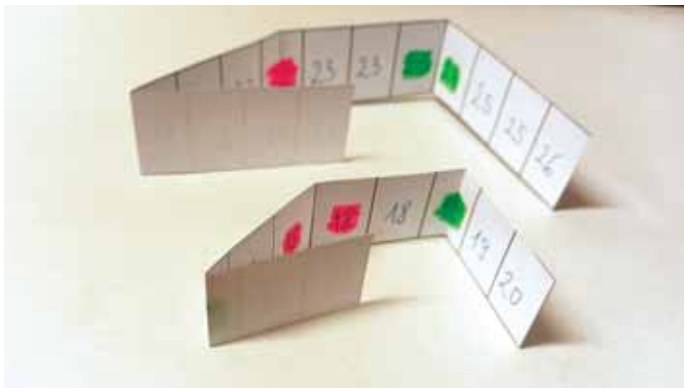


Trak prepognemo (Slika 1). Pripogib razdeli podatke na dve polovici, od katerih vsaka vsebuje polovico podatkov. Pri podatkih o učenkah imamo sodo število podatkov, zato je mediana enaka aritmetični sredini petega in šestega podatka, kar je enako 18. Pri fantih je mediana 22.



Slika 1: Enkrat prepognjen trak.

Trak ponovno prepognemo. Pri podatkih o učencih ga prepognemo tako, da mediano dodamo k prepogibanju leve in desne polovice podatkov. Dobimo prvi in tretji kvartil (Slika 2):



Slika 2: Dvakrat prepognjen trak.

Rešitev:

Učenci (liho število podatkov)

17	18	20	21	21	22	22	22	23	23	23	24	25	25	26

Učenke (sodo število podatkov)

15	16	17	17	18	18	18	19	19	20

Urejeni potrebni podatki za risanje škatel z brki:

	Učenci	Učenke
najmanjša vrednost	17	15
Q1-prvi kvartil	21	17
Q2 mediana oz. tretji kvartil	22	18
Q3- drugi kvartil	23,5	19
največja vrednost	26	20

Meje škatle, ki je poljubno široka, določata prvi in tretji kvartil, z navpičnico v njej predstavimo tudi mediano, brki z vodoravnicama na vsako stran pa se končajo z navpičnicama pri najmanjši in največji vrednosti (Drobnič, Vidic). Dobimo:

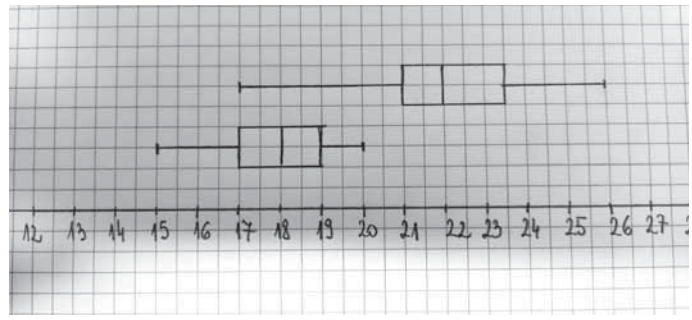


Diagram kvartilov narisan v Excelu, kjer uporabimo grafikon Škatla z brki:

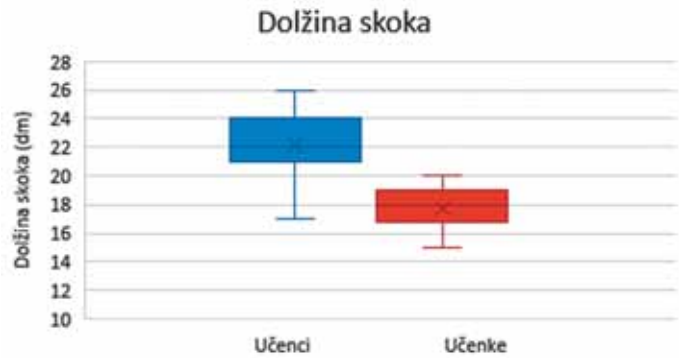


Diagram kvartilov, narisan v Geogebri, kjer uporabimo statistični ukaz *Analiza z več spremenljivkami*:

Situacije na ustnem delu poklicne mature

Ana Radovčič
Srednja šola Izola

Izvleček

Poklicna matura iz matematike je sestavljena iz pisnega dela v obsegu 70 % in ustnega dela v obsegu 30 %. Za vse programe je ustni del poklicne mature iz matematike dosegel večje spremembe od leta 2012. Učitelji srednjih šol smo dobili nalogo, da moramo sestaviti 35 situacij (v povezavi z vsakdanjim življenjem ali v povezavi s stroko). Nekateri učitelji so si med seboj pomagali, nekateri so pomoč poiskali na seminarju Poklicna matura, nekateri pa so si pomagali tudi s knjigo Zbirka situacij z rešitvami za ustni izpit iz matematike na poklicni maturi. So pa tudi učitelji, ki so ubrali najtežjo pot, samostojno so začeli sestavljati situacije. Ta je učiteljem vzela veliko časa in težko je bilo zajeti vse vsebine po učnem načrtu.

Prehod na novi način izvajanja ustnega dela poklicne mature je za dijake lažji. Dijaki menijo, da se na ta način ni treba učiti teorije na pamet, ampak morajo boljše razumeti matematične vsebine, so bolj motivirani za učenje, bolj zaupajo v svoje matematično znanje, matematika je postala še bolj zanimiva in imajo večjo željo do učenja.

Ključne besede: poklicna matura, situacije na ustnem delu

Situations on the Oral Examination at the Vocational Matura

Abstract

The vocational matura in mathematics consists of the written examination, comprising 70%, and the oral examination, comprising 30%.

The oral examination at the vocational matura in mathematics has been changed considerably since 2012 in all programmes. Secondary school teachers have been tasked with preparing 35 situations (connected with everyday life or the profession). Some teachers helped each other, some looked for help at the "Vocational Matura" seminar, while others made use of the book Zbirka situacij z rešitvami za ustni izpit iz matematike na poklicni maturi [Collection of Situations with Solutions for the Oral Examination in Mathematics at the Vocational Matura]. However, some teachers took the hardest path and began to create situations by themselves. Preparing the situations took up much of the teachers' time and it was difficult to capture all the curriculum contents.

The transition to the new way of implementing the oral examination at the vocational matura is easier for secondary school students. The students feel that the new way does not require memorizing the theory but instead requires a better understanding of mathematical contents; they are more motivated to learn, have greater confidence in their mathematical knowledge, have become more interested in mathematics, and are more eager to learn.

Keywords: vocational matura, situations on the oral examination

Uvod

Matematika na poklicni maturi (kot tretji predmet) ni obvezni predmet, ampak izbirni. Izbere ga tisti dijak, ki si to želi. Dijak izbira med štirimi predmeti – matematiko, italijanščino, angleščino ali nemščino. Dijaki na obali najraje izberejo angleščino ali italijanščino, če jim seveda jezik leži. Če imajo težave z jeziki, se odločijo za matematiko. Nekaj dijakov pa je tudi takih, ki izberejo matematiko ravno zato, ker so pri tem predmetu uspešni in jih učenje matematike veseli. Tisti dijaki, ki jih matematika od nekdaj veseli, so na maturi velikokrat zelo uspešni. Po navadi so taki dijaki vsa štiri leta zavzeti za matematiko, sproti delajo domače naloge, med poukom sledijo razlagi, sodelujejo pri pouku in ob nejasnostih vprašajo učitelja za dodatno razlago. Dijaki, ki pa izberejo matematiko zgolj zato, ker jim jezik ne leži, so običajno

manj uspešni, imajo večji odpor do učenja in posledično slabše rezultate. So tudi taki dijaki, ki se poteka reševanja nalog učijo na pamet, kar pa se na maturi ne obnese. Takrat se pokažejo težave in določeni primanjkljaji pri določenih matematičnih vsebinah. Dijaki menijo, da je pisni del težji kot pa ustni del mature. Pri ustnem delu mature bolj zaupajo svojemu znanju, saj jih v primeru napake učitelj popravi in jih pravilno vodi, da pridejo sami do pravilne rešitve.

Ustni izpit pri matematiki

Na ustnem izpitu iz matematike dijak dobi eno situacijo iz stroke ali vsakdanjega življenja. Pod situacijo so zapisane tri naloge, ki izhajajo iz nje in pod vsakim vprašanjem teoretično vprašanje, ki se smiselno navezuje na nalogo (vsaka naloga je vredna 10 točk). Dijak reši zastavljeno nalogo, med reševanjem naloge mora povezati teorijo z nalogo in pri tem lahko uporabi dovoljen tehnološki pripomoček (grafično žepno računalo ali pa računalnik z ustrezno programsko opremo – Word, Excel, Graph, GeoGebra …). Dijak ima možnost en listek (situacijo) zamenjati, vendar mu ostane zamenjani listek. Pripravljajo se 15 minut, nato pa 20 minut zagovarjajo pred dvočlansko (tričlansko) komisijo.

Sestava situacij na ustnem delu poklicne mature

Situacije stroke ali situacije o vsakdanjem življenju sestavijo učitelji na šoli. Učitelji se odločijo, ali bodo sestavili situacije za določeno stroko ali pa življenjske situacije znotraj aktiva, ki se jih lahko uporabi za več programov srednje strokovnega izobraževanja (situacij mora bit 35). Upoštevati je treba predmetni izpitni katalog.

Situacije sem sestavila s pomočjo knjige Zbirka situacij z rešitvami za ustni izpit iz matematike na poklicni maturi in s pomočjo situacij Srednje šole Ravne. Naloge sem preuredila za določeno stroko (kozmetični tehnik ter gastronomija in turizem) oziroma za vsakdanje življenje. Vsako leto situacije na novo pregledam, dodam, spremenim ali zamenjam.

Menim, da so situacije na poklicni maturi lažje za dijake, saj se jim ni treba učiti teorije na pamet, ampak je pomembno, da znajo povezati matematiko s stroko oziroma z vsakdanjim življenjem in pravilno uporabiti matematično znanje. Za nas učitelje pa je veliko težje, saj porabimo veliko časa za sestavljanje situacij in zelo težko zajamemo vse vsebine po učnem načrtu. Hkrati je zelo težko narediti enakovredne situacije.

Na začetku šolskega leta dijakom 4. letnikov razdelim seznam teoretičnih vprašanj, ki jih lahko pričakujejo znotraj situacij na maturi in primere 8 situacij. Predlagam jim tudi, da pri samostojnem učenju uporabljajo knjigo Zbirka situacij z rešitvami za ustni izpit iz matematike na poklicni maturi.

Dijaki se prvič srečajo s situacijami pri projektnem dnevu. Pripravim jim situacije na določeno temo projektnega dneva in glede na vsebine, ki jo obravnavamo v šoli. Rešujejo jih samostojno in na koncu naloge med seboj pregledajo ter točkujejo. Tako se seznanijo s situacijami in kako se jih vrednoti. Seznam teoretičnih vprašanj pa že poznajo, ker pri ustnem spraševanju običajno dobijo tri teoretična vprašanja na matematičnih primerih.

Mnenje dijakov

Po končanem ustnem delu mature sem dijake prosila, da mi napišejo svojo refleksijo na ustni del mature iz matematike. Napisali so naslednje:

- »Meni se je ustni del zdel zelo dober, čeprav sem se ustrašila vsega skupaj. Pri ustnem delu sem se sprostila in z nalogami sem bila zadovoljna. Kakorkoli mi je šlo dosti, dosti boljše kot pri pisnem delu. Dobila sem občutek, da nekaj znam. Rada bi še posebej pohvalila vaš odnos do nas, ki ste nam dala upanje, da lahko nekaj naredimo tudi tisti, ki nam matematika ne leži.«
- »Meni je bilo presenetljivo lahko. Verjetno tudi malo sreče pri vlečenju listka. Pri nalogah sem morala uporabiti tudi malo logike. Pričakovala sem, da bo več teorije za razložit, čistih definicij. Za ustni del se nisem veliko učila, nekaj vprašanj sem rešila, ostalo pa sem šla večinoma po knjigi Zbirka situacij z rešitvami za ustni izpit iz matematike.«
- »Na samemu zagovoru sem doživel zanimivo in novo prijetno izkušnjo. Zelo sem zadovoljen s prijetnim vzdušjem v učilnici, malo heca in malo resno. Lepo ste mi dali možnost, da sem vse obrazložil in uporabil logiko. Bilo je izredno lepo vzdušje, ste ga res lepo pričarali. Sem izredno zadovoljen nad vašim opravljanjem službe, ste dobra profesorica.«
- »Moram priznati, da sem si po opravljeni ustni maturi iz matematike kar oddahnila. Pisni del me je rahlo presenetil, ker nisem bila pripravljena na tak nivo nalog. No, ustni del pa se mi je zdel bistveno enostavnejši in zanimivejši. Sprva sem bila skeptična, da bo tudi to velik »bav bav«, toda ko sem zagledala raven težavnosti nalog sem se pomirila. Všeč mi je bilo, da so se primeri navezovali na začetno situacijo tvorili celoto. Tista slikica kot dodatek na situaciji mi je dala občutek sproščenosti, da ni izgledalo vse tako tegobno, suhoparno in resno.«

Literatura

Državni izpitni center. Elektronski vir: https://www.ric.si/mma/P-MAT-2019/2017083009164919/(15. 10. 2019)

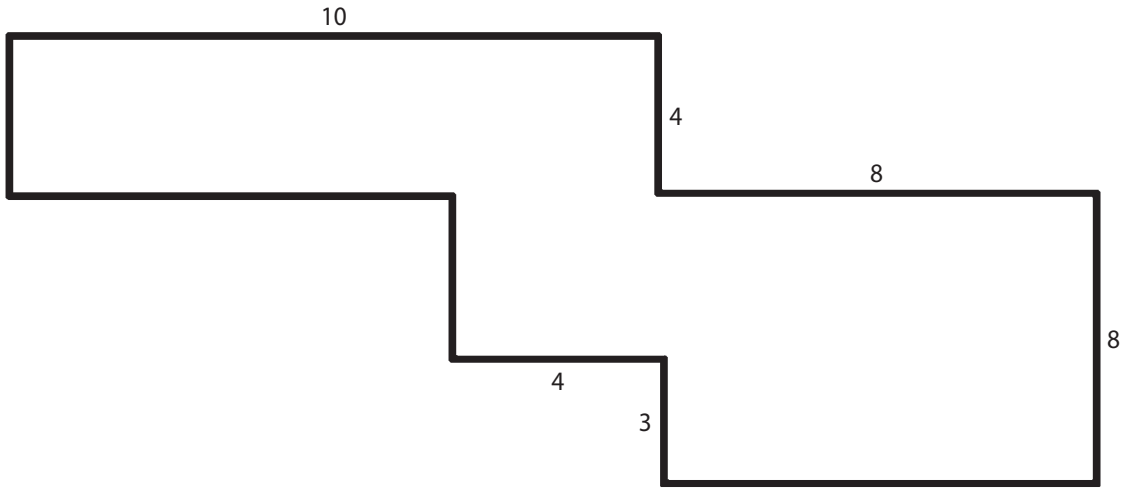
Srednja šola Ravne. Elektronski vir: http://srednjasolaravne.si/files/2018/11/vprasanja_mat.pdf (23. 6. 2021)

Dolinar., G. (2019). *Zbirka situacij z rešitvami za ustni izpit iz matematike na poklicni maturi.* Državni izpitni center.

Državna predmetna komisija za poklicno maturo za matematiko (2018). Elektronski vir: https://www.zrss.si/kupm2018/wp-content/uploads/2018/07/ustni-izpit-iz-matematike-na-poklicni-maturi-kupm2018-gd.pdf (28. 6. 2021)

Učna situacija 1: ODPRTJE GOSTILNE TRI PALME

Lastnik gostilne Tri palme bo položil keramiko po celotni gostilni. Na skici je tloris gostilne v metrih:



1. naloga

Koliko kvadratnih metrov ploščic potrebuje za tlakovanje celotne gostilne? Kupil je 1500 ploščic mere 30 cm × 30 cm. Ali je kupil dovolj ali premalo ploščic? Koliko mu jih ostane oziroma zmanjka?

Definiraj kvadrat in pravokotnik. Kako izračunamo ploščino kvadrata in kako ploščino pravokotnika?

2. naloga

Pri odprtju gostilne so prodajali karte za obisk predstave. Karte za odrasle so bile 5 € in karte za otroke so bile 3 €. Koliko odraslih in koliko otrok je bilo na predstavi, če so prodali 150kart in so imeli v blagajni 500 €zaslužka s prodajo kart? Pomagaj si z dovoljenim tehnološkim pripomočkom.

Kako rešujemo sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama? Razloži tudi geometrijski pomen.

3. naloga

V gostilni je regal s policami v obliki trikotnika z osmimi policami. Na najkrajšo polico lahko postavimo 2 kozarca, na vsako naslednjo pa tri kozarce več. Koliko kozarcev lahko postavimo na 8. polico? Koliko kozarcev lahko postavimo na vse police v regalu skupaj? Katero zaporedje predstavlja število kozarcev na policah?

Definiraj aritmetično zaporedje. Zapiši splošni člen in vsoto prvih n členov aritmetičnega zaporedja.

Predlog: V primeru obravnave pri pouku matematike lahko prvo nalogo nadgradimo v primer matematičnega modeliranja:

Tla gostilne bomo položili s ploščicami. Koliko ploščic potrebuješ? Izdelaj/nariši načrt polaganja ploščic.

Sledi predstavitev izdelanih načrtov (modelov) in njihovo vrednotenje.

Učna situacija 2: **MASAŽNI STOL**

Tadeja se je odločila kupiti masažni stol. Za stol bo plačala 2820 € brez DDV.

1. naloga

Tadeja je v petih letih privarčevala ravno toliko, kolikor bo plačala za stol.
Koliko denarja je vložila pred petimi leti, če je imela banka letni pripis obresti in 5 % obrestno mero?

Kako izračunamo vrednost glavnice G po *n* letih, če je obrestovanje obrestno, pripis obresti letni in obrestna mera p?

2. naloga

Koliko bi stal masažni stol, če bi Tadeja morala plačati tudi DDV (20 %)? Ob plačilu z gotovino se ji prizna 5 % popusta. Koliko bi stal stol, če bi ga plačala z gotovino?

Kako računamo z odstotki?

3. naloga

Ob masažnem stolu ima Tadeja regal s steklenicami eteričnega olja. Od tega so tri eterična olja sivke, štiri eterična olja sladke pomaranče in pet eteričnih olj čajevca. Na koliko načinov jih lahko razporedi na polici:

- pri poljubni razporeditvi?
- če naj enaka olja stojijo skupaj?

Definiraj permutacije brez ponavljanja.

Učna situacija 3: **MASAŽA**

V tabeli so zbrani podatki o številu masaž za naslednjih sedem mesecev. Cena masaže je 22 €.

Mesec	Število masaž
april	61
maj	72
junij	74
julij	126
avgust	157
september	61
oktober	82

1. naloga

a) Koliko je bil prihodek od masaž v mesecu, ko je bilo masaž največ?

b) Kolikšno je bilo povprečno mesečno število masaž?

c) Številu masaž v preglednici dodamo število masaž za mesec november. Novo povprečje masaž je 92. Koliko je število masaž v novembru?

Pomagaj si z dovoljenim tehnološkim pripomočkom!

Katere srednje vrednosti poznaš in kako jih določimo?

2. naloga

V novembru so začeli masirati z uporabo krogle, katere prostornina je 524 cm^3. Izračunaj premer ter površino te krogle.

Opiši kroglo. Kako izračunamo površino?

3. naloga

Z uvedbo nove masaže so v novembru naredili 103 masaže. V decembru so naredili 35 % več masaž kot v novembru, v januarju pa 15 % manj kot v decembru. Koliko masaž so naredili v decembru in koliko v januarju?

Kako računamo z odstotki?

Učna situacija 4: UREJENOST RESTAVRACIJE

Natakarici Nastja in Silvija sta se odločili, da na dve mizi postavita šopek svežih rož.

1. naloga

Na prvi mizi je v šopku 5 tulipanov in 8 vrtnic, za kar je Silvija plačala 10,50 €.
Na drugi mizi pa so v šopku 3 tulipani in 12 vrtnic, za kar pa je Nastja plačala 13,50 €. Koliko stane en tulipan in koliko ena vrtnica? Pomagaj si z dovoljenim tehnološkim pripomočkom.

Kako rešujemo sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama?
Razloži tudi geometrijski pomen.

2. naloga

V prvi cvetličarni stane šopek vrtnic in tulipanov 10,50 €. V drugi cvetličarni pa je šopek vrtnic in tulipanov dražji za 15 %. Koliko bi Silvija plačala za enak šopek v drugi cvetličarni, če bi ji ponudili 5 % na plačilo z gotovino?

Kako računamo z odstotki?

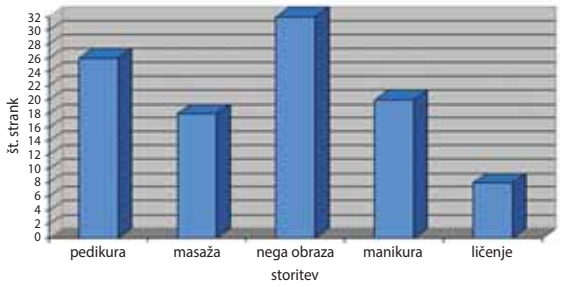
3. naloga

Vaza ima obliko kvadra z dimenzijami 10 cm × 13 cm × 20 cm. Vodo sta nalili do ¾ višine vaze.
Koliko litrov vode sta porabili za obe vazi?

Opiši kvader. Kako izračunamo njegovo prostornino?

Učna situacija 5: **OBISK KOZMETIČNEGA SALONA**

V kozmetičnem salonu Tadeja so v mesecu maju opravili naslednje storitve, ki so prikazane v desnem diagramu.



1. naloga

Koliko strank je v mesecu maju obiskalo kozmetični salon? Kako imenujemo ta diagram? Koliko strank na dan je v povprečju obiskalo salon, če je v maju 20 delovnih dni?

Kako nazorno predstavljamo statistične podatke?
Kaj je histogram, kaj frekvenčni kolač in kaj linijski diagram?

2. naloga

Kozmetični salon je v mesecu juniju ceno pedikure 25 € podražil za 20 %, nato pa ceno dvakrat znižal za 10 %. Ali je bila pedikura v naslednjem mesecu dražja ali cenejša kot v juniju in za koliko?

Kako računamo z odstotki?

3. naloga

V kozmetičnem salonu bi radi čez tri leta kupili nov solarij, zato bodo dali denar na banko. Trenutno imajo privarčevanih 8500 €, za katere bi jim na banki dali 3,45 % obresti, pri čemer so se seveda odločili za obrestno obrestovanje z letnim pripisom obresti. Koliko denarja bodo imeli na računu tik pred nakupom solarija?

Kako izračunamo vrednost glavnice G po *n* letih, če je obrestovanje obrestno, pripis obresti letni in obrestna mera p?

Geolov in matematika v šoli

Miha Šušteršič
Škofijska gimnazija Vipava

Izvleček

V članku je predstavljena pustolovska igra geolov, ki jo je mogoče uporabiti tudi kot didaktični pripomoček pri obogatitvi pouka (matematike) v šoli. Podrobneje je predstavljen primer povezave igre z maturitetnim izpitom iz matematike. Navedeni so tudi drugi primeri uporabe igre pri aktivnostih v povezavi z matematiko v šoli.

Ključne besede: geolov, splošna matura iz matematike

Geocaching and Mathematics in School

Abstract

The article presents the adventure game Geocaching, which can also be used as a didactic aid to spice up (mathematics) lessons in school. It presents in greater detail how the game can be linked to the matura examination in mathematics. It also mentions other examples of using the game in mathematics-related activities in school.

Keywords: Geocaching, general matura in mathematics

Splošno o geolovu

Geocaching ali v slovenskem prevodu **geolov** je moderna pustolovska igra iskanja zakladov v naravi s pomočjo GPS sprejemnikov. Gre obenem za zabavo in rekreacijo, pa tudi za neformalno učenje in spoznavanje novih krajev. Igra je primerna tako za družine kot za popotnike, raziskovalce in turiste. Udeleženci igre morajo s pomočjo na spletu objavljenih podatkov (opisa lokacije in podanih zemljepisne širine in dolžine ter morebitnih namigov o skrivni lokaciji) najti nekje v naravi ali naselju skrito škatlico. Njena oblika ni predpisana, najmanj, kar mora vsebovati, pa je vpisna knjižica, kamor iskalci ob najdbi vpišejo svoj nadimek in datum najdbe. Nekateri večji zakladi poleg dnevnika vsebujejo še razne predmete (običajno so to igrače), ki jih po nenapisanem pravilu iskalci lahko iz škatle vzamejo le pod pogojem, da vanjo vstavijo svoj predmet. Po uspešni najdbi zaklada iskalec svojo najdbo zabeleži na spletu, kjer lahko zapiše tudi doživetje ob iskanju. Med obstoječimi bazami zakladov je daleč najbolj razširjen spletni portal *geocaching.com* (glej [1]), ki vsebuje več milijonov zakladov, prisotnih v več kot 200 državah po svetu. Osnovna uporaba omenjenega portala je brezplačna, za uporabo je potrebna le registracija in prijava s pomočjo elektronske pošte. Prvi zaklad je bil postavljen in objavljen maja 2000 v Severni Ameriki, le dan za tem, ko je signal GPS postal dostopen za splošno populacijo. V Sloveniji je bil prvi zakladek postavljen že junija 2001 na obali (pri Luciji), konec avgusta 2021 pa je bilo pri nas evidentiranih nekaj več kot 5600 skrivališč [3]. Obstaja več vrst zakladov, med katerimi so najpogostejši:

- **Tradicionalni zakladi**, ki jih iščemo samo s pomočjo koordinat, ki predstavljajo točno lokacijo zaklada.
- **Večstopenjski zakladi**, ki vsebujejo dve ali več lokacij, ki jih je treba obiskati, če želimo pridobiti informacije glede končne lokacije zaklada.
- **Ugankarski zakladi**, pri katerih moramo najprej rešiti uganko, s pomočjo katere pridobimo končne koordinate.

Poleg iskanja zakladov zanimiv izziv igralcem ponuja tudi skrivanje le-teh. Snovalec zaklada mora najprej izbrati kraj (naravno, kulturno ali kakšno drugo zanimivost) ter ustrezno lokacijo, kjer želi skriti zaklad (lokacija mora biti vsaj 0,1 milje oziroma 161 metrov oddaljena od sosednjega zaklada). Nato sledi izdelava ali nakup ustrezne škatlice in vpisnega dnevnika. Po namestitvi zaklada je treba čim bolj natančno izmeriti koordinate mesta skrivališča (nekateri geolovci uporabljajo namenske GPS naprave, dovolj dobre meritve pa nudi tudi običajni pametni telefon z uporabo ustreznih aplikacij). Na koncu sledi še vnos podatkov zaklada v splet, kjer se poleg koordinat in opisa znamenitosti običajno doda še kakšno sliko, zapiše velikost vsebnika in težavnost iskanja, opredeli težavnost terena in v obliki sličic oz. atributov doda še druge morebitne posebnosti (npr. ali je za iskanje potrebna dodatna oprema – čoln, vrv za plezanje, potapljaška oprema, UV-svetilka …). Zatem je spletna vsebina zaklada oddana v pregled pregledovalcu – prostovoljcu, ki preveri ustreznost objave s pravili igre [2]. Po potrditvi se zakladek pojavi na zemljevidu portala in ostali geolovci se lahko odpravijo na

iskanje. Postavljavec zaklada je nato dolžan vsebino vzdrževati (odpravljati morebitne poškodbe, zamenjati vpisne dnevnike, poskrbeti za nadomestitev izginulega zaklada), lahko pa se tudi odloči, da zakladek arhivira in ga s tem umakne iz igre. Nekateri postavljavci zakladov se odločijo za postavitev serije oziroma t. i. traila - poti v naravi, na kateri je skritih več zakladov, ki jih povezuje rdeča nit. Serije se običajno zaključijo z bonus zakladom, ki ga iskalec najde s pomočjo podatkov iz skrivališč obiskane poti.

Serija ugankarskih zakladov MM - matura iz matematike

Serija je bila s strani avtorja članka sestavljena, postavljena in objavljena v začetku februarja 2021, do avgusta 2021 pa jo je obiskalo nekaj več kot 40 geolovskih ekip. Gre za petnajst **ugankarskih zakladov (?)** z imenom MM – matura iz matematike, katerih koordinate iskalec pridobi z reševanjem matematičnih nalog. Po vzoru prenovljene maturitetne pole matematike (osnovna raven) jo sestavlja 8 zakladkov tipa A (kratke naloge) in 6 zakladov tipa B (krajše strukturirane naloge). Štirinajstim nalogam je dodan še bonus zakladek, za katerega je treba uporabiti podatke iz obiskanih zakladov in rešiti strukturirano nalogo višje ravni mature. V nadaljevanju članka so objavljene naloge. Za prvo od njih je zapisan tudi primer dodatnih podatkov, ki jih sicer pridobimo na spletu (zahtevnost reševanja in formula za izračun koordinat, zahtevnost iskanja na terenu, velikost, namig, druge lastnosti).

Slika 1: Približne lokacije 15 zakladov serije MM oblikujejo črko M, natančne koordinate skritih škatlic pa se pridobijo s pomočjo reševanja nalog.

MM – A1: Izračunajte vsoto:

$$A = 0{,}8\overline{3} + i^{1000} + \binom{4}{3} + \log_2 8 + e^0 + \frac{1}{6} + 83$$

Drugi podatki:

- *Izračun lokacije: N 45° 47.A-91 , E 014° 12.2*A+16 (Primer: za vrednost bi po vstavljanju v formulo dobili GPS koordinate N 45° 47.002 , E 014° 12.202.)*
- *Velikost zaklada: mikro (do 10 cm),*
- *Zahtevnost iskanja: 3 / 5,*
- *Zahtevnost terena: 2 / 5,*
- *Namig za iskanje: »V mednožju«,*
- *Lastnosti: priporočeno za otroke, dovoljen obisk s psom, dosegljivo 24/7, srednja hoja, klopi in komarji*

MM – A2: Izračunajte neznanko B, če je vrednost logaritma z osnovo 3 in logaritmandom $(B - 1)$ enaka 5.

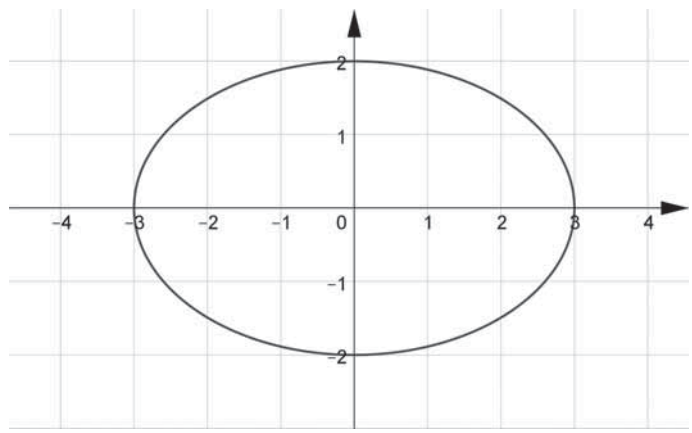
MM – A3: V pravokotnem trikotniku meri hipotenuza 13 cm, ena od katet pa je 8 cm krajša od hipotenuze. Najmanjši notranji kot tega trikotnika, zaokrožen na stopinje natančno, meri C stopinj.

MM – A4: Izračunajte vsoto geometrijske vrste:

$$D = 10 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

MM – A5: Enačba elipse na sliki je $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Izračunaj vrednost $E = (a + b + e^2)^2$, kjer je e linearna ekscentričnost elipse.



MM – A6: Janez je vsak dan v tednu opravil kolesarski trening. Prvih 6 dni je prekolesaril razdalje 31 km, 28 km, 42 km, 25 km, 50 km, 47 km. Koliko (F km) je prekolesaril sedmi dan, če je v povprečju v sedmih dneh tedna prekolesaril 40 km na dan?

MM – A7: Pravilna šeststrana enakoroba prizma ima višino dolgo $\sqrt{3}$ centimetrov. Prostornina dveh takih prizem je enaka G kubičnih centimetrov.

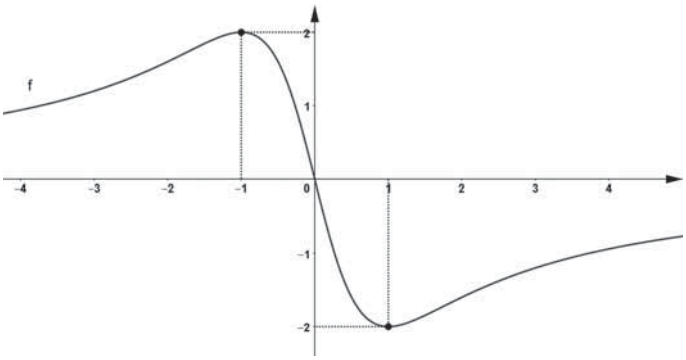
MM – A8: Iz cifer 1, 2 in 3 lahko sestavimo m trimestnih števil, kjer se števke 1, 2 in 3 ne smejo ponavljati, in n trimestnih števil, kjer se števke 1, 2 in 3 lahko ponavljajo. Izračunaj $H = m + n$.

MM – B1: Dane so množice: $A = \{a \in \mathbb{N};\ 2a - 1 < 30\}$, $B = \{b \in \mathbb{Z};\ b^2 - 2b = 8\}$ in $C = \{c \in \mathbb{R};\ c^3 - 2c^2 + c = 2\}$. Vsota moči danih množic je število J.

MM – B2: Kot med vektorjema $\vec{a} = (3, 4, -2)$ in $\vec{b} = (-2, 3, -1)$, zaokrožen na stopinjo natančno, meri K stopinj.

MM – B3: Izračunajte, za katero realno število L so $9 \cdot 2^{L+1}$, $3 \cdot 2^{L+6}$, 2^{2L} v tem vrstnem redu trije zaporedni členi geometrijskega zaporedja.

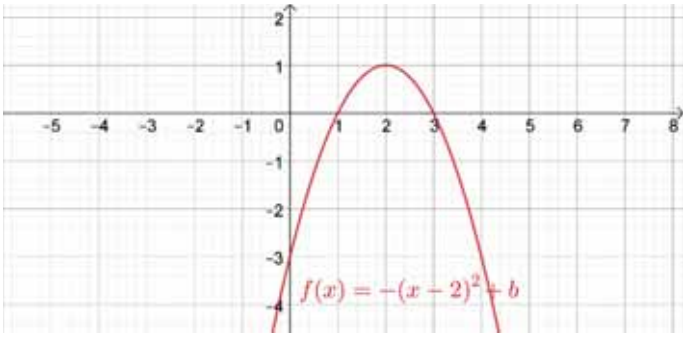
MM – B4: Na sliki je del grafa lihe funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Funkcija $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je podana s predpisom $g(x) = 3x - 1$.

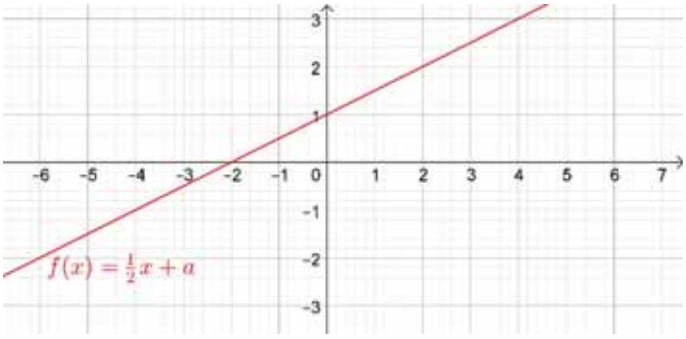


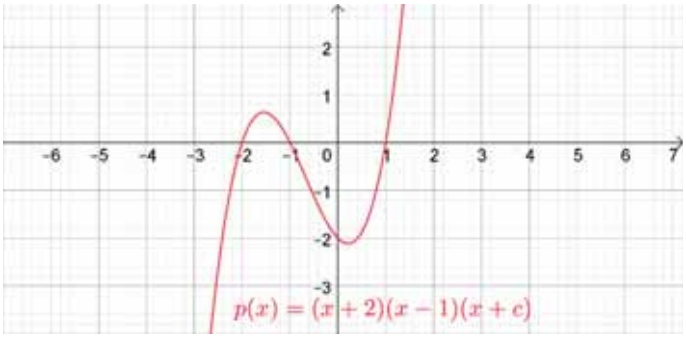
Izračunajte vrednost izraza:

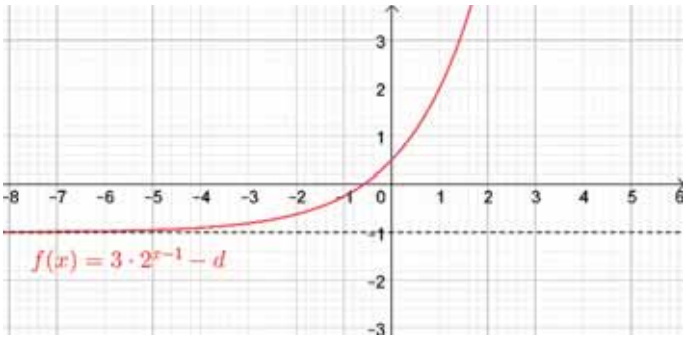
$$M = f(1) + g^{-1}(-4) + f\big(g(0)\big) + \int_{-4}^{4} f(x)dx + \int_{0}^{2} g(x)\,dx.$$

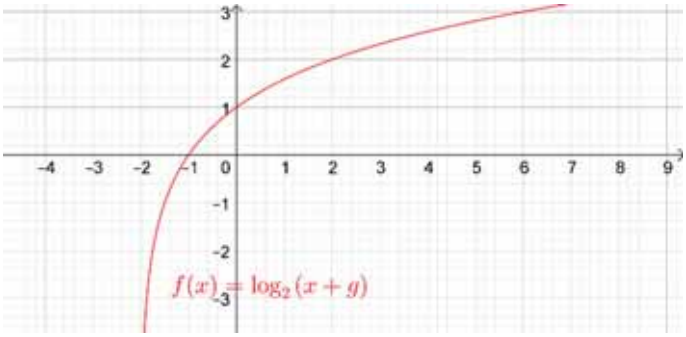
MM – B5: Na slikah so grafi raznih funkcij realne spremenljivke oziroma določene množice v ravnini. S pomočjo slik določite neznane parametre ter izračunajte vrednost izraza $N = a + b + c + d + g + h + j + k$.

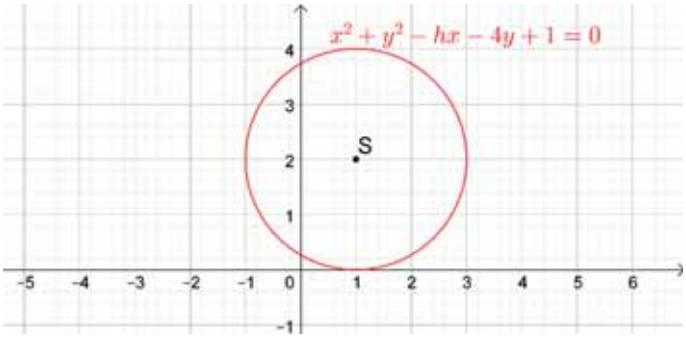


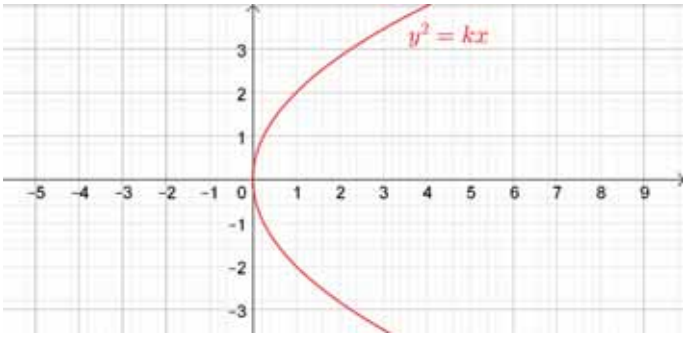


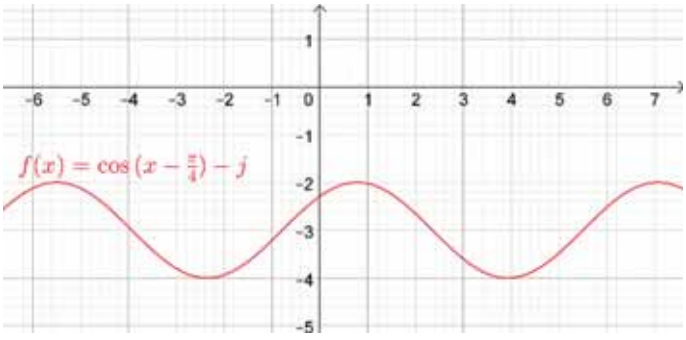












MM – B6: Izračunajte vrednost izraza:

$$P = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(3\pi + x) + 3x}{2x} + 18 \cdot \left(1 + \frac{1}{17}\right)^{-1}.$$

MM Bonus: Ikozaeder je pravilni polieder, omejen z 20 enakostraničnimi trikotniki. Na vsako ploskev napišemo po eno izmed števil od 1 do 20, ki se ne ponavljajo.

1. Hkrati zakotalimo dva oštevilčena ikozaedra. Kolikšna je verjetnost dogodka A , da je vsota števil na obeh zgornjih ploskvah praštevilo, manjše ali enako 13? Rezultat zaokrožite na štiri decimalna mesta (0,0*RST*).
2. En oštevilčeni dodekaeder zakotalimo 15-krat. Kolikšna je verjetnost dogodka B, da se bo v teh 15 ponovitvah poskusa število 11 pojavilo na zgornji ploskvi natanko 3-krat? Rezultat zaokrožite na tri decimalna mesta (0, *UVZ*).

Preizkus iskanja »maturitetnih zakladov« (kot didaktičnega pripomočka pri poučevanju matematike) do nastanka članka s strani avtorja še ni bil izveden v okviru pouka, je pa načrtovana izvedba v prihodnosti. Glede na vpise udeležencev poti pa so zaklade obiskali naši srednješolci samostojno in pri tem zapisali (citirano): *»Z matematiko se je poigrala naša bodoča maturantka, zato je večina nalog imela hitro pravo rešitev. Lahko bi rekli, da je bila za nas cela serija objavljena ravno pravi trenutek, nekakšna predpriprava na letošnjo prav posebno covid-19 maturo«* (zapisano 28. 2. 2021).

Predviden načrt aktivnosti za izvedbo v razredu (kot utrjevanje snovi v 3. ali 4. letniku srednje šole):

**Glede na to, da (slovenske) zaklade obiskujejo tudi številne geolovske ekipe iz tujine, se mnogo postavljavcev odloči za opis zaklada v enem izmed tujih jezikov. Serija MM je trenutno zapisana le v slovenščini, zato se kot predlog medpredmetne povezave matematike s tujimi jeziki odpira možnost prevoda opisa zakladov in matematičnih nalog v angleščino, nemščino ali italijanščino.*

Slika 2: Primer skritega zaklada na seriji MM – matura iz matematike.

Aktivnost	Čas izvedbe	Opombe
Predstavitev igre, ustvarjanje računov in nameščanje aplikacij na mobilne telefone	1 ura	Poleg telefonov priporočljiva uporaba računalnikov (računalniška učilnica).
Reševanje maturitetnih nalog	2 uri	Delo v parih (po dva dijaka rešita eno nalogo); dijaki si nato med seboj predstavijo in izmenjajo rešitve nalog.
	ALI	
	4 ure	Individualno oz. domače delo (npr. učitelj prikaže celoten postopek reševanja in računanja koordinat na primeru ene od nalog, nato dijaki rešujejo samostojno).
Preverjanje rešitev in računanje natančnih koordinat zakladov	1 ura	Priporočljivo je, da ima vsak od udeležencev koordinate zakladov v svoji napravi.
Pohod	8 ur	- Organizacija prevoza v Postojno, - možnost kombinacije s športnim dnevom, - priporočljivo, da zaklade obiskujejo v manjših skupinah (npr. po 3–4 dijaki), - pohodna obutev in pisala za vpisovanje v dnevnik, - izračunane lokacije zakladov izrišejo traso, ki poteka po kraški pokrajini severno od Postojne, nad Postojnsko jamo. Skoraj krožna pot meri približno 7 kilometrov, zakladi so postavljeni ob nekaterih markantnih objektih v naravi. Razdalje med posameznimi škatlicami so med 200 in 500 metri, hoje z iskanjem je za približno 4 ure; iskanje bonus zaklada traja dodatno uro.
*Prevod vsebin zakladov v tuji jezik	2 uri	Medpredmetna povezava z angleščino, nemščino ali italijanščino.

Serija večstopenjskih zakladov Mostovi Vipave

Reka Vipava priteče na dan v številnih kraških izvirih pod strmim pobočjem Nanosa, kjer so se, verjetno prav zaradi obilja čiste vode, ljudje naselili že v pradavnini. Deltast izvir reke Vipave, edini te vrste v Evropi, daje kraju svojevrsten pečat. Čez izvire reke Vipave in rečne rokave (Močilnik, Bela, Lipca) so v preteklih stoletjih v Vipavi zgradili kar 25 mostov. Deset od njih si obiskovalec serije petih dvostopenjskih zakladov lahko tudi pobliže ogleda. Za izračun koordinat lokacij zakladov mora geolovec najprej obiskati enega od mostov. Na tej lokaciji pridobi podatek (število), ki ga nato uporabi za izračun končnih koordinat – te ga pripeljejo do še enega mostu, v bližini katerega se skriva škatlica.

Matematični del obsega račune, primerne tudi za osnovnošolce (računanje z ulomki, potenciranje, korenjenje, uporaba Vietovega pravila pri računanju rešitev kvadratne enačbe). V nadaljevanju je naveden primer opisa zaklada, vključno z nalogo:

Mostovi Vipave 1

Z mostu, na katerem stojite (začetna lokacija N 45° 50.740 E 013° 57.778), je proti jugu dobro viden najbolj znan most v Vipavi - Lanthierijev most, ki je zaradi edinstvene konstrukcije iz kamna posebnost med mostovi v svetovnem merilu. Če z mostu, na katerem stojite, gledate proti Lanthierijevemu mostu, boste na železni ograji (ki ima 11 stebrov) na srednjem stebru tik pod vrhom opazili črno enomestno število (=A) .

Zakladek se nahaja v bližini še enega mostu, formula za izračun koordinat je:

45°50.XXX', 013°57.YYY'

XXX = $A^3 + A^2 - A + \frac{A^3+A}{A} \cdot (A+3)$

YYY = $A \cdot (A+1) \cdot (A+2) + (A+3) + (A+4) + (A+5)$

Drugi podatki:

- *Velikost zaklada: mikro (do 10 cm),*
- *Zahtevnost iskanja: 2,5 / 5,*
- *Zahtevnost terena: 1,5 / 5,*
- *Namig za iskanje: »Skoraj iste barve«,*
- *Lastnosti: priporočeno za otroke, dovoljen obisk s psom, dosegljivo 24/7, možen obisk s kolesom*

Predviden načrt aktivnosti (višji razredi OŠ, vsi letniki SŠ):

Aktivnost	Čas izvedbe	Opombe
Predstavitev igre, ustvarjanje računov in nameščanje aplikacij na mobilne telefone	1 ura	Poleg telefonov priporočljiva uporaba računalnikov (računalniška učilnica). Predstaviti način reševanja in iskanja **večstopenjskih zakladov**.
Pohod po Vipavi	0,5 ure / zaklad, 3 ure za celotno serijo	- V seriji je 5 zakladov, za vsakega se potrebuje v povprečju pol ure; eden od zakladov je oddaljen od Vipave približno 4 km, zato je priporočen obisk z avtomobilom ali kolesom, - priporočljivo, da zaklade obiskujejo v manjših skupinah (npr. po 3–4 dijaki), - pisala za vpisovanje v dnevnik.

Drugi zakladi z matematično vsebino

Učitelj (matematike) v osnovni ali srednji šoli lahko tudi v okolici svoje šole poišče lokacije zakladov in z učenci / dijaki izvede geolov, ki je povezan z matematiko ali drugimi predmetnimi področji. Opozoriti velja, da so geolovske aktivnosti lahko tudi del ekskurzij, tako po Sloveniji kot v tujini (v Italiji je aktivnih več kot 30.000, v Avstriji več kot 50.000, na Madžarskem okoli 8.000, na Hrvaškem 6.000, v Nemčiji pa kar 420.000 zakladov). V nadaljevanju so navedene nekatere lokacije (s kratko vsebino) trenutno dosegljivih »matematičnih zakladov« po Sloveniji. Zagotovo pa seznam ni popoln …

- **Dobova pri Brežicah:** serija osmih ugankarskih zakladov z naslovom »Sprehod z nalogo« avtorja »*fpetel1*«, ki je del nalog priredil iz objav v reviji Presek. Ena od nalog se glasi:

  V Dobovi so imeli tržnico. Gospodar je šel na tržnico in kupil nekaj pujsov, zajcev in piščancev. Koliko živali katere vrste je kupil, če vemo, da je kupil sto živali in za njih zapravil natanko 100 dinarijev? Vemo tudi, da so stali pujsi 5 dinarijev, zajci 2 dinarija in da si za en dinarij dobil tri piščance. Koordinate zaklada so: N 45° 53. XXX E 015° 40. YYY, pri čemer velja:

  *XXX = -3*PUJSI + 8*ZAJCI + 10*PIŠČANCI,*

  *YYY = 3*PUJSI + 4*ZAJCI + 2*PIŠČANCI.*

- **Ljubljana (Vižmarje):** ugankarski zakladek »Mathematicians« avtorja »bojank« - za pridobitev koordinat je potrebno najprej določena področja matematike povezati z znanimi matematiki, nato pa še rešiti nalogo iz geometrije.

- **Ljubljana (Vič):** ugankarski zakladek »Brainiac« avtorja »ninalestone«- potrebno je rešiti dve nekoliko zahtevnejši polinomski enačbi.

- **Kranj:** serija 6 ugankarskih zakladkov z imenom »Sumdoku« avtorja »romtim«, ki od igralca zahteva reševanje t.i. »killer sudoku« ugank, preko katerih se pridobijo koordinate končnih lokacij.

- **Velenje:** kratka serija štirih ugankarskih zakladkov »Logika« avtorja »corsova«- za pridobitev koordinat je potrebno rešiti nekaj logičnih nalog.

Če želi bralec (sam ali s skupino učencev) preizkusiti igro geolova, a naleti na težave oziroma se mu porajajo dodatna vprašanja v zvezi z igro, se lahko obrne na avtorja članka za dodatne informacije (sustersic.miha@sgv.si).

Literatura

https://www.geocaching.com/play (21. 8. 2021)

https://www.geocaching.com/play/guidelines (21. 8. 2021)

https://project-gc.com/Statistics/Overview (21. 8. 2021)

https://www.ric.si/splosna_matura/predmeti/matematika/ (21. 8. 2021)

Pridružite se največji igri iskanja zakladov na svetu na spodnji povezavi:

https://www.geocaching.com/play

V okolici mesta Ljubljana je 1.671 zakladov.

Za začetek si odprite brezplačen račun na spletišču Geocaching in si prenesite uradno aplikacijo Geocaching® ali uporabite samostojno GPS napravo.

Download on the App Store

GET IT ON Google Play

Trije koraki do začetka dogodivščine!

1. Ustvarite račun

Ustvarite račun na spletišču ali z uradno Geocaching® aplikacijo in si oglejte zemljevid zakladov v svoji okolici.

2. Poiščite zaklad

Usmerite se do najbližjega zaklada. Ne pozabite vzeti s sabo pisala!

3. Delite svoje doživetje z drugimi.

Ko zaklad najdete, vpišite datum najdbe in geolovski vzdevek v dnevnik, vrnite zaklad v skrivališče in delite svoje doživetje z drugimi na spletu.

Matematika v šoli, št. 2., letnik 27, 2021

Tehniški dan – priložnost za medpredmetno povezovanje, ustvarjanje in utrjevanje snovi na drugačen način

Dragica Vračun
Osnovna šola Bizeljsko

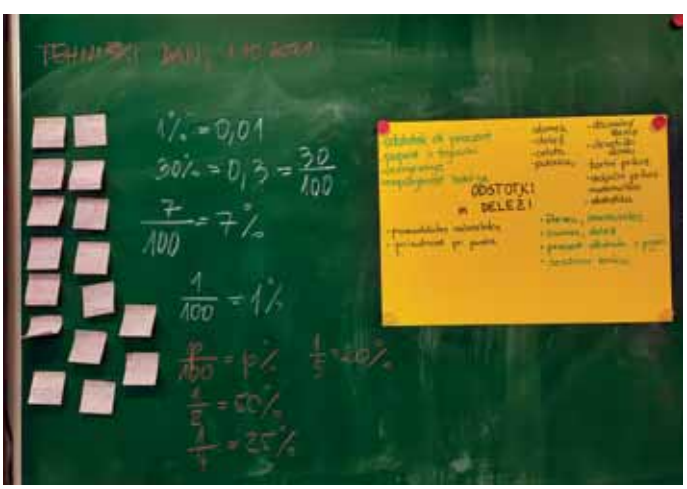
Lansko šolsko leto sem v 7. razredu zaključila z vsebino odstotki. Izvedla sem samo šest ur in še to čisto na koncu šolskega leta. Ker se mi zdi to eno ključnih poglavij, saj ga srečamo na različnih življenjskih področjih, sem se odločila, da s tem sklopom začnemo v letošnjem šolskem letu. Po ponovitvi lani obravnavane snovi o deležih in odstotki in podrobni obravnavi v tem šolskem letu, sem načrtovala tehniški dan, v katerega sem želela vključiti medpredmetno povezovanje.

Tako smo z učenci 8. razreda izvedli tehniški dan na temo odstotki in deleži.

Tehniški dan je potekal v štirih delih.

Uvodni del

Na samolepilne listke je vsak učenec zapisal čim več besed (pojmov) na temo odstotki in deleži pri matematiki in v vsakdanjem življenju. Iz teh besed smo ustvarili plakat, na katerem smo v obliki miselnega vzorca zbrali vse besede. Vse zapisane besede oz. pojme smo prebrali in razložili. Nekateri pojmi niso ustrezali naši vsebini, zato smo jih izločili.



Slika 1: Tabelna slika s plakatom, ki je nastala ob priklicu pojmov na dano temo.

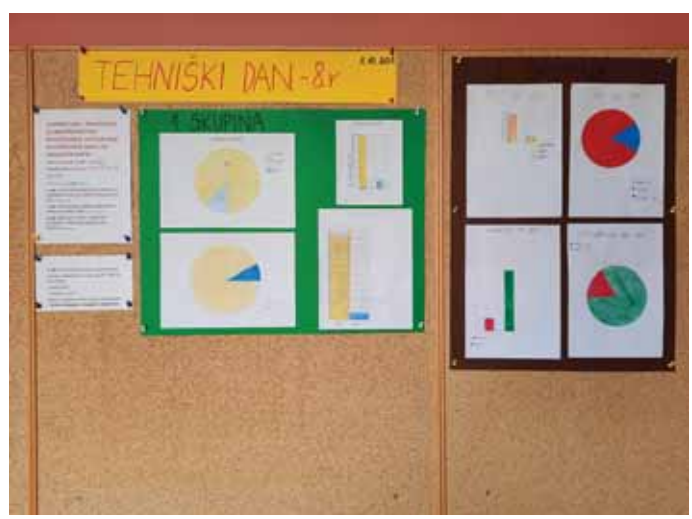
Aktivna dejavnost

Učencem sem predstavila športni nalogi, ki ju bodo morali opraviti:

- *Met žoge na koš in beleženje uspešnosti* ter
- *Strel žoge v gol in beleženje uspešnosti.*

Določila sem dve vodji skupin in pojasnila njihove naloge. Vodji skupin sta tako oblikovali svoji skupini. Vsaka skupina je dobila učni list, na katerega so beležili število zadetih in zgrešenih golov oz. košev.

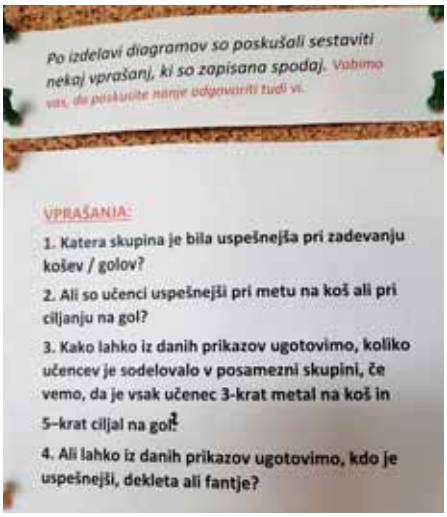
Ko smo se vrnili v učilnice, so izdelali stolpične in tortne prikaze, ki so predstavljali uspešnost učencev. Računske postopke so zapisovali v zvezke, diagrame pa risali na liste, ki smo jih kasneje prilepili na plakata. Plakata smo pripeli na tablo. V nadaljevanju so učenci v skupinah oblikovali vprašanja, na katera bi lahko odgovarjal nekdo, ki bi te prikaze videl (Slika 3).



Slika 2: Stolpčni in tortni prikazi.

Ta naloga je bila za učence še posebej zanimiv izziv, saj so videli, da ni enostavno postaviti smiselnega in razumljivega vprašanja.

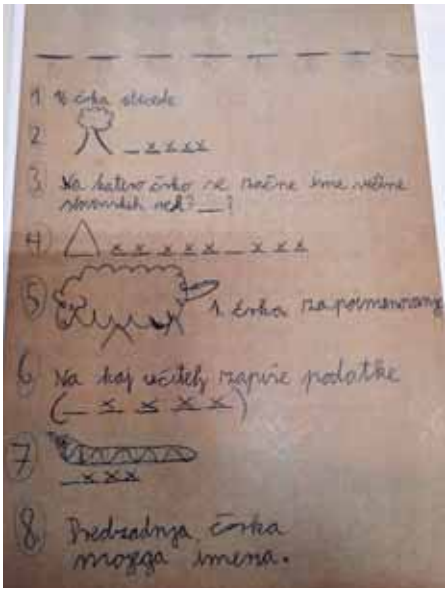
O smiselnosti zastavljenih vprašanj smo se nato skupaj pogovorili in jih zapisali.

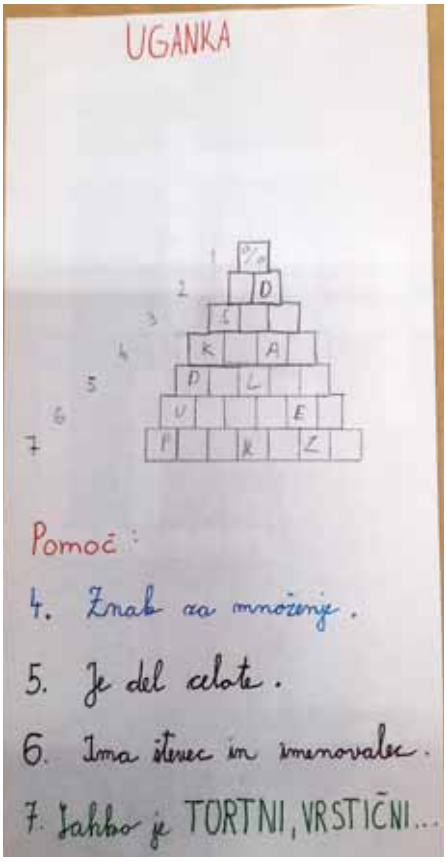


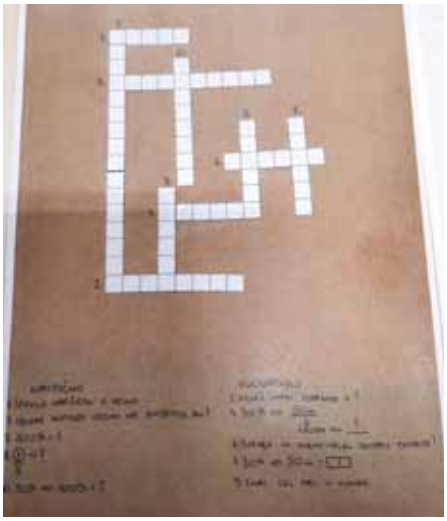
Slika 3: Vprašanja, ki so jih zapisali učenci.

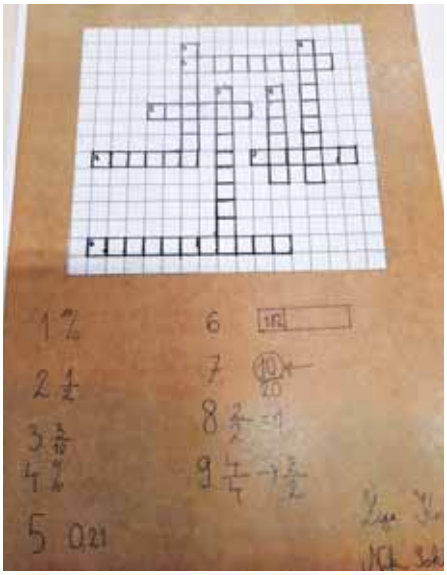
Povezovanje s slovenščino

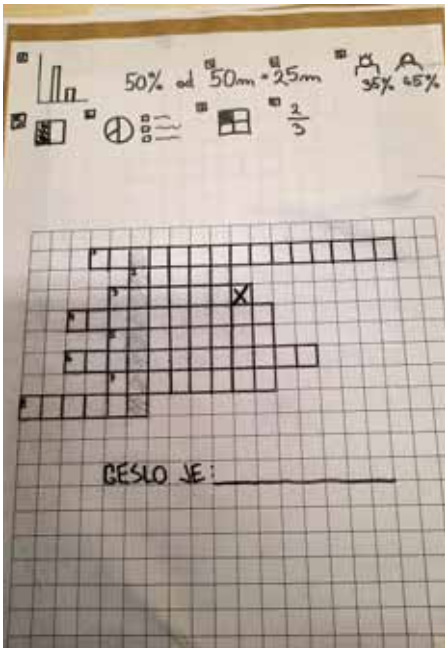
Učenci so s pomočjo plakata, na katerem so bile napisane besede o izbrani temi, oblikovali verze, pesmice, rebuse in križanke. Lahko so delali v paru ali samostojno. Ker je bila to predvsem za učno šibkejše učence zelo zahtevna naloga, je v tem delu pomagala še učiteljica slovenščine. Nastali so nekateri zares zanimivi izdelki, ki smo jih kasneje plastificirali in dodali na razstavo.

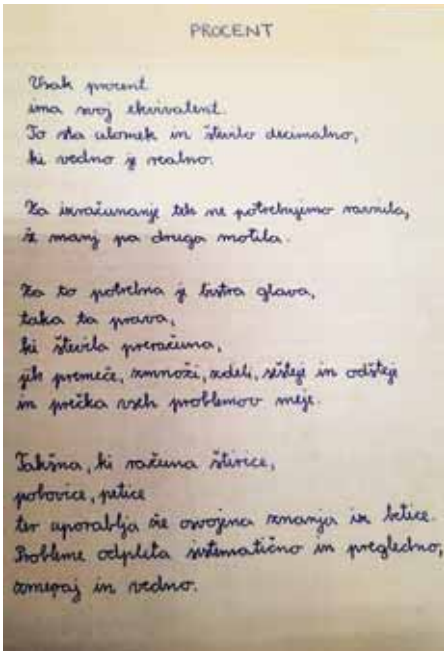








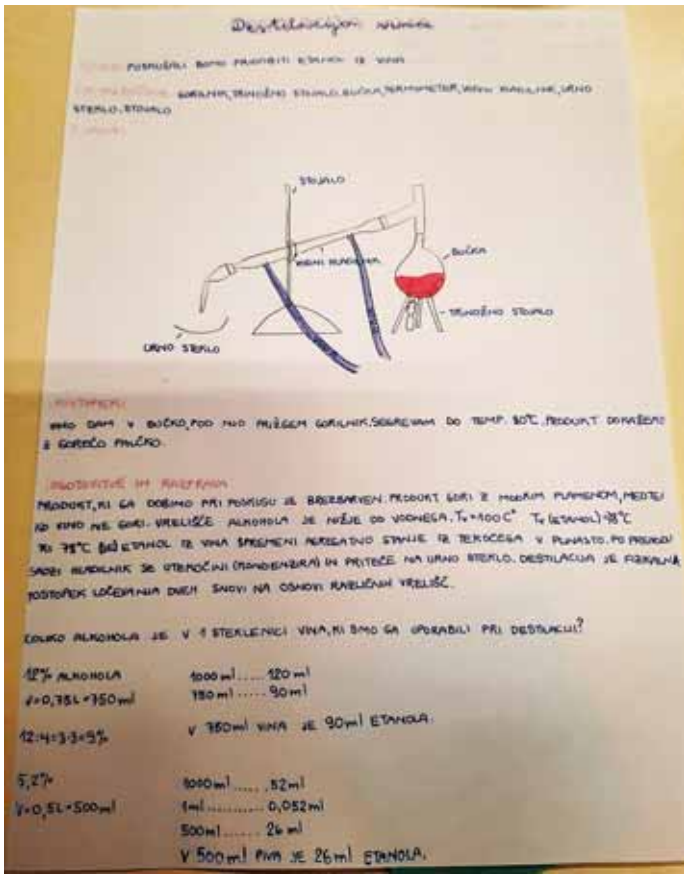


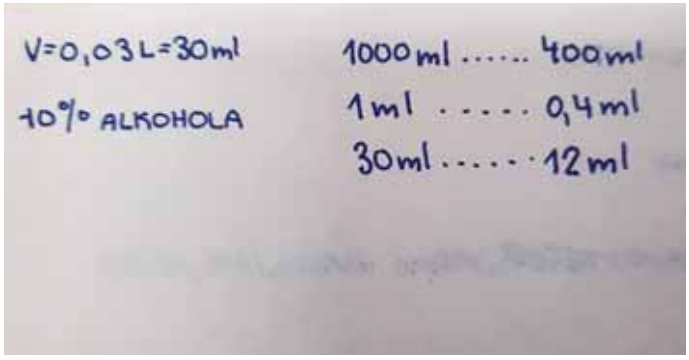


Slike 4: Izdelki, ki so nastali v drugem delu.

Povezovanje s kemijo in biologijo

Za zanimiv zaključek tehniškega dne je poskrbela učiteljica biologije in kemije, ki je predstavila poskus destilacije vina. Učenci so primerjali odstotke alkohola v posameznih alkoholnih pijačah, se pogovarjali o vsebnosti alkohola v reaktantu in produktu ter o njihovi vnetljivosti.





Slike 5: Učenci so izračunali delež alkohola v steklenici vina in piva.

Zaključek

Po končanem tehniškem dnevu so učenci zapisali nekaj vtisov, ki smo jih potem prebrali. Večina učencev je bila navdušena nad izvedbo tega dne. Čeprav so bili v šolskih prostorih, so se sprostili, pridobili in utrdili mnogo znanj in veščin. Všeč jim je bilo skupinsko delo in delo v parih, čeprav so včasih nastopile težave pri organizaciji dela v skupinah. Pohvalili so raznolikost nalog, ki so bile povezane tako z matematiko, jezikovnim in likovnim izražanjem ter nenazadnje še eksperimentalno delo. Tako je lahko vsak posameznika našel nekaj zanimivega zase, da je lahko uspešno sodeloval.

Če bo šolsko leto teklo kot smo si zadali, bom ob koncu šolskega leta podoben tehniški dan izvedla še s sedanjimi sedmošolci.

Evropske statistične igre*

Irena Rauter Repija in Mateja Godec
Gimnazija Franca Miklošiča Ljutomer

Evropske statistične igre so tekmovanje, ki poteka na državni in mednarodni ravni. Organizira ga Statistični urad Republike Slovenije v sodelovanju z Eurostatom in s Statističnim društvom Slovenije.

Glavni cilj tekmovanja med dijaki spodbujati radovednost in zanimanje za statistiko ter jim prikazati vlogo statistike v družbi. Ob tem se vzpodbuja skupinsko delo in sodelovanje za doseganje skupnih ciljev. Na tekmovanju se preverjajo osnovno znanje statistike in veščine statistične pismenosti (pravilno razumevanje in uporaba statističnih podatkov, uporaba statističnih metod za njihovo analizo, pravilno grafično prikazovanje podatkov).

Nacionalni del tekmovanja poteka na dveh ravneh, in sicer na šolski in državni ravni, in na vsaki od njiju v dveh tekmovalnih skupinah (kategorijah), ločenih po starosti dijakov (16–18 let in 14–16 let). Na šolski ravni dijaki rešujejo spletni test. Test preverja osnovna znanje statistike, poznavanje in uporabo uradnih statističnih virov in razumevanje vsebine publikacije s statističnimi podatki. Na državni ravni tekmujejo le tiste ekipe, ki na šolski ravni presežejo določeno število točk, potrebnih za uvrstitev v nadaljevanje tekmovanja. Naloga ekip na tej ravni je izdelati raziskovalno nalogo, v kateri rezultate svojega dela pripravijo v obliki prosojnic.

Iz naše gimnazije se je v letošnjem šolskem letu šolskega tekmovanja udeležilo 90 dijakov, ki so sodelovali v eno-, dvo- ali tričlanskih ekipah. 10 ekip se je uvrstilo na državno raven, 5 ekip je doseglo srebrno priznanje, ena ekipa pa zlato priznanje.

V evropski del tekmovanja *Evropske statistične igre* se iz vsake od kategorij uvrstita po dve na državni ravni tekmovanja najuspešnejši ekipi in letos je to uspelo naši ekipi, ki je prejela zlato priznanje in sta jo sestavljali Tjaša Karas in Neja Štampar. Na mednarodni ravni tekmovanja je skupaj sodelovalo več kot 11.000 dijakov iz 16 evropskih držav. Evropskega finala se je udeležilo 61 ekip, ki so pripravile do dve minuti dolg video s temo: Informacije in dezinformacije: uradni statistični podatki v svetu, preplavljenem s podatki. In Tjaša in Neja sta s svojim videom »Don't be a fake news fool« zmagali tudi na evropskem finalu tekmovanja.

Kakšen je urnik tekmovanja?

ŠOLSKA RAVEN TEKMOVANJA: 1. – 14. 12. 2021

Objava rezultatov šolskega tekmovanja: 23. 12. 2021

DRŽAVNA RAVEN TEKMOVANJA: 12. 1. – 9. 2. 2022

Razglasitev zmagovalcev nacionalnega dela: 23. 3. 2022

Podelitvena slovesnost: predvidoma aprila 2022

EVROPSKA RAVEN TEKMOVANJA: 23. 3. – 11. 5. 2022

Razglasitev zmagovalcev evropskega dela: junij 2022

Podelitvena slovesnost: predvidoma junija 2022

Več na: https://www.stat.si/statweb/News/Index/9901

* Prva objava članka je bila v publikaciji *Raziskovalni reflektor* – Povzetki in ugotovitve raziskovalnih nalog ter poslovnih idej na Gimnaziji Franca Miklošiča Ljutomer, ki je izšla oktobra 2021 in je dosegljiva na povezavi https://gfm-media.si/?lang=&option=docs&document_section_id=16&document_id=75.

Evropa poplavljena z lažnimi informacijami

Avtorici: Tjaša Karas in Neja Štampar, 2. c
Mentorica: Irena Rauter Repija, prof.

Prvo mesto v evropskem finalu evropskih statističnih iger

Informacije, družabna omrežja, obveščanje preko spleta so stvari, s katerimi se srečujemo vsak dan in so v zadnjih letih vedno bolj priljubljene. Pridobivanje informacij na takšen način je hitro, zabavno in koristno. Vendar pa je tudi nevarno. Lažne novice. Pranje možganov. Temnejše plati informiranja smo občutili prav v času COVID-19. Kakšen je občutek, ko ne veš več, katera trditev je resnična in katerim virom je vredno zaupati? Strinjava se, da bi se vsi morali zavedati vpliva lažnih novic in prevzeti vsaj malo odgovornosti za širjenje pravih informacij.

Čemu smo mladi najbolj izpostavljeni?

Mediji nas z vseh strani bombardirajo s takšnimi in drugačnimi informacijami, vprašanje pa je: Komu verjeti? Glede na to, da 99 % mladih v Sloveniji (mladi 16–24 let, leto 2020) redno uporablja svetovni splet, 94 % mladih dnevno uporablja pametne telefone (mladi 16–24let, leta 2020) ter 95 % mladih v Sloveniji uporablja družabna omrežja (mladi 16–24let, leta 2020), kar je 9 odstotnih točk višje od povprečja EU, smo izmed vseh starostnih skupin najbolj izpostavljeni pastem družabnih omrežij.

Zaradi tega sva s prijatelji izpostavljeni večjemu tveganju, da verjamemo lažnim novicam, saj na družabnih omrežjih ni veliko medijske integritete v primerjavi s tradicionalnimi informativnimi platformami, ki jih starejše generacije pogosteje uporabljajo (novice na televiziji, v časopisih ali na radiu).

Kako naivni smo?

Po množičnem mnenju smo tudi najbolj dovzetna starostna skupina za lažne podatke. Kljub temu da sreča ni na naši strani, sva po pregledu obširne baze podatkov spoznali, da mladi nismo niti najmanj naivni.

Iz uradnih anket sva izvedeli, da je na splošno 71 % celotnega prebivalstva EU (15+ let, leto 2020) prepričanih, da prepoznajo lažne novice. Poleg tega je leta 2020 20 % več mladih Slovencev in 11 % več mladih Evropejcev (15–24 let, leto 2020) začelo iskati informacije na uradnih spletnih straneh vlade v primerjavi z letom 2019. Tudi mladi so vse bolj skeptični do medijev v primerjavi s svojimi starši. Ljudstvo meni, da so najbolj odgovorni za zaustavitev širjenja lažnih novic: novinarji (45 %), sledijo nacionalni organi (39 %), vodstvo tiska in radiodifuzije (36 %), državljani sami (32 %), spletna družbena omrežja (26 %), institucije EU (21 %) in nevladne organizacije (15 %).

DONT BE A FAKE NEWS FOOL

Meniva, da se z lažnimi novicami srečujemo na vsakem koraku. Je pa odvisno od posameznika, kako se bo na informacije odzval, komu bo verjel in kako bo to vplivalo nanj. Zato sva najin video zaključili z avtorsko pesmico, ki širi zavedanje o pomembnosti problema lažnih novic in dezinformiranja, posledic, ki jih puščajo na družbi, kako jih prepoznamo, na kaj moramo biti pozorni in kako se dokopati do resnice.

The world turns so fast, it's hard to keep track
about what's right what's wrong, what's real and what is whack,
but don't you worry love, we have your back
there are major corporations sorting out the correct facts.
That being said of course, you just can't be too cautious,
if you don't want remorse, just double check your source,
watch out for false info, exaggerated truths
and be smarter than your peers
don't be a fake news fool.

Kako preprečiti pranje možganov?

Da bi se izognili tem težavam, so različne institucije začele navajati opozorila na nepreverjeno vsebino in izobraževati uporabnike družbenih medijev o lažnih novicah, medijski pismenosti. Ključno je torej, da razvijemo kritično miselnost, preverimo vir novice, pogledamo, kdo še poroča o zgodbi, preučimo dokaze in jih med seboj primerjamo.

Za natančne statistične podatke se lahko vedno obrnemo na verodostojne vire, kot so spletne strani SURS in baza podatkov iz Eurostata.

Slovenija poplavljena s smetmi

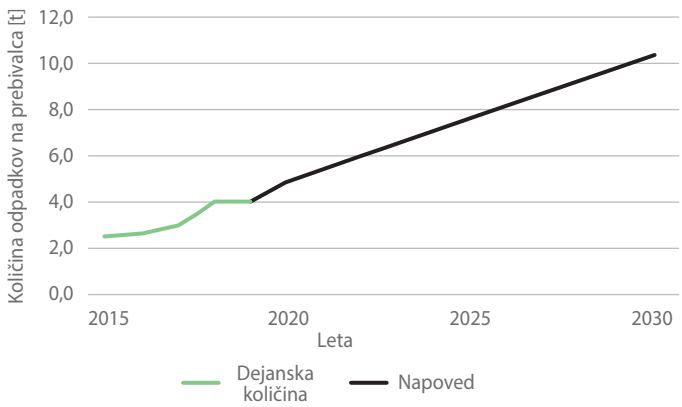
Avtorici: Tjaša Karas in Neja Štampar, 2. c
Mentorica: Irena Rauter Repija, prof.

Prvo mesto po mnenju strokovne žirije in **zlato priznanje** na državnem tekmovanju

V Sloveniji se je v letu 2019 proizvedlo **8.413.858 t odpadkov**. Na prebivalca je bilo proizvedenih **4,04 t** odpadkov, kar 3,53 t je nastalo v proizvodni in storitveni dejavnosti. V obdobju od leta 2015 do leta 2019 **se je količina odpadkov povečala za 61,3 %**.

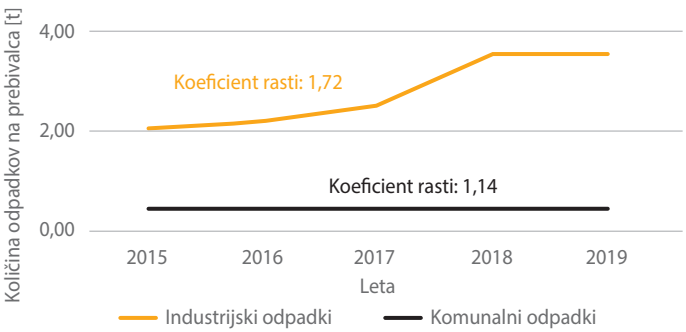
RAZISKOVANJE V PRIHODNOST

Kaj se bo zgodilo, če ne ukrepamo?



Slika 1: Količina odpadkov na prebivalca Slovenije do leta 2030.

Če se bo podoben trend nadaljeval, se bo količina odpadkov do leta 2030 **povečala za kar 154 %** v primerjavi z letom 2019.



Slika 2: Količina odpadkov v proizvodnih in storitvenih dejavnostih ter komunalnih odpadkov na prebivalca, Slovenija, 2015–2019.

Podroben pogled pokaže, da odpadki proizvodnih in storitvenih dejavnosti naraščajo veliko hitreje kot komunalni odpadki, saj so v obdobju 2015–2019 zrasli za **72 %**, medtem ko so komunalni odpadki zrasli za 14 %.

Kdo je kriv?

Osrednjeslovenska regija proizvede največji delež odpadkov (29,1 %), vendar pa na prebivalca največ odpadkov proizvede savinjska regija (6,4 t) najmanj pa pomurska regija (1,9 t).

Odpadki v proizvodnih in storitvenih dejavnostih predstavljajo **kar 87,4 % vseh odpadkov v Sloveniji.** S pomočjo Pearsonovega korelacijskega koeficienta sva pokazali, da je višji delež proizvodnih in storitvenih odpadkov pozitivno povezan z večjo količino odpadkov. To potrjuje tudi podatek, da ima največ odpadkov savinjska regija, ki ima tudi najvišji delež proizvodnih in storitvenih odpadkov (92,3 %), **najmanj pa pomurska regija**, ki ima najnižji delež proizvodnih in storitvenih odpadkov (74,0 %).

V proizvodnih in storitvenih dejavnostih nastaja kar **94,7 % vseh nevarnih odpadkov**, kar predstavlja večino vseh nevarnih odpadkov v Sloveniji. Količina nevarnih odpadkov se je v letih med 2016–2019 povečevala, najbolj se je povečala v posavski regiji (161 %), zmanjšala pa se je v obalno-kraški (62 %) regiji.

RAZISKOVALI SVA NAPREJ

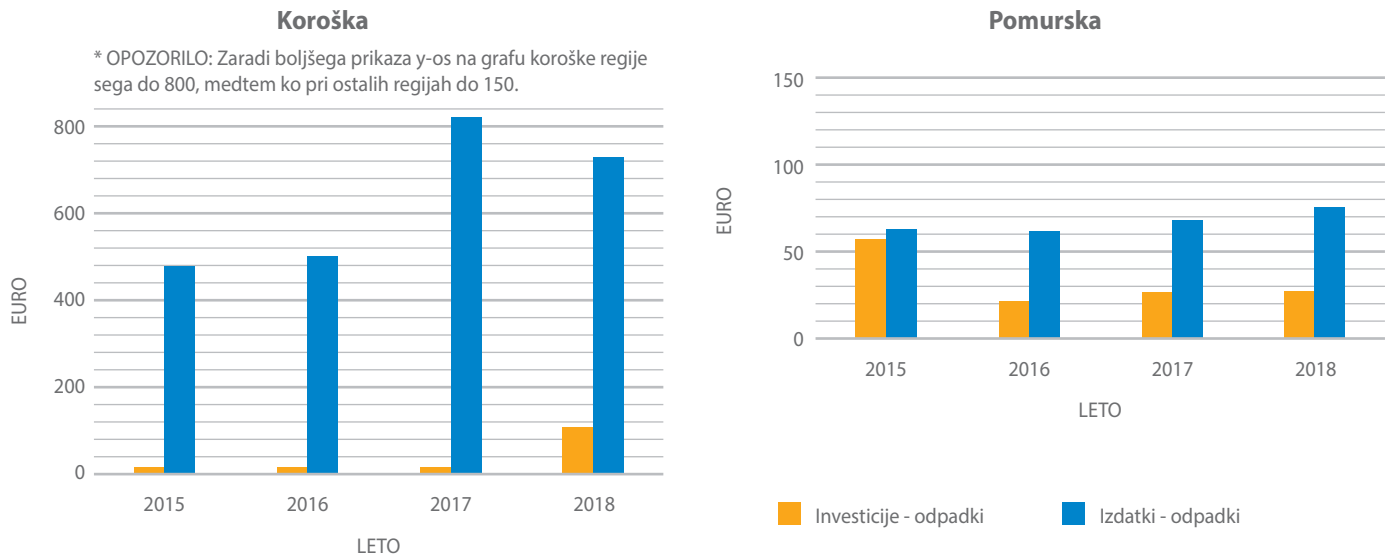
Lahko zaustavimo rast odpadkov z investicijami in izdatki?

Ugotovitve so pokazale naslednje.

Izdatki so v vseh regijah višji od investicij. Koroška regija ima najvišje izdatke za varstvo okolja, ki so znašali 730 EUR na prebivalca v letu 2019. Prav tako pa ima koroška regija največ nevarnih odpadkov iz proizvodnih in storitvenih dejavnostih na prebivalca (0,26 t) v letu 2019.

Tudi Pearsonova korelacijska koeficienta sta pokazala zelo nizko povezanost med odpadki in investicijami (0,03) oz. izdatki (-0,07) za odpadke med vsemi regijami.

Ti podatki potrjujejo, da več vlaganj v ravnanje z odpadki ne pomeni nujno tudi manj odpadkov.



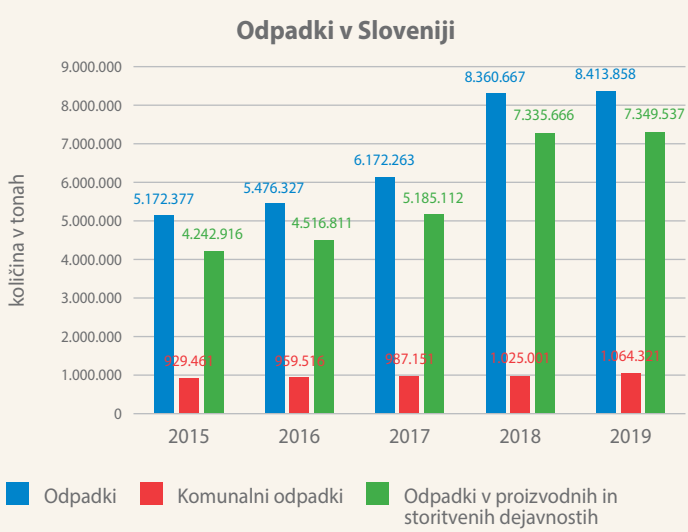
Slika 5: Sliki prikazujeta investicije ter izdatke za varstvo okolja v letih 2015–2019 za določeni regiji.

Še nekaj utrinkov ostalih raziskovalnih nalog

Na državno tekmovanje se je uvrstilo 10 raziskovalnih nalog, v katerih so se dijaki lotevali analize različnih podatkov iz danega podatkovnega niza. Dijaki so predstavili veliko zanimivih ugotovitev.

Mentorice: *Irena Rauter Repija, prof., Mateja Godec, prof., mag. Nina Žuman, prof., Natalija Horvat, prof., Štefka Štrakl, prof., Viktorija Ternar Horvat, prof.*

Ali ste vedeli, kako se spreminja količina odpadkov v Sloveniji skozi čas?



Primerjali smo količino količino komunalnih in odpadkov v proizvodnih in storitvenih dejavnostih. Rezultati kažejo, da v Sloveniji prevladujejo odpadki v proizvodnih in storitvenih dejavnostih v obdobju 2015–2019. Skupna količina odpadkov raste, predvsem odpadki v proizvodnih in storitvenih dejavnostih, rahlo pa narašča tudi količina komunalnih odpadkov. Skupna količina odpadkov je od leta 2015 do 2019 narasla za 62,7 %, komunalnih za 14,5 %, odpadkov v proizvodnih in storitvenih dejavnostih pa za 73,2 %. Takšno povečevanje količine odpadkov nas je negativno presenetilo.

Avtorji:
Filip Zver, Julija Kronvogel, David Bürmen iz 1. c – ***srebrno priznanje***

Ali ste vedeli, da je Slovenija leta 2019 v primerjavi z letom 2015 proizvedla kar 3 milijone ton odpadkov več?

Količina proizvedenih odpadkov v Sloveniji iz leta v leto narašča. Od leta 2015, ko je bilo proizvedenih približno 5 milijonov ton odpadkov, se je do leta 2019, ko je bilo proizvedenih že kar 8 in pol milijona ton odpadkov, povečala za kar 3 milijone ton, kar nanese 62,7 %.

Avtorice:
Zara Bertalanič, Petra Ouček in Lara Pučko iz 1. c

Ali ste vedeli, da sta občini Ljubljana in Murska Sobota v letu 2018 skupaj zbrali več ločeno zbranih komunalnih odpadkov od vseh ostalih občin v svojih regijah?

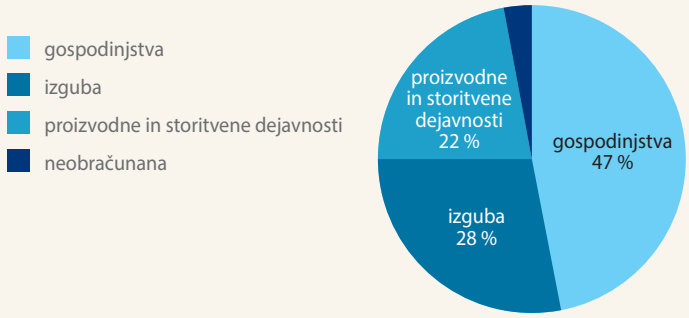
Količina ločeno zbranih komunalnih odpadkov v tonah za leto 2018, Ljubljana in Murska Sobota skupaj

Količina ločeno zbranih komunalnih odpadkov v tonah za leto 2018 vse ostale občine skupaj

Največji občini v izbranih regijah sta skupaj prispevali 129.132 ton ločeno zbranih komunalnih odpadkov, kar je za 11.029 ton več kot vse ostale občine v teh dveh regijah skupaj. Glede na to, da je občina Murska Sobota v tem letu zbrala 9.290 ton ločeno zbranih komunalnih odpadkov, lahko povemo, da je v bistvu že sama občina Ljubljana zbrala več teh odpadkov, kot vse ostale občine v obeh regijah, brez Murske Sobote.

Avtorice:
Daša Smodiš, Lana Krančič in Nika Maučec iz 2. b – ***srebrno priznanje***

Ali veste, na kakšen način se porabi največ vode v Sloveniji?



Največ vode glede na način porabe v Sloveniji se porabi v gospodinjstvih, in to kar 79.644.000, kar predstavlja 47 % vse porabljene vode v Sloveniji. Malo več kot četrtina vode se izgubi (posledica slabega vzdrževanja vodovodov), slaba tretjina se porabi v proizvodnjah in storitvenih dejavnostih, nekaj pa je ostane neobračunane (porabljana za namene gašenja in čiščenje javnih cest).

Avtorji:
Jure Ahlin, Nejc Vaupotič in Rok Hošpel iz 2. c – ***srebrno priznanje***

Ali ste vedeli, da je v povprečju največ komunalnih odpadkov, glede na pomurske občine, zbrala občina Murska Sobota, najmanj pa občina Hodoš?

Povprečna količina zbranih ločenih komunalnih odpadkov, od leta 2015 do 2019

V povprečju je največ, 8609 ton, ločenih komunalnih odpadkov zbrala občina Murska Sobota. Na drugem mestu je občina Ljutomer s 3577 tonami in na tretjem mestu je Gornja Radgona z 2723 tonami komunalnih odpadkov.

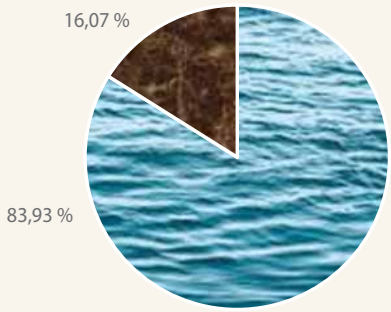
V povprečju je najmanj, 82 ton, zbrala občina Hodoš.

V Murski Soboti je stopnja rasti ločenih komunalnih odpadkov v letu 2019, glede na leto 2015, znašala 31 %, v Ljutomeru 19 %, v Gornji Radgoni 10 % in v Hodošu 35 %.

Avtorici:
Kristina Genc, Kaja Bedernjak iz 2. c

Ali ste vedeli, katera regija je prečistila več odpadne vode iz javne kanalizacije kot pomurska regija?

Količina prečiščene vode v Pomurski regiji

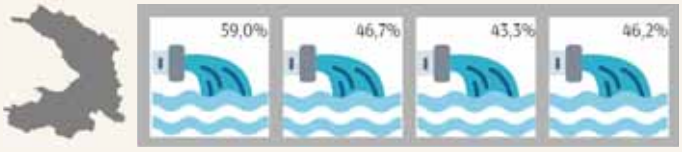


Primerjali sva količino odpadne vode iz regije, ki je največ prečisti, in količino prečiščene vode iz pomurske regije. Podravska regija prečisti kar 86,04 % odpadne vode iz javne kanalizacije, Pomurska regija pa 83,93%. Najina ugotovitev raziskovalne naloge je, da je pomurska regija po količini prečiščene vode precej blizu podravski regiji.

Avtorici:
Aja Jureš iz 2. a, Iza Šiftar iz 2. d

Ali ste vedeli, da je bilo v Obalno-Kraški regiji največ investicij namenjenih odpadnim vodam?

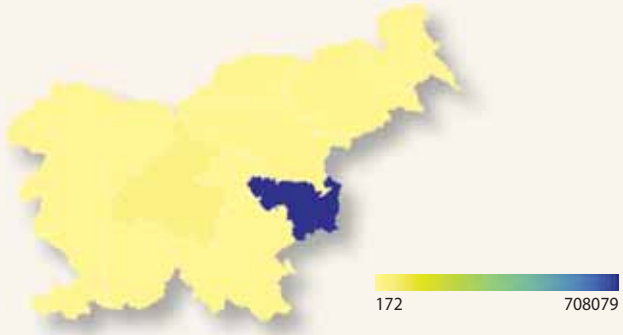
Kateri kategoriji, v povezavi z varstvom okolja, se je namenilo največ sredstev za investicije v posamezni regiji 2015–2018?



Obalno-Kraški regiji se je največ investicij v povezavi z varstvom okolja vsako leto 2015–2018 namenilo odpadnim vodam. Zaradi bližine morja je pravilno ravnanje z odpadnimi vodami še posebej pomembno.

Avtorja:
*Rene Žižek in Nela Copot iz 2. b – **srebrno priznanje***

Ali ste vedeli, da je leta 2019 največ odpadne vode v industriji pridelala Posavska regija?

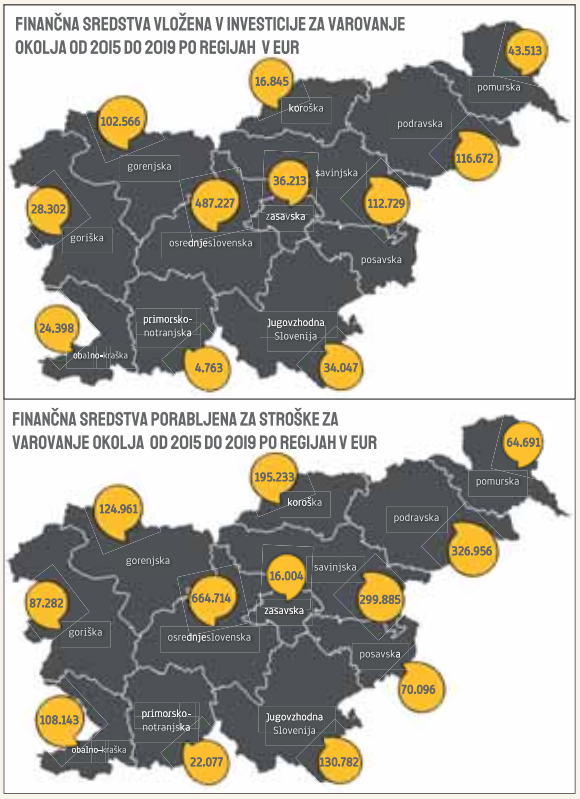


Količina odpadne vode v industriji za leto 2019 (podatki v 1000 m^3)

Za primerjavo podajava podatkovno karto Slovenije, ki predstavlja količino odpadne vode v industriji za leto 2019. Daleč največ odpadne vode je pridelala Posavska regija, in sicer kar 92,5 % odpadne vode v industriji v Sloveniji. Najverjetneje največ odpadne vode nastane zaradi Jedrske elektrarne Krško.

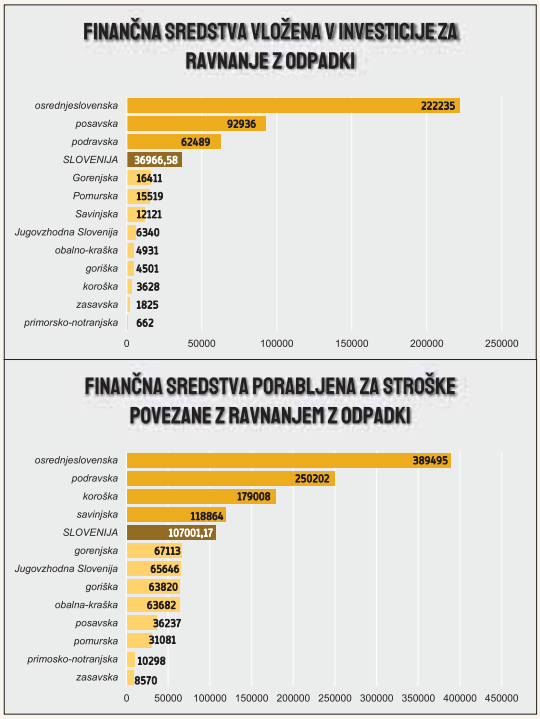
Avtorja:
Nika Magdič, Sergej Trstenjak iz 2. c

Ali ste vedeli, katera slovenska regija je investirala največ v varovanje okolja? In katera regija je porabila največ sredstev za varovanje okolja?



Število vloženih investicij in porabljenih stroškov se je v Sloveniji v obdobju od 2015 do 2018 nenehno spreminjalo. Vse regije so v omenjenem obdobju vložile ogromno finančnih sredstev za varovanje okolja, izmed vseh 12 regij pa je močno izstopala osrednjeslovenska regija, kar je pričakovano, saj je v tej regiji slovenska prestolnica, v kateri poteka največ prometa in kjer je okolje najbolj onesnaženo.

Ali ste vedeli, da je pomurska regija glede vloženih investicij in porabljenih stroškov, povezanih z varovanjem okolja, pod slovenskim povprečjem?



V Sloveniji se največ finančnih sredstev porabi v zvezi z ravnanjem z odpadki. Največ sredstev vloži osrednjeslovenska, najmanj pa primorsko-notranjska in zasavska regija. Pomurska regija, ki je v obdobju od 2015 do 2018 več investirala kot porabila stroškov, je v obeh primerih pod državnim povprečjem.

Avtorici:
Pija Vukan, Špela Jaklin iz 2. b

Matematika v šoli, št. 2., letnik 27, 2021

Primer raziskovanja: Kdo bo vlekel Božička

Katja Novak,
III. gimnazija Maribor

V prispevku je predstavljen primer raziskovanja s pripravljenim učnim listom. Sposobnejši učenci lahko dejavnost rešujejo kot primer samostojnega raziskovanja brez dodatnih namigov. Pri dejavnosti gre za uporabo naučenega matematičnega znanja v problemski situaciji, v kateri lahko kontekst tudi spremenimo.

Zastavitev problema

Naloga je zadana v zgodbi o Božičku, ki se mora odločiti, kateri jeleni naj gredo to leto z njim na pot. Cilj je, da učenci skozi aktivnost ugotovijo, da imajo samo kvadrati števil (1, 4, 9, 16, 25 …) liho število deliteljev. Aktivnost je smiselno uporabiti v času pred božičem.

Razvoj aktivnosti

Učenci samostojno ugotovijo, da lahko gredo z Božičkom tisti jeleni, pri katerih so škratje odprli vrata liho število krat.

To se zgodi samo pri vratih, na katerih je število z lihim številom deliteljev. Učenci morajo tako ugotoviti, da imajo liho število deliteljev števila, ki so kvadrati naravnih števil (1, 4, 9, 16 …).

Možne razširitve aktivnosti

Če učenci ne pridejo do ugotovitve sami, lahko učitelj razdeli učni list, na katerem je vodeno reševanje problema (priloga na koncu prispevka).

Uspešnejši učenci lahko dokažejo, da imajo liho število deliteljev števila, ki so kvadrati naravnih števil.

Zgodbo lahko tudi spremenimo. Namesto jelenov lahko zgodbo priredimo v prižiganje in ugašanje luči (prva oseba prižge vse luči, druga ugasne vse luči na 2, 4, 6 … mestu in tako naprej).

Dejavnost lahko v začetni fazi konkretno izvedemo, tako da je npr. 25 učencev v vlogi jelenov.

Načrtovanje

Za aktivnost predvidoma potrebujemo eno šolsko uro.

Kdo bo vlekel Božička?

Približuje se božična noč in Božiček mora izbrati severne jelene, ki bodo vlekli njegove sani okrog sveta. To leto se je odločil za poseben način izbora jelenov, ki bodo odšli z njim.

Vseh severnih jelenov je 100. Vsak živi v svojem hlevu in za njih skrbi 100 škratov. Božiček je prosil vsakega izmed škratov, da obišče jelene. Če bodo vrata hleva ob obisku škrata zaprta, jih bo ta odprl in obratno (zaprl odprta vrata).

Na začetku so vsa vrata hlevov zaprta.
- Prvi škrat obišče vse jelene (odpre vsa vrata).
- Drugi škrat obišče le vsakega drugega jelena (torej zapre vrata 2, 4, 6 …).
- Tretji škrat obišče tretjega, šestega, devetega, dvanajstega … jelena.
- Četrti škrat obišče vsak četrti hlev, peti vsak peti hlev in tako naprej, dokler stoti škrat ne obišče samo zadnjega hleva.

Božiček bo vzel na pot samo tiste jelene, katerih vrata bodo ostala odprta.

Ugotovi:
- Ali bo odšel na pot Rudolf, ki živi v hlevu 100?
- Kateri severni jeleni bodo odšli na pot?

Ostala vprašanja:
- Kateri jeleni bi šli na pot, če bi jih bilo 1000?
- Recimo, da so izbrani jeleni Tresko, Skočko, Hudko in Blisko. Na koliko načinov jih lahko Božiček vpne v sani?

Zapiši še sam nekaj vprašanj, ki se ti porodijo ob tej zgodbi.

1. namig

Ugotovi, kateri jeleni bi odšli na pot, če bi jih bilo namesto 100 samo 20.

2. namig

V tabeli označi, kako škratje odpirajo vrata. Če škrat odpre vrata, zapiši v tabelo O, sicer Z.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Zapiši, kateri jeleni bodo odšli na pot:

Zakaj?

3. namig

Koliko deliteljev imajo ta števila?

Dodatno vprašanje (za uspešnejše učence)

Dokaži, da imajo liho število deliteljev števila, ki so kvadrati naravnih števil.

Matematika v izobraževanju na 8. evropskem kongresu matematike

Jerneja Bone,
Zavod RS za šolstvo

Portorož bi moral v juniju 2020 gostiti 8. evropski kongres matematike. Razmere so zaradi epidemije narekovale prestavitev dogodka v leto 2021, kjer se je v hibridni izvedbi (del v živo in del na daljavo) dogodek odvijal od 20. do 26. junija 2021.

Zgodovina organizacije tega dogodka sega že v leto 2016, ko so matematiki Univerze na Primorskem v sodelovanju s predstavniki vseh slovenskih ustanov, ki se ukvarjajo z matematiko, pogumno kandidirali v Berlinu, na 7. kongresu matematike za organizacijo 8. Evropskega kongresa matematike. Kandidatura je bila uspešna.

Slika 1: Logotip Evropskega kongresa matematike

Na spletni strani FAMNIT[1] lahko preberemo, da je kongres organizirala UP FAMNIT v sodelovanju z Inštitutom Andrej Marušič Univerze na Primorskem, Fakulteto za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani, Pedagoško fakulteto Univerze v Ljubljani, Fakulteto za naravoslovje in matematiko Univerze v Mariboru, Društvom matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Inštitutom za matematiko, fiziko in mehaniko, Slovenskim društvom za diskretno in uporabno matematiko, Institutom »Jožef Stefan« ter podjetjem Abelium d. o. o.

Kaj pomeni evropski kongres matematike? Evropski kongresi matematike potekajo pod okriljem Evropskega matematičnega združenja - EMS. Za mednarodnim kongresom matematike je to drugo največje srečanje matematikov na svetu, ki se ga vsaka štiri leta udeleži preko 1000 raziskovalcev in doktorskih študentov.

Kot so zapisali organizatorji na spletni strani, gre za velik uspeh slovenske matematike, saj tako pomembnega dogodka na področju matematike Slovenija še ni gostila, dogodek pa je s častnim pokroviteljstvom podprl tudi predsednik Republike Slovenije, gospod Borut Pahor.

Novost na tem kongresu je bila uvrstitev minisimpozija z naslovom Matematika v izobraževanju v program kongresa, kar se je zgodilo prvič. Ta pomembni mejnik smo želeli obeležiti tudi v reviji Matematika v šoli, zato smo nekaterim predavateljem, ki so se s prispevki predstavili na tem minisimpoziju, zastavili vprašanja v povezavi z njihovimi prispevki. Prijazno so se odzvali povabilu.

Dr. Amalija Žakelj, vi ste bili vodja minisimpozija Matematika v izobraževanju na 8. evropskem kongresu matematike. Ta minisimpozij je bil prvič uvrščen na kongres matematikov. Zanima nas, kako je do tega prišlo.

Dr. Amalija Žakelj: Slovenija je letos gostila 8. evropski kongres matematike, ki poteka vsake štiri leta. Organizacija kongresa je bila v sodelovanju z vsemi aktivnimi matematičnimi institucijami v Sloveniji zaupana Univerzi na Primorskem (UP). Izvedba kongresa je bila prvotno načrtovana za leto 2020, vendar je bil kongres zaradi epidemije bolezni covid-19 prestavljen za eno leto. Ugledni matematiki so v plenarnih in drugih prispevkih govorili o različnih raziskovalnih področjih matematike. Na 8. evropskem kongresu matematike je bila letos prvič tudi sekcija *Matematika v izobraževanju* namenjena didaktiki matematike. Organizacijsko in programsko koordinacijo minisimpozija *Matematika v izobraževanju* je prevzela skupina didaktikov matematike iz Univerze na Primorskem, Pedagoške fakultete (UP PEF).

Kakšen je bil namen minisimpozija Matematika v izobraževanju in kakšni prispevki so bili predstavljeni?

Dr. Amalija Žakelj: Namen minisimpozija je bil združiti vodilne mednarodne raziskovalce s področja didaktike matematike in sorodnih področij ter predstaviti najnovejša znanstvena spoznanja o pristopih učenja in poučevanja matematike, od preduniverzitetnega do univerzitetnega izobraževanja. Prispevki so bili predvsem s področja didaktike matematike, nekateri predavatelji pa so predstavili tudi nekatere ožje matematične vsebine. Plenarni predavatelj minisimpozija je spregovoril o računskem/algoritmičnem mišljenju pri matematiki, sledila so predavanja o učenju matematike z raziskovanjem, o razumevanju in težavah učencev pri matematičnem dokazovanju, *o* vizualnih in drugih predstavitvah matematičnih konceptov (tudi v interaktivnih učnih okoljih), o kontekstualnem poučevanju algebre v osnovi šoli, o pristopih medpredmetnega povezovanja znanja, pa tudi o vlogi

1 https://www.famnit.upr.si/sl/mednarodno-sodelovanje/kandidature/8ecm

učbenikov v učnem procesu, Fermijev problem, uporaba pristopa CLIL pri poučevanju matematike idr. V sklopu minisimpozija pa so bili še prispevki vezani na vsebine: o teoriji grafov, posplošitvi in zgodovini izreka o metulju, kako izdelati rombični 1080-hedron, pa tudi prispevek o Peano in Hilbertovi krivulji.

Na kongresu je bil predstavljen tudi plakat o življenju in delu slovenskih matematikov Jurija Vege, Franca Močnika, Josipa Plemelja, Iva Laha in Ivana Vidava, ki so močno vplivali na razvoj matematike v Sloveniji.

Ste z odzivom zadovoljni?

Dr. Amalija Žakelj: *Z odzivom smo zelo zadovoljni. Veseli smo, ker se je tudi z odzivom predavateljev pokazalo, da* didaktika matematike pridobiva veljavo. Didaktika matematike se je kot znanstvena disciplina v Sloveniji začela razvijati dokaj pozno, okoli leta 1980, kar pomeni, da je še mlada, a vendarle hitro razvijajoča se disciplina. Ker je bila tematika matematike v izobraževanju na evropskem kongresu, ki je sicer potekal že 8., uvrščena prvič, je to še dodatna potrditev in pohvala za slovenske didaktike matematike, ki, očitno, delamo dobro.

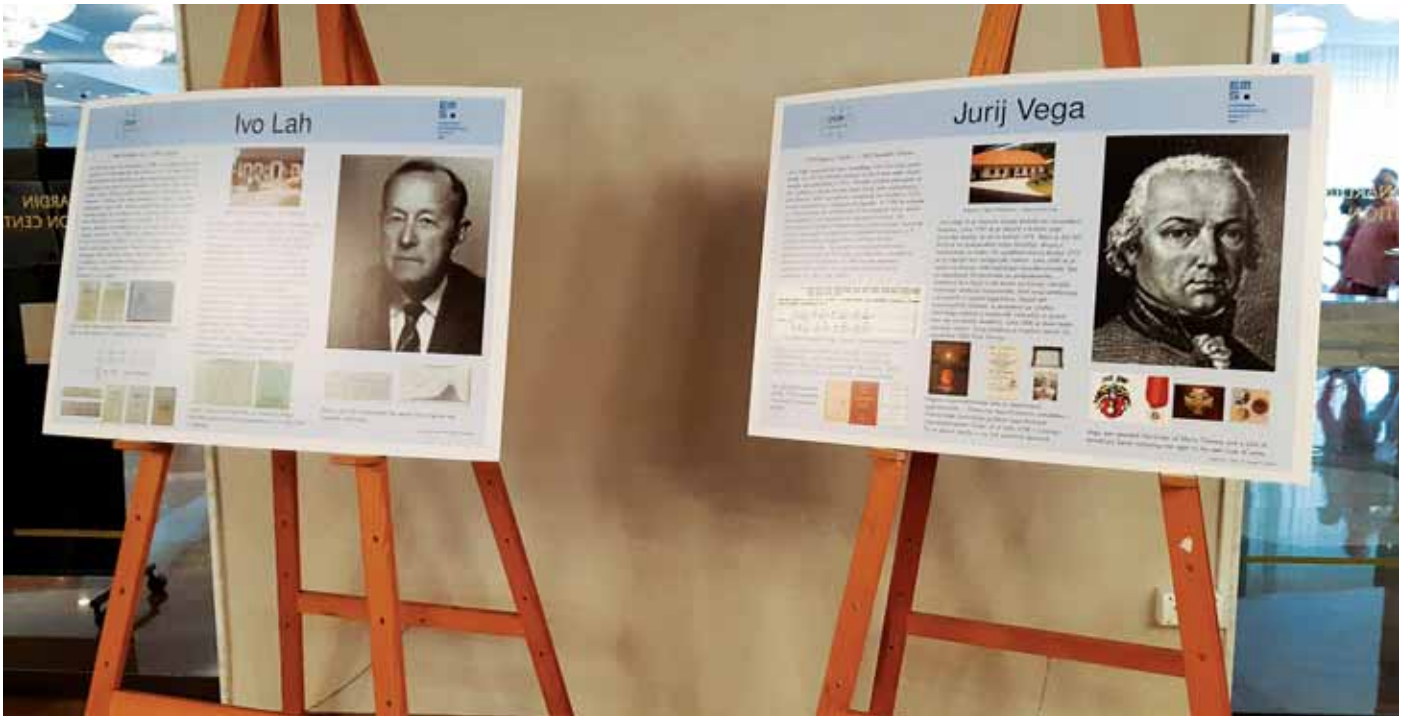
Kako področje didaktike matematike pridobiva veljavo v razmerju do ostalih področij matematike, ki so bila izpostavljena na kongresu?

Dr. Amalija Žakelj: Kot rečeno, didaktika matematike je znanstvena disciplina, ki se je v svetu intenzivneje začela razvijati šele v 20. stoletju in danes vedno bolj pridobiva veljavo. V okviru minisipozija *Matematika v izobraževanju* je bilo predstavljenih 19 prispevkov iz 6 držav. Velika večina ljudi se ne ukvarja z matematiko kot znanostjo, zato je treba pri poučevanju in učenju matematike v osnovni in tudi v srednji šoli izhajati iz vsakdanjega življenja ob uporabi konkretnega materiala oziroma didaktičnih pripomočkov, ki kažejo na uporabnost matematike in ki hkrati pomagajo pri razumevanju abstraktnih pojmov. Didaktika matematike raziskuje metodične poti do sistematično izpeljanih, urejenih in dokazljivih spoznanj na področju učenja in poučevanja matematike, pa tudi kako učence motivirati in usmerjati k samostojnemu učenju, jih navdušiti za matematiko ter jim odpreti obzorja, da se bodo matematiki lahko čudili in jo imeli radi.

Tako kot se matematika kot znanstvena disciplina stalno razvija, se vzporedno razvija tudi didaktika matematike; raziskuje in posodablja pristope učenja in poučevanja matematike po vsej vertikali, od predšolskega do univerzitetnega izobraževanja.

Naslov vašega prispevka je bil* Mathematical reasoning: which are the issues?[2] *Prihajate z Znanstvenega liceja France Prešeren v Trstu. To pomeni, da poučujete na italijanski šoli s slovenskim učnim jezikom. Poznate področje učenja in poučevanja matematike na obeh straneh meje. Kaj iz vašega prispevka je zanimivo za slovenske učitelje matematike? Imate kakšno primerjavo med slovenskim in italijanskim šolskim sistemom, ki ste jo predstavili?

Daniel Doz: V svojem prispevku sem se osredotočil na utemeljevanje v matematiki. Gre za temo, ki je v didaktiki matematike še posebej aktualna, saj je utemeljevanje del kritičnega mišljenja in, pravzaprav, matematike same. Didaktiki in učitelji matematike se strinjajo, da je utemeljevanje ključni del pouka matematike. Čeprav je utemeljevanje v ospredju v različnih znanstvenih in strokovnih debatah, imajo učenci in dijaki še vedno večje težave pri nalogah,



Slika 2: Plakati o slovenskih matematikih Plemlju, Vidavu, Vegi, Močniku in Lahu (pripravili Marko in Nada Razpet ter Izidor Hafner), ki so bili razstavljeni v okviru kongresa. (Avtor fotografije: dr. Bostjan Kuzman)

2 https://8ecm.si/system/admin/abstracts/pdfs/000/001/790/original/daniel-doz.pdf?1618208654

ki zahtevajo utemeljevanje. Na primer, dijaki srednjih šol imajo težave z dokazovanjem s protiprimerom, kjer veljavnost neke trditve zavrnemo s predstavitvijo enega samega primera, za katerega trditev ne velja. Poleg tega predstavlja formalno dokazovanje še dodatno težavo. Problem, kako dobro slovenski učenci rešujejo naloge na nacionalnem preizkusu matematičnega znanja, so raziskali Bone, Cotič in Felda, ki ugotavljajo, da je treba dodatno razvijati sposobnost pravilnega utemeljevanja. Podobne zaključke sem dobil tudi v svoji raziskavi, kjer sem ugotavljal, kako dobro rešujejo naloge z utemeljevanjem dijaki šol s slovenskim učnim jezikom. 17 dijakov drugega razreda neke višje srednje šole (tj. gimnazije) je reševalo dva problema italijanskega preizkusa znanja INVALSI, ki sta zahtevala učenčevo utemeljevanje. Ker so nekateri problemi na italijanskem INVALSI zaprtega tipa, so učitelji matematike dodatno spraševali svoje dijake, naj utemeljijo pravilnost svojega odgovora. Izkazalo se je, da imajo dijaki nezanemarljive težave z utemeljevanjem in večinoma ne znajo dokazovati s protislovjem. Naloga je spraševala, ali je trditev »$2^n + 1$ *je praštevilo*« pravilna za vsako naravno število n. Utemeljevanje je bilo neprimerno (npr. dijaki so samo našteli primer, ko trditev ne velja, vendar svojega odgovora niso utemeljili) ali so dijaki celo utemeljevali, zakaj je (napačna) trditev pravilna (npr. pokazali, da za $n = 2$ trditev velja). Po drugi strani, v nalogah zaprtega tipa, se je izkazalo, da so mnogi dijaki, ki so sicer pravilno odgovorili na zastavljeno vprašanje, svoj odgovor napačno utemeljili. V zaključku prispevka sem izpostavil težavo preverjanja učenčevega razumevanja nalog utemeljevanja zgolj z zaprtimi vprašanji, saj je bila večina pravilnih odgovorov posledica napačnega razmišljanja in nepravilnega utemeljevanja. Poleg tega sem na podlagi dobljenih rezultatov še zaključil, da je potrebno dodatno povečati količino nalog, ki zahtevajo utemeljevanje, med rednim poukom matematike.

Vajin prispevek je imel naslov Students' achievements in solving geometric problems using visual representations in a virtual learning environment[3], kjer ste se usmerili v geometrijske probleme z uporabo vizualnih reprezentacij v virtualnem učnem okolju. Lahko povesta kaj več?

Dr. Amalija Žakelj in dr. Andreja Klančar: V prispevku smo predstavili rezultate študije, katere namen je bil raziskati učenje geometrije v virtualnem učnem okolju (bogatem z različnim učnimi gradivi in aktivnostmi, ki z manipulacijo interaktivnih virtualnih predstavitev pospešuje vizualizacijo in raziskovanje geometrijskih konceptov, s programi dinamične geometrije, apleti idr.) ter vlogo vizualnih reprezentacij.

Raziskava je pokazala, da virtualno učno okolje, podprto z omenjenimi gradniki, pozitivno prispeva k dosežkom učencev pri prepoznavanju odnosov med geometrijskimi elementi, vizualizaciji geometrijskih konceptov, reševanju geometrijskih nalog.

Rezultati kažejo tudi, da je vizualizacija koncepta ali problema za učence zahtevnejša od postopkovnega dela naloge same. Kvalitativna analiza rezultatov opozarja na nevralgične točke v znanju učencev predvsem v tistih segmentih vizualizacije, v katerih (1) se pričakuje prepoznava odnosov med geometrijskimi objekti na sliki in posledično prepoznava podatkov na sliki ter (2) samostojno kreiranje slike.

Rezultati tako kažejo na potrebo po uvajanju pristopov učenja in poučevanja, ki v večji meri spodbujajo razvoj vizualizacije pri učencih, pri čemer ima pomembno vlogo primerna izbira in uporaba sodobnih tehnologij.

Vendar pa je za izvajanje dejavnosti, ki spodbujajo razvoj vizualizacije, treba najprej opolnomočiti učitelje, da bodo lahko nudili podporo in pripravili tovrstne dejavnosti ter jim zagotoviti dostop in uporabo digitalnih tehnologij.

Kaj bi želeli deliti s slovenskimi učitelji matematike?

Dr. Amalija Žakelj: Učitelj matematike mora poleg matematičnega znanja imeti tudi pedagoška in psihološka znanja, ki so potrebna za delo z učenci in dijaki. Pri začetnih učenčevih korakih v svet matematike je še posebej pomembna nepretrgana povezava s poukom drugih disciplin. Potreba in vrednost poučevanja in učenja matematike ni namreč samo v usvajanju njenih vsebin in metod, ampak je bistveni razlog za poučevanje in učenje matematike njena pomembnost pri razvoju celovite osebnosti učenca, ob tem pa je seveda matematika koristno orodje v življenju vsakega človeka, tako odraslega kot tudi otroka ali mladostnika.

Danes je tehnološki napredek izredno hiter, razvoj informacijsko komunikacijske tehnologije vedno bolj vpliva na spremembe izobraževalnih praks in posledično na spremembe v razvoju didaktik. Če so bile v preteklosti izobraževalne ustanove eden glavnih »virov znanja«, danes ni več tako, saj so informacije dostopne posamezniku tako rekoč na vsakem koraku. Namen poučevanja matematike je usmerjati učence, da bodo matematiko odkrivali, osmišljali, gradili in ob tem razvijali kritično in ustvarjalno mišljenje, tudi do uporabe sodobnih tehnologij.

Dr. Andreja Klančar: Digitalizacija družbe tudi od učiteljev zahteva fleksibilnost, nenehno izobraževanje, sledenje razvoju digitalnih tehnologij ter možnostim njihove uporabe, hkrati pa tudi poznavanje značilnosti novih generacij učencev, da bodo lahko učinkovito prilagajali in/ali razvijali učinkovite pristope učenja in poučevanja.

Kaj je tisto, kar bi izpostavili še posebej glede poučevanja na daljavo, kjer je virtualno učno okolje še posebej pridobilo pomen?

Dr. Andreja Klančar: V začetni fazi poučevanja na daljavo je bila poleg organizacije dela v virtualnem učnem okolju ključnega pomena vzpostavitev stika z učenci, nato spodbujanje in spremljava njihovega napredka. Poleg pridobivanja (matematičnega) znanja je bilo pri učencih v ospredju razvijanje digitalnih kompetenc, veščin samoregulacije učenja ter sodelovanja. Pri poučevanju na daljavo je pomembno, da se učitelj ne vrača k tradicionalnim oblikam poučevanja, temveč s pomočjo različnih digitalnih orodij in vsebin učenje organizira tako, da spodbuja aktivno vlogo učenca v procesu pridobivanja znanja in razvijanja veščin. Učitelj ni več posredovalec znanja, temveč ima osrednjo vlogo pri organizaciji učnega procesa (pri pripravi navodil, učnih gradiv in oblikovanju okvirne učne poti itd.) ter spremljanju in evalvaciji dela učencev. Prav tako poučevanje na daljavo od učitelja zahteva nenehno strokovno izpopolnjevanje tako na področju uporabe digitalnih orodij ter priprave/(pre)oblikovanja in uporabe gradiv kot tudi preizkušanja in razvijanja pristopov poučevanja.

3 https://8ecm.si/system/admin/abstracts/pdfs/000/001/003/original/amalija-zakelj.pdf?1626244274

Naslov vašega prispevka je bil* How sixth graders' represent some mathematics concepts with drawings[4]. *Raziskovali ste, kako učenci predstavljajo matematične koncepte z risbami. Kaj bi svetovali slovenskim učiteljem matematike? Kaj je pomembno in kaj naj pri svojem poučevanju upoštevajo?

Dr. Alenka Lipovec: Matematika je znana kot simbolni jezik. Kljub temu je eden izmed precej uporabljenih načinov poučevanja tudi vključevanje grafičnih elementov kot npr. slik, risb, skic, diagramov, grafov ... Geometrijske pojme je skorajda nemogoče usvojiti ne da bi se nam hkrati porodila grafična podoba. Samo pomislite na krog. Pomislite na algebrski opis, na sliko kroga ali na oboje? Tudi »dokazi brez besed« vizualizirajo utemeljitve, ki bi bile morda sicer učencem težje razumljive. Ena izmed bolj znanih vizualizacij te vrste je vsota zaporednih lihih števil, ki se lepo »zložijo« v kvadrat. Vizualne reprezentacije so torej pogoste pri pouku. Učitelji jih posebej učinkovito uporabljajo kot sredstvo za razvoj pojmov pri mlajših učencih, kjer je slikovna raven toliko bolj pomembna zaradi razvojne stopnje.

Vendar večkrat riše predvsem učitelj, učenci pa njegove predstavitve le ponavljajo z manjšimi prilagoditvami. Vključevanje risb, ki jih izdelajo učenci, je pri našem pouku matematike še premalo prisotno. V prvem triletju si učenci pogosto pomagajo z risbo do razumevanja besedilnih nalogah, kasneje žal to vedno bolj zamira. Vemo, da je risanje za učence ugodna aktivnost, saj je neodvisna od (včasih zelo) natančnega matematičnega jezika. Vemo tudi, da je risanje v azijskih šolskih sistemih mnogo bolj pogosto kot v evropskih in da na risanju večkrat temelji reševanje problemov.

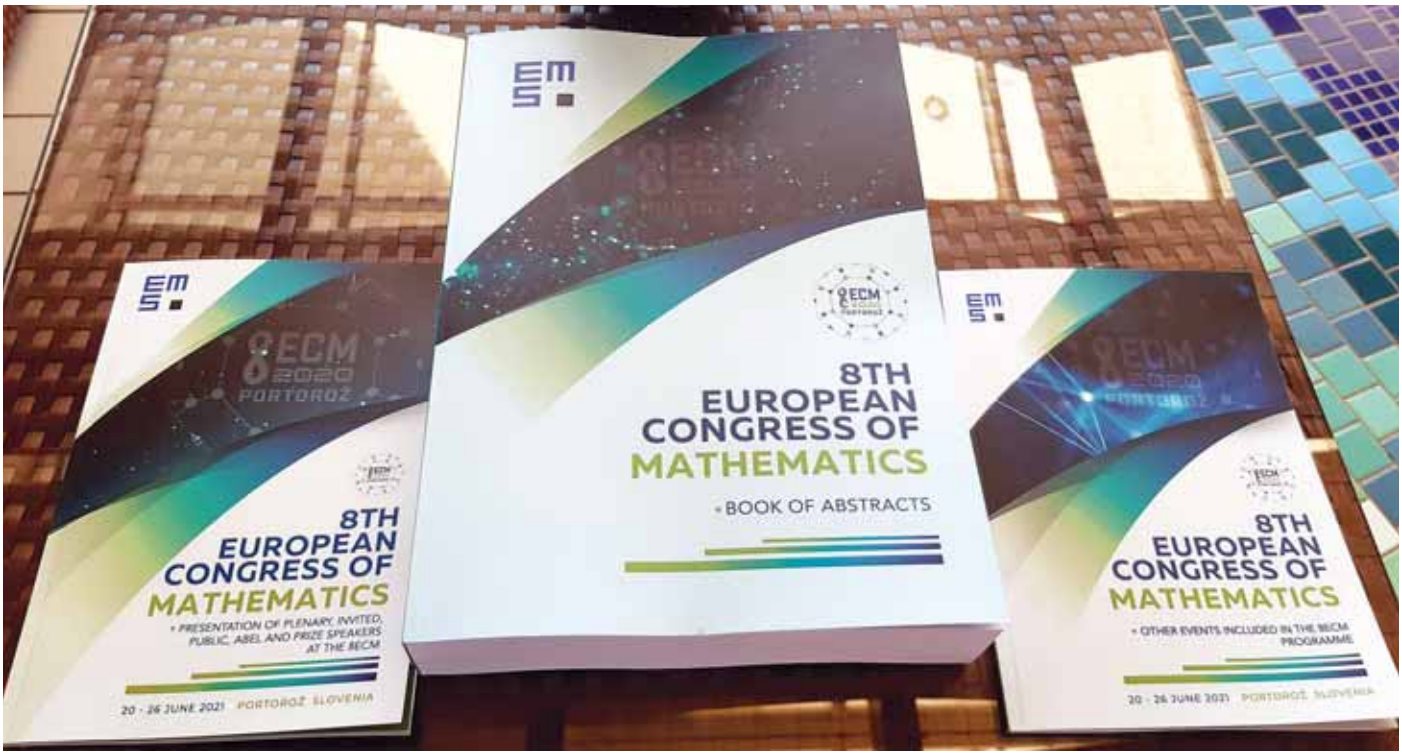
Učenčeva risba je lahko tudi izvrstno diagnostično sredstvo za učitelja. Če bomo učenca prosili, naj nariše risbo, ki opisuje 2^3 in nam bo narisal dve skupinici s po tremi bonboni, bomo lahko konceptualno intervenirali in skupaj z učencem ugotavljali, da je risba dveh plaščev, kjer ima vsak plašč dva gumba s po dvema luknjama, boljši opis zahtevanega izraza. Če ga bomo prosili, da nam nariše trikotnik in premico, ki trikotnik seka v natanko dveh točkah, bomo lahko ugotavljali, ali je učenec že usvojil, da ima trikotnik »notranjost«. Dodatno se bomo lahko pogovarjali o nalogah, ki nimajo rešitve.

Pri matematiki je torej pozornost potrebno usmeriti tako v vizualne reprezentacije, ki jih učitelji predstavljamo učencem, kot v vizualne reprezentacije, ki jih učenci razvijejo sami. Učitelji lahko s tem pridobijo vpogled v matematično razumevanje učencev in pouk na ta način nadgradijo z drugimi potmi razvijanja matematičnega razumevanja.

Rišimo (tudi) pri matematiki! (In to ne samo v prvem triletju).

Povezovanje znanj po vertikali oz. horizontali prispevka k trajnosti usvojenega znanja. V prispevku Cross-Curricular Integration of Knowledge in Mathematics at the Primary School Level[5] ste se usmerili na medpredmetno povezovanje matematike v osnovni šoli. Kaj bi glede tega svetovali slovenskim učiteljem matematike?

Dr. Marina Volk: Znanje zunaj učilnice je povezano in nenaravno je, da je ločeno glede na discipline. Matematiko povezujemo z drugimi šolskimi predmeti ter jo apliciramo v realne situacije, saj mora učenec zaznati, da je matematika pomemben del šol-



Slika 3: Zbornik povzetkov konference (Avtor fotografije: dr. Boštjan Kuzman).

4 https://8ecm.si/system/admin/abstracts/pdfs/000/001/097/original/alenka-lipovec.pdf?1626111751

skih predmetov, s katerimi tvorijo koherentno celoto in da se ne učimo matematike zavoljo nje same, temveč ker nam omogoča razumevanje sveta okrog nas. Razkrivanje povezav matematike z ostalimi disciplinami omogoča boljše razumevanje matematike in sveta, ki deluje po matematičnih načelih. Z vključitvijo učencev v raziskovanje vsenavzočnosti matematike se poleg dosežkov izboljša tudi njihov odnos do matematike. Matematika postane enostavnejša, ko učenci razumejo, kje bodo lahko pridobljeno znanje uporabili. Uporabnost matematike poveča možnost, da se informacije shranijo v trajni spomin in da bodo matematični procesi uporabljeni pri reševanju življenjskih situacijah. Kljub temu, da so medpredmetne povezave nakazane v dokumentih izobraževalne politike, se v realnosti redko načrtno izvajajo. Povezava matematike z ostalimi predmeti se zgodi tudi, če je ne zaznamo. Zgodovinsko gledano se je večina matematičnih vsebin razvila zaradi reševanja praktičnih problemov naravoslovja, ekonomije, družboslovja itd. Ker se znanost in matematika še naprej širita, lahko pričakujemo, da se bodo vzpostavile še močnejše vezi z drugimi disciplinarnimi področji. Vendar je za učence pomembno, da povezave prepoznajo in jih uzavestijo. S tem jih učimo, kako uporabiti matematično znanje in spretnosti na drugih predmetnih področjih. Učni proces medpredmetnega povezovanja je usmerjen v aktivno vlogo učenca, omogoča mu doseganje taksonomsko višjih učnih ciljev (razumevanje, sklepanje, analiziranje in utemeljevanje) in spodbuja multidisciplinarni pristop k reševanju problemov.

Že veliko smo slišali o CLIL pristopu. Vaš prispevek se je osredotočal prav CLIL pristop v povezavi z matematiko[6]. Kaj zanimivega bi izpostavili?

Dr. Silva Bratož: Poučevanju angleščine po pristopu CLIL predpostavlja rabo tujega jezika za učenje in poučevanje nejezikovnega predmeta, v tem primeru matematike. Pri načrtovanju pouka po pristopu CLIL upoštevamo vsebino, komunikacijo, kognicijo in kulturo. Te štiri komponente predstavljajo učne cilje in so med seboj povezane ter se dopolnjujejo. Pri tem bi izpostavila, da je za učitelja še posebej pomembno, da je pozoren na jezik. Razmisliti mora, kateri matematični izrazi so za učenca novi, katere besede že pozna ter katero besedišče, fraze in slovnične strukture v tujem jeziku bo učenec potreboval za sporazumevanje oz. za reševanje posamezne naloge. Coyle idr. (2010) govorijo o treh različnih vrstah jezika, in sicer o jeziku učenja, jeziku za učenje in jeziku skozi učenje. Jezik učenja se nanaša na jezik, ki ga učenec potrebuje za razumevanje in dostop do vsebine učne ure, pri jeziku za učenje gre za jezik, ki ga učenec potrebuje za reševanje naloge v razredu, sporazumevanje z vrstniki ipd., jezik skozi učenje pa je tisti, ki se med sporazumevanjem pojavi spontano med učno uro in ga učitelj običajno ne predvidi. Za uspešno učno uro matematike po pristopu CLIL mora tako učitelj pri načrtovanju ure posebej skrbno načrtovati tudi omenjene vidike tujega jezika.

Naslov vašega prispevka je bil* Software generation of images using mathematics[7]. *Kaj iz vašega prispevka bi želeli izpostaviti in je uporabno za slovenske učitelje matematike?

Bogdan Soban: Osnovni namen mojega prispevka je bil predstaviti, kako se lahko preprosto matematiko vključuje v proces nastajanja likovnih del. To dosegam z razvojem svojih lastnih programov, v katere vgrajujem matematične izraze in formule, ki se skozi algoritme izrazijo v obliki barvnih podob. Za slovenske učitelje matematike bi izpostavil predvsem to, da je včasih zelo abstraktna matematika tudi praktično uporabna, ne samo na tehničnih področjih ampak tudi na področjih humanistike. To naj bi pri učencih večalo zanimanje zanjo, saj se prevečkrat slišijo komentarji »kaj mi bo pa to koristilo«. Pogosto pojmovanje matematike zaradi matematike naj bi se z zanimivimi primeri iz življenja preseglo in odprlo drugačen pogled na matematiko. To pomeni, da matematika ni samo »računanje«, ampak je, včasih tudi nevidno, vgrajena v vse naše življenje in delovanje in nenazadnje tudi na področja ustvarjanja.

Moje raziskave nazorno in s konkretnimi primeri kažejo, kako se matematika vključuje v likovno ustvarjanje in dokazujejo znano trditev o večni povezanosti med matematiko in umetnostjo. Lepota matematike, ki odseva iz generiranih slik, lahko pri učencih spremeni odnos do nje – kraljice vseh znanosti.

Zaključek

S krajšimi zapisi o vsebini prispevkov, ki so jih imeli naši sogovorniki, smo vam želeli približati vsebino minisimpozija Matematika v izobraževanju. Prav gotovo vas bodo nekatere ideje in misli naših sogovornikov nagovorile in vam dale ideje za vaše nadaljnje delo.

5 https://8ecm.si/system/admin/abstracts/pdfs/000/001/849/original/marina-volk.pdf?1619204936
6 https://8ecm.si/system/admin/abstracts/pdfs/000/001/847/original/silva-bratoz.pdf?1622221980
7 https://8ecm.si/system/admin/abstracts/pdfs/000/002/546/original/bogdan-soban.pdf?1626201205

Raziskovalne naloge iz matematike na Srečanju mladih raziskovalcev Slovenije 2021

Dr. Borut Jurčič Zlobec
Fakulteta za elektrotehniko Univerze v Ljubljani

Državno Srečanje mladih raziskovalcev Slovenije organizira Zveza za tehnično kulturo Slovenije. Namen srečanja je čim zgodnejše uvajanje mladih v znanost, popularizacija znanosti in tehnike, odkrivanje nadarjenih učencev in dijakov na posameznih področjih in njihovo spodbujanje k poglabljanju znanja in raziskovalne dejavnosti.

Na državno srečanje prispejo naloge, ki so bile izbrane na regijskih srečanjih. Vse prispele naloge z regijskih srečanj dobijo na državnem izboru eno od priznanj.

V letu 2021 je potekalo že 55. državno srečanje v Murski Soboti. Zaradi posebnih razmer je bila udeležba nekoliko skromnejša pa vendar se moramo mentorjem zahvaliti, da jim je kljub temu uspelo opraviti svoje delo.

Organizator je dobil v pregled 10 osnovnošolskih in 5 srednješolskih nalog. Med osnovnošolskimi nalogami smo izbrali 4 za bronasto priznanje. Med srednješolskimi je vsaka dobila ali zlato ali srebrno priznanje.

Ostale naloge so bile predstavljene pred državno komisijo. Komisijo so sestavljali izr. prof. dr. Dominik Benkovič, izr. prof. dr. Marko Jakovac, doc. dr. Mateja Grašič in asist. Simon Brezovnik.

Komisija je izbrala 2 osnovnošolski in 2 srednješolski nalogi za zlato priznanje, ostale pa so dobile srebrno priznanje.

Objavo rezultatov je narekoval predvsem namen, da izpostavimo delo učencev in mentorjev, in pričakujemo, da bodo drugi sledili njihovem zgledu.

Z zlatim priznanjem so mladi raziskovalci dobili pohvalo za svoje dosežke. Na tem mestu pa jim želimo sporočiti, kaj bi lahko popravili, izboljšali, da bi bili še bolj uspešni.

Pojdimo k nalogam. Teme nalog, ki so bile predstavljene pred državno komisijo, so bile geometrijske (5 nalog), aritmetične (3 naloge), šahovske (2 nalogi), anketne (2 nalogi) ter po ena algebrska, zgodovinska in matematično-fizikalna.

Tudi letos smo dobili kar tri naloge z anketnimi vsebinami. O neprimernosti teh nalog smo že govorili in mislili smo, da bodo mentorji vendarle začeli upoštevati, da anketne naloge ne sodijo v to področje, pa je prišlo novo razočaranje. **Povejmo še enkrat, zakaj se nam zdijo te naloge neprimerne.** Anketne naloge so privlačne, ker ustrezajo napotkom organizatorjev, da je treba v raziskovalni nalogi narediti nekaj izvirnega, kar pa v matematiki ni tako lahko. Zato stalno poudarjamo, da tovrstna inovativnost za matematične naloge ni primerna. Tudi kakovost teh nalog je vprašljiva. Vprašljive so tudi statistične metode, ki jih uporabljajo. Zato mentorjem priporočam, da se takih tem izogibajo. Pri matematičnih raziskovalnih nalogah je pomembno, da se učenci naučijo nekaj novega iz matematike in da znajo to lepo predstaviti. Če pa jim uspe kakšen izviren problem opisati matematično in ga tako rešiti, so dosegli največ, kar se od njih pričakuje.

Tudi navodila za izdelavo raziskovalne naloge so neustrezna. Zakaj mora vsaka naloga imeti razdelek s hipotezami? Večinoma delujejo neustrezno in privlečeno za lase. Kot na primer:

(1) Moja prva hipoteza je, da je desetiški sestav najboljši in najbolj priročen za vsakdanjo uporabo, vendar so nekateri sestavi boljši za zapisovanje posameznih skupin števil.

(2) Moja druga hipoteza je, da bodo anketiranci dosegli vsaj 20 % točk.

(3) Obstaja točno določeno število rešitev.

(4) Večja kot je mreža, več je možnih rešitev.

Večinoma gre za hipoteze, ki niso hipoteze, ampak dobro poznana dejstva. Vidi se, da so hipoteze napisane le zato, da se ustreže navodilom. Zakaj se v navodila ne zapiše tudi, da anketne naloge niso primerne? Tako bi prikrajšali marsikatero razočaranje.

Pri ocenjevanju nalog je komisija poleg samih nalog ocenjevala tudi njihovo predstavitev.

Raziskovalne naloge, nagrajene z zlatim priznanjem za leto 2021

Zlato priznanje so dobile štiri raziskovalne naloge, dve osnovnošolski in dve srednješolski:

Geometrijske rožice

Avtorja: Tadej Cajzek in Naja Tošović
Mentorica: Alenka Repnik
Šola: Osnovna šola borcev za severno mejo Maribor

Tlakovanje v ravnini

Avtorica: Hana Perman
Mentorica: Diana Kvartuh
Šola: Osnovna šola Škofljica

Problem *n* kraljic

Avtor: Jaka Slapar
Mentorica: Nataša Šuligoj
Šola: Gimnazija Vič

Oblika in parametri verižnice

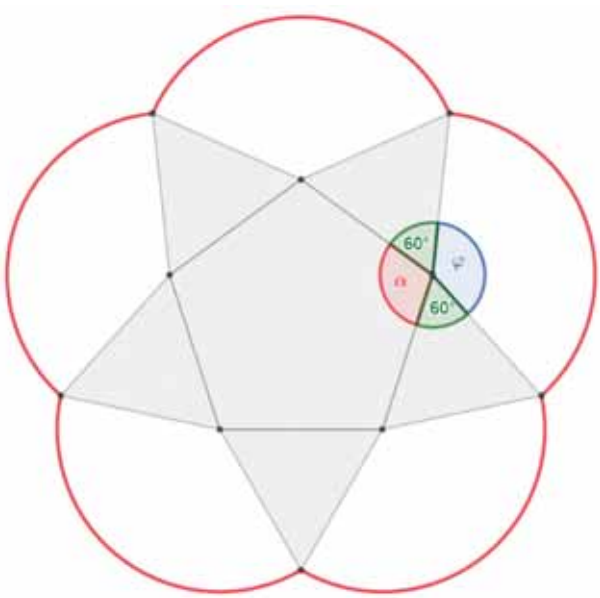
Avtor: Simon Bukovšek
Mentorica: Barbara Kušar
Šola: Gimnazija Kranj

Opis nagrajenih nalog

1. naloga z naslovom Geometrijske rožice

Predstavimo jo z nekoliko skrajšanim povzetkom k nalogi.

Za raziskovanje smo izbrali like, ki jih omejujejo krožni loki. Pri tem smo se osredotočili na like, ki nastanejo pod točno določenimi pogoji, in sicer smo raziskovali like, ki jih dobimo, če se enakostranični trikotnik s stranico a zavrti (zakotali, op. recenzenta) okrog pravilnega večkotnika, katerega stranica je prav tako dolžine a, in pri tem s prostimi oglišči »riše« tako imenovane cvetne liste. Ugotavljali smo, kakšen je obseg tako nastalega lika in kako se obseg spreminja, glede na pravilni večkotnik, okrog katerega se zavrti enakostranični trikotnik.



Slika 1: Primer rožice s petimi lističi. (Vir avtorja)

Izračuni v nalogi se na koncu skrčijo na tri formule. Prva je formula za notranji kot pravilnega n-kotnika. Pravilni n-kotnik je sestavljen iz n skladnih trikotnikov z vrhi v njegovem središču. Vsota notranjih kotov trikotnika je 180°. Notranji kot α n-kotnika je potemtakem enak:

$$\alpha = (n \cdot 180° - 360°)/n.$$

Od vsote notranjih kotov trikotnikov $n \cdot 180°$ odštejemo 360°, kolikor je vsota kotov ob vrhih trikotnikov v središču večkotnika. Rezultat je $n \cdot \alpha$. Kot ϕ je enak:

$$\phi = 360° - \alpha - 2 \cdot 60° = 60° \cdot (n + 6)/n.$$

In nazadnje še obseg rožice:

$$o = n \cdot a\, \phi\, \pi/180°.$$

Pri tem je $\phi_{rad} = \phi\, \pi/180$ kot ϕ izražen v radianih in $l = a\, \phi_{rad}$ je dolžina loka lističa.

2. naloga z naslovom Tlakovanje v ravnini

Nalogo bomo predstavili z njenim povzetkom.

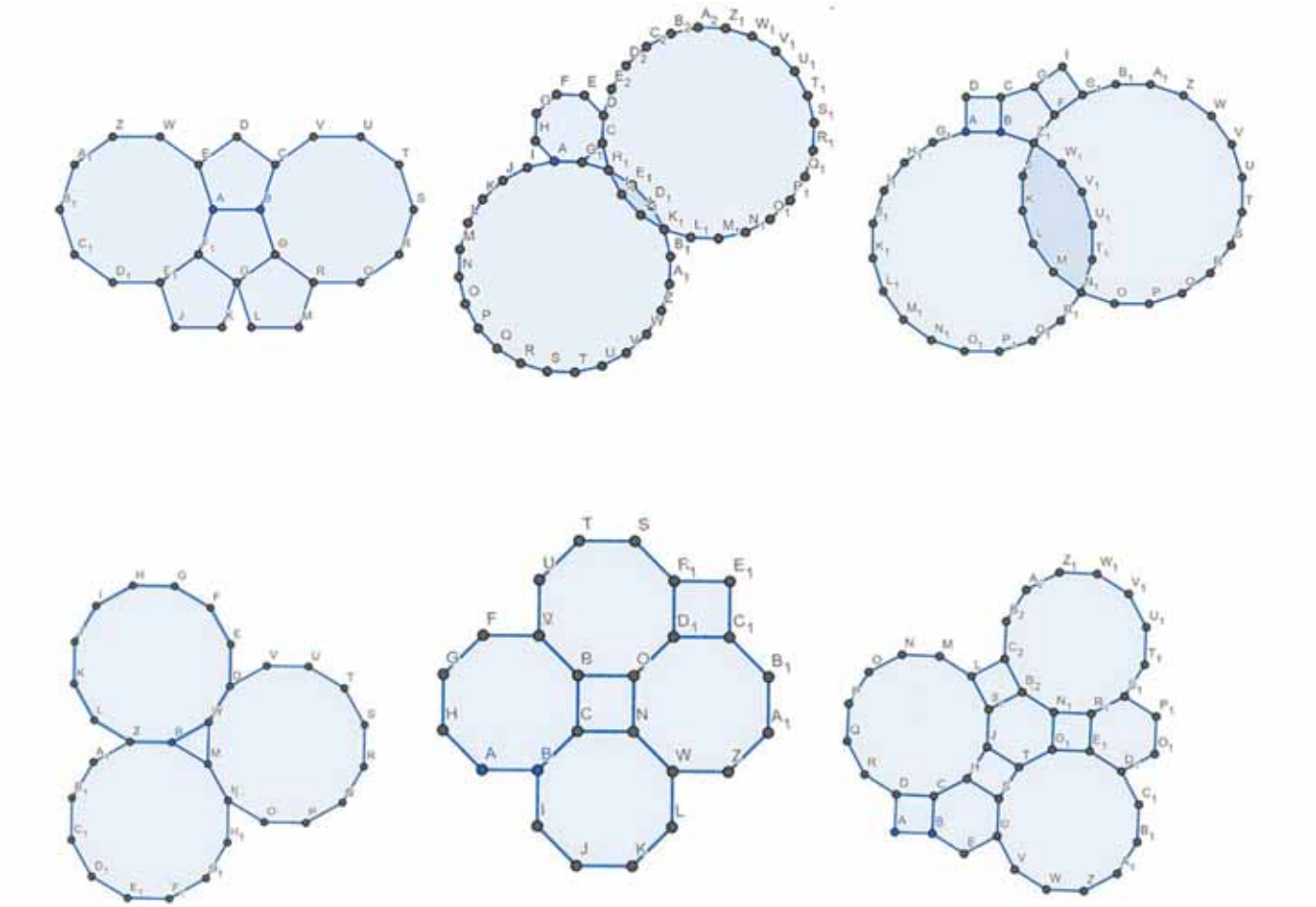
Znano je, da sta matematika in umetnost od nekdaj povezani. Ob tem se odpira bogata paleta vsebin, med katerimi me je najbolj pritegnilo tlakovanje ravnine. Ker je tlakovanj s poljubnimi mnogokotniki nešteto, sem se v raziskovalni nalogi omejila na tlakovanja s pravilnimi mnogokotniki od roba do roba. Za odkrivanje kombinacij mnogokotnikov, s katerimi bi lahko tlakovala, sem napisala programe v programskem jeziku Pascal.

Vse kombinacije, ki jih vrne program, sem preverila z risanjem v programu Geogebra. Izkaže se, da nekatere kombinacije mnogokotnikov ne morem položiti v ravnino, ne da bi prišlo do prekrivanja ali vrzeli. Ugotovila sem tudi, da lahko nekatere ugodne kombinacije mnogokotnikov postavimo v ravnino na različne načine, spet druge pa imajo enolično postavitev. Tovrstna enolična tlakovanja se imenujejo Arhimedova tlakovanja. Sprašujem se, kako lahko Arhimedova tlakovanja z rotacijo, vzporednim premikom ali zrcaljenjem in njihovimi kombinacijami preslikam sama nase. Ugotovim, da imajo tovrstne preslikave matematično strukturo grupe.

Naloga govori o tlakovanjih ravnine s pravilnimi večkotniki od roba do roba. Taka tlakovanja imenujemo evklidska. Avtorica se je zanimala predvsem za Arhimedova tlakovanja, zanje velja, da se v vsakem vozlišču srečajo enaki pravilni večkotniki.

Avtorica je prečesala vse mogoče kombinacije večkotnikov Arhimedovih tlakovanj. Pri tem je napisala program v jeziku Pascal in si pomagala z orodjem Geogebra. Omenila je monoedrska tlakovanja. Za monoedrska tlakovanja velja, da vsebujejo eno samo vrsto pravilnih večkotnikov. Na koncu je pregledala grupe transformacij tlakovanj.

Veliko preveč dela, da bi ga opisali natančneje na tem mestu. Morda prezahtevna naloga za osnovno šolo.



Slika 2: Primer neuspešnih in uspešnih tlakovanj.

3. naloga z naslovom Problem *n* kraljic

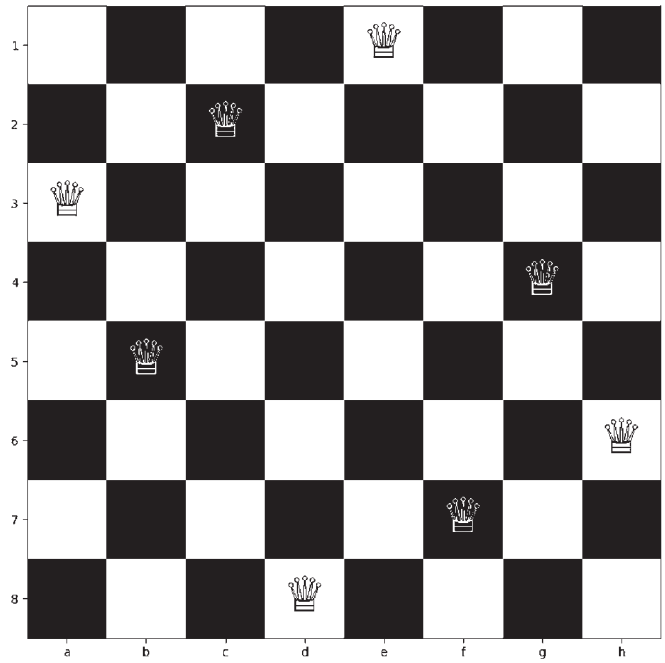
V povzetku naloge je zapisano:

V raziskovalni nalogi sem preučeval problem neodvisnosti kraljic ali problem n kraljic. Zanima nas, na koliko različnih načinov lahko na dano šahovnico postavimo največje možno število kraljic, tako da se med seboj ne napadajo. Izkaže se, da je problem pri večjih šahovnicah matematično dokaj zahteven, saj trenutno poznamo zgolj grobe ocene za število rešitev. Zaenkrat je edini način reševanja groba računalniška moč.

Problem obravnavam na standardnih in na modularnih šahovnicah, pregledal sem tudi nekaj primerov šahovnic *nenavadnih oblik. Na koncu sem napisal še računalniški program, ki nam za šahovnice oblike n × n izpiše število rešitev.*

Poglejmo si od blizu, čemu mora ustrezati rešitev problema *n* kraljic.

Prvi pogoj: da se kraljice na šahovski deski ne napadajo, je, da se v eni vrstici in enem stolpcu na šahovski deski nahaja natanko ena kraljica. Tako lahko postavitev *n* kraljic na šahovsko desko dimenzije $n \times n$ zapišemo kot permutacijo števil od 1 do n, $\Pi(1 \ldots n)$.



Slika 3: Razporeditev kraljic, ki ustreza permutaciji $\Pi(x) = \{3, 5, 2, 8, 1, 7, 4, 6\}$.

Na primer pri postavitvi kraljic na običajni šahovnici 8×8, kjer je $x = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ in permutacija

$\Pi(x) = \{3, 5, 2, 8, 1, 7, 4, 6\}$, se kraljice nahajajo na poljih

$\{(1, 3), (2, 5), (3, 2), (4, 8), (5, 1), (6, 7), (7, 4), (8, 6)\}$

oziroma v standardnem zapisu

$\{(a, 3), (b, 5), (c, 2), (d, 8), (e, 1), (f, 7), (g, 4), (h, 6)\}$.

Drugi pogoj: kraljice se ne smejo napadati po diagonalah, zato izločimo iz permutacij $\Pi(x)$ vse primere, kjer bi se kraljice napadale po diagonalah. Za permutacijo, ki predstavlja položaj kraljic, ki se ne napadajo po diagonalah, velja, da imata seznama $\Pi(x) - x$ in $\Pi(x) + x$ same različne elemente, kjer pomeni +/– seštevanje/odštevanje po komponentah. Naslednji program, zapisan v jeziku Mathematica, izpiše seznam permutacij 92 različnih rešitev problema. Koda je napisana tako, da je čim bolj razumljiva in je zato bolj potratna s prostorom.

```
n = 8;
Ident = Table[i, {i, n}]; (* Tabela 1 ... n *)
Perm = Permutations[Ident]; (* Permutacije 1 ... n *)
plus = Map[# + Ident &, Perm]; (* Priprava podatkov za detekcijo *)
minus = Map[# - Ident &, Perm]; (* diagonalnih napadov *)
dPlus = Map[Length[DeleteDuplicates[#]] < n &, plus]; (* Detekcija *)
dMinus = Map[Length[DeleteDuplicates[#]] < n &, minus]; (* diagonalnih napadov *)
du = MapThread[#1 || #2 &, {dPlus, dMinus}]; (* Združimo oba primera *)
pos = Position[du, True]; (* Položaji permutacij z diagonalnimi napadi *)
Kraljice = Delete[Perm, pos] (* Izločimo permutacije z diagonalnimi napadi *)
```

4. Naloga z naslovom Oblika in parametri verižnice

Poglejmo najprej skrajšan povzetek k nalogi.

Verižnica je krivulja, ki jo oblikuje viseča vrv, pritrjena na obeh koncih. Funkcija, katere graf je verižnica, je hiperbolični kosinus:

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$

Pri dokazu upoštevamo ravnovesje sil. Ko vrv miruje, mora biti vsota sil na vsak del vrvi enaka nič. Hiperbolični kosinus ima podobno kot kvadratna funkcija tri parametre, ki lahko opišejo vsako neizrojeno obliko viseče vrvi. Parametri so koordinati temena in faktor raztega. V nalogi bomo poiskali te tri parametre za obliko vrvi, če poznamo njeno dolžino in koordinati koncev vrvi, v katerih je le-ta vpeta. Na koncu nas reševanje problema pripelje do transcendentne enačbe za faktor raztega, ki jo rešimo numerično.

$$\sinh(t) = k\,t, \text{ označimo } \psi(t) = \frac{\sinh(t)}{t},$$

enačba se glasi $\psi(t) - k = 0$.

V nalogi je avtor razvil v Taylorjevo vrsto inverzno funkcijo funkcije $\psi(t)$, $\psi^{-1}(t)$.

Glede na že uporabljeno težko artilerijo višje matematike, bi si avtor lahko poenostavil delo in si privoščil Newtonovo iteracijo, ki bi mu poiskala rešitev za vse regularne primere brez izjeme, tudi za velike k:

$$p(t) = \psi(t) - k \quad \text{iteracija} \quad t_0\text{: začetni približek;}$$

$$t_{n+1} = t_n - \frac{p(t_n)}{p'(t_n)}.$$

Izpeljava enačbe za faktor raztega.

Splošna oblika verižnice:

$$f(x) = \lambda + a\cosh\left(\frac{x}{a} + c\right)$$

Izrazimo parametre s koordinatami temena (to je točka, kjer zavzame funkcija najmanjšo vrednost) (x_0, y_0).

$$f(x) = y_0 - a + a\cosh\left(\frac{x - x_0}{a}\right).$$

Kako poiščemo parametre x_0, y_0 in a, če poznamo koordinate vpetišč in dolžino vrvi l? Naj bodo koordinate (x_1, y_1) koordinate levega vpetišča in (x_2, y_2) koordinate desnega vpetišča. Parametre poiščemo kot rešitve sistema enačb

$$y_i = y_0 - a\cosh\left(\frac{x_i - x_0}{a}\right), \quad i = 1, 2 \quad \text{in}$$

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$$

Na koncu izločimo enačbo za parameter a:

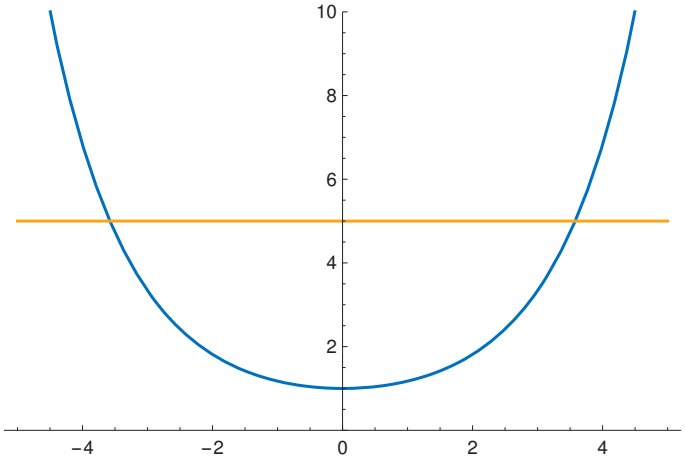
$$k = \frac{1}{t}\sinh(t), \text{kjer je}$$

$$k = \frac{\sqrt{l^2 - (y_2 - y_1)^2}}{x_2 - x_1} \quad \text{in} \quad t = \frac{x_2 - x_1}{2a}$$

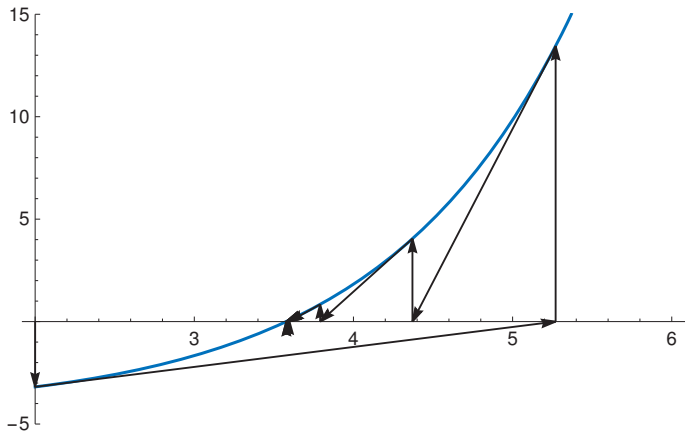
Primer Newtonove iteracije. Rešujemo enačbo $\psi(t) - 5 = 0$. Izberemo začetni približek $t_0 = 2$ in sprožimo Newtonovo iteracijo. Zaporedni približki so:

$$\{2, 5.27035, 4.37069, 3.79087, 3.5959, 3.57836\}$$

Po 5. iteraciji je rezultat natančen na 5 decimalnih mest



Slika 4: Graf funkcije $\psi(t)$.



Slika 5: Prikaz Newtonove iteracije za rešitev enačbe $\psi(t) - 5 = 0$, s $t_0 = 2$.

Iz digitalne bralnice ZRSŠ

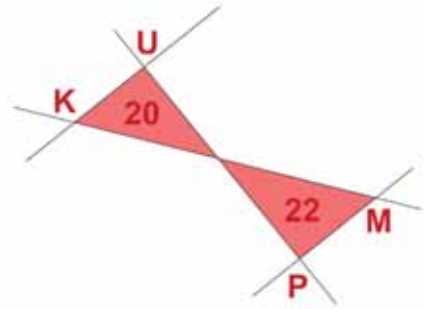
www.zrss.si/digitalna-bralnica

V digitalni bralnici lahko prelistate najrazličnejše strokovne publikacije: monografije in priročnike, ter druge publikacije, ki so izšle na Zavodu RS za šolstvo in so vam BREZPLAČNO dosegljive tudi v PDF obliki.

Priporočamo:

- Ugotavljanje matematičnega znanja
- Smernice za uporabo digitalne tehnologije pri predmetu matematika
- Posodobitve pouka v gimnazijski praksi MATEMATIKA in CD
- Posodobitve pouka v osnovnošolski praksi MATEMATIKA in CD
- O naravi učenja
- Razvijanje in vrednotenje znanja
- Ugotavljanje kompleksnih dosežkov
- Izobraževalni lističi Scientix NA-MA
- Razsežnost učnega jezika pri vseh predmetih
- Učne težave pri matematiki in slovenščini – izziv za učitelje in učence

Najava
5. mednarodne Konference o učenju in poučevanju matematike



Vljudno vas vabimo na **5. konferenco o učenju in poučevanju matematike (KUPM 2022)**, ki bo **2. 2. 2022** v živo ali na daljavo (v primeru, da epidemiološke razmere ne bodo dopuščale izvedbe v živo).

5. konferenca o učenju in poučevanju matematike KUPM 2022 nadaljuje svojo povezovalno vlogo ter združuje vse učitelje, ki poučujejo matematiko od 1. razreda osnovne šole do zaključnega letnika srednje šole (učitelje razrednega pouka, učitelje matematike v osnovnih in srednjih šolah) ter strokovnjake na področju matematičnega izobraževanja.

Osrednje konferenčne teme bodo:

- **Pouk matematike na daljavo**
- **Preiskovanje pri pouku matematike**
- **Vrednotenje matematičnega znanja**
- **Razvoj pismenosti pri matematiki**
- **Digitalna tehnologija v podporo pouku matematike**

Konferenca bo potekala v obliki plenarnih predavanj, predstavitev, delavnic z vabljenimi predavatelji.

Program konference bo objavljen na **spletni strani konference**. Izbrani celotni prispevki bodo objavljeni v reviji Matematika v šoli in ostalih revijah, ki izhajajo na ZRSŠ.

Pomembni datumi:

- Rok za prijavo na konferenco: do **16. 1. 2022** oziroma do zapolnitve mest.
  Na konferenco se prijavite preko aplikacije Katis.
- Rok za odjavo: 28. 1. 2022.

Veselimo se strokovnega srečanja z vami.

Programski odbor KUPM 2022

Mathematics in school

2 2021 Volume 27

CONTENTS

Mateja Sirnik
How Long Is a Metre and a Half?

FROM THE THEORY FOR PRACTICE

Andreja Drobnič Vidic
Problems with Data Processing and Statistical Investigation 2

Mojca Suban
Assessment on the Written Examination in Mathematics at the Vocational Matura 13

Sonja Rajh
Difference of Squares 18

Mateja Sirnik
Obtaining Quartiles and Box Plots by Folding Paper 27

FROM THE CLASSROOM

Ana Radovčič
Situations on the Oral Examination at the Vocational Matura 29

Miha Šušteršič
Geocaching and Mathematics in School 36

Dragica Vračun
Technical Activity Day – Opportunity for Cross-Curricular Integration, Creation and Consolidation of Learning Content in a Different Way 42

Irena Rauter Repija and Mateja Godec; Tjaša Karas and Neja Štampar
European Statistics Competition 45

Katja Novak
Who Will Pull Santa's Sleigh? 52

NEWS

Jerneja Bone
Mathematics in Education at the 8th European Congress of Mathematics 54

Borut Jurčič Zlobec
Research Papers in Mathematics at Srečanje mladih raziskovalcev Slovenije 2021 (Meeting of Early-Stage Researchers of Slovenia 2021) 59

Announcement of the 5th International Conference on Learning and Teaching Mathematics KUPM 2022 64

IZ ZALOŽBE ZAVODA RS ZA ŠOLSTVO

Formativno spremljanje pri MATEMATIKI

tiskani priročnik

V tiskanem priročniku so opisana različna orodja v podporo učenju in poučevanju matematike skupaj z naborom učnih ur, v katerih orodja zaživijo v vsej svoji funkcionalni vrednosti.
V ospredje je postavljen učenec in njegova vloga pri oblikovanju lastne učne poti.

152 strani, A4 format

cena: 11,90 €

digitalni priročnik

Ugotavljanje matematičnega znanja

V digitalni publikaciji predstavljamo nadaljnje izsledke in izkušnje na področju formativnega spremljanja pri matematiki s poudarkom na različnih oblikah izkazovanja in ugotavljanja matematičnega znanja.
Predstavljene so naslednje oblike ugotavljanja znanja, ki so hkrati dokazi o učenju:

- preiskovalne naloge,
- pisna besedila,
- govorni nastopi,
- vizualne predstavitve,
- didaktične igre,
- izdelki.

Publikacija je dosegljiva na:
www.zrss.si/pdf/ugotavljanje_matematicnega_znanja.pdf

Zavod Republike Slovenije za šolstvo

Naročanje:
- po pošti (Zavod RS za šolstvo, Poljanska c. 28, 1000 Ljubljana)
- po faksu (01/3005-199)
- po elektronski pošti (zalozba@zrss.si)
- na spletni strani (http://www.zrss.si)

ISSN 1318-010X
9 771318 010005