Pozabljena umetnost sferne trigonometrije[1]

Aleksander Simonič

Znate določiti smer in izračunati dolžino najkrajše zračne poti do poljubnega kraja na Zemlji? Bi se znali orientirati po zvezdah? Če ne, je ta prispevek kot nalašč za vas.

Uvodne probleme lahko rešimo z uporabo sferne trigonometrije, vede, ki se ukvarja s trigonometrijskimi relacijami med stranicami in koti v sfernem trikotniku. To matematično področje je staro in se je razvijalo vzporedno z ravninsko trigonometrijo. Za začetnika trigonometrije štejemo grškega astronoma **Hiparha iz Nicae** (ok. 150 pr. n. št.). Njegovo delo se je ohranilo v Ptolemajevem *Almagestu*, knjigi s podobnim statusom kakor Evklidovi Elementi. Arabski matematiki so v »zlati dobi islama« (750–1257) grško znanje ohranili, nadgradili in povezali z dognanji indijskih astronomov. V nadaljevanju bomo videli, da so osnovne izreke odkrili prav arabski matematiki.

Iz vsega povedanega lahko razberemo, da je bil povod za uvedbo sferne trigonometrije prav geografske in astronomske narave. S tem se bomo ukvarjali v razdelku Uporaba sferne trigonometrije, kjer bomo tudi razrešili uvodna vprašanja. Za to potrebujemo nekaj matematične teorije. Žal ne bomo sledili zgodovinskemu razvoju. Kogar bi to zanimalo, mu priporočamo odlično knjigo [5], od koder smo si izposodili tudi naslov tega članka. Avtor knjige ugotavlja, da je »skoraj čez noč« iz učnih programov srednjih šol izginila sferna trigonometrija. Zato je namen tega članka privabiti nadobudne dijake, da poleg obvezne ravninske trigonometrije spoznajo tudi nekaj osnov sferne.

[1] Članek je namenjen predvsem srednješolcem, ki tekmujejo iz znanja astronomije in se potegujejo za udeležbo na mednarodnih astronomskih tekmovanjih, kjer je namreč zahtevano osnovno znanje sferne trigonometrije.

Kaj je sferni trikotnik?

Vzemimo pojubni točki A in B na sferi s središčem v O. Točke A, B in O določajo natanko eno ravnino, če le niso kolinearne. Presečišče te ravnine s sfero je krožnica, ki jo imenujemo **glavni krog.** Z $\widehat{AB}$ označujemo krajši krožni lok med A in B na glavnem krogu. Razdalje merimo v radianih, zato velja $0 < \widehat{AB} < \pi$. **Sferni trikotnik** $\triangle ABC$ je območje na sferi, omejeno s **stranicami** $c := \widehat{AB}$, $a := \widehat{BC}$ in $b := \widehat{AC}$. **Koti** $\alpha := \sphericalangle BAC$, $\beta := \sphericalangle CBA$ in $\gamma := \sphericalangle ACB$ so koti med ravninami, ki oklepajo te kote. Tako je α kot med ravninama OAB in OAC. Zahteva po dolžinah stranic nam da pogoj na velikost kotov, saj se ne more zgoditi, da bi kot sfernega trikotnika presegel π. V nasprotnem primeru bi imel trikotnik $\triangle ABC$ z $\alpha \geq \pi$ stranico $\widehat{BC} \geq \pi$.

Ta članek ni namenjen proučevanju geometrijskih lastnosti sfernih trikotnikov, kot sta znani dejstvi, da je vsota stranic manjša od 2π in da je vsota kotov med π in 3π. Kljub temu pa ne moremo preko naslednje pomembne konstrukcije, ki vsakemu sfernemu trikotniku priredi nov sferni trikotnik. Bralcu priporočamo, da si v nadaljevanju pomaga s programom *GeoGebra*.

Naj bo $\triangle ABC$ sferni trikotnik. S C' označimo tisti presek normale na ravnino ABO in sfere, ki leži na isti hemisferi kakor točka C. Podobno storimo še za preostali stranici in dobimo točki A' in B'. Sfernemu trikotniku $\triangle A'B'C'$ pravimo **polarni trikotnik** od $\triangle ABC$. Konstrukcijo polarnega trikotnika je predlagal arabski matematik **Abu Nasr Mansur ibn Ali ibn Irak** (ok. 950–ok. 1036). Neposredno iz poteka konstrukcije je razvidno, da je polarni trikotnik od polarnega trikotnika spet prvotni trikotnik. Taki lastnosti pravimo dualnost. Najpomembnejša lastnost polarnih trikotnikov pa je zajeta v naslednjem izreku, imenovanem tudi **princip dualnosti.**

Izrek 1. Naj bo $\triangle ABC$ sferni trikotnik in $\triangle A'B'C'$ pripadajoči polarni trikotnik. Potem velja $a' = \pi - \alpha$, $b' = \pi - \beta$ in $c' = \pi - \gamma$ ter $\alpha' = \pi - a$, $\beta' = \pi - b$ in $\gamma' = \pi - c$.

Po principu dualnosti je razvidno, da je prvi nabor enakosti v izreku ekvivalenten drugemu naboru enakosti. Zato zadošča dokazati prvi nabor enakosti. Naj bo D presečišče glavnega kroga AC in glavnega kroga $A'B'$. Podobno naj bo E presečišče glavnega kroga BC in glavnega kroga $A'B'$. Po definiciji polarnega trikotnika imamo $\widehat{DC} = \widehat{EC} = \pi/2$, od koder sledi $\widehat{DE} = \gamma$. Prav tako je $\widehat{DB'} = \widehat{A'E} = \pi/2$. Imamo

$$c' = \widehat{A'B'} = \widehat{A'E} + \widehat{DB'} - \widehat{DE} = \pi - \gamma.$$

Podobno dobimo še preostali enakosti.

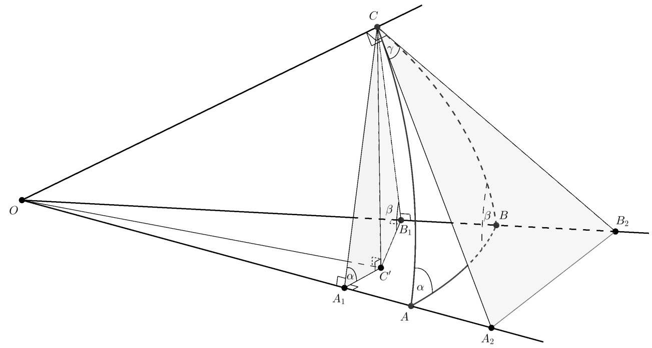
Če privzamemo, da poznamo neenakost $a+b+c < 2\pi$, lahko z uporabo principa dualnosti pokažemo, da mora biti vsota kotov večja od 180°. Za polarni trikotnik prav tako velja $a' + b' + c' < 2\pi$. Po izreku 1 imamo $3\pi - (\alpha + \beta + \gamma) < 2\pi$, od koder sledi $\pi < \alpha + \beta + \gamma$.

Temeljna izreka sferne trigonometrije

Najpomembnejša izreka trigonometrije ravninskega trikotnika sta zagotovo sinusni in kosinusni izrek. Prvi opisuje razmerja med stranicami in koti v trikotniku, drugi pa predstavlja posplošitev Pitagorovega izreka. Zato bi bilo dobro, če bi podobna izreka imeli tudi za sferne trikotnike. Za razliko od ravninske različice bomo v sfernem primeru imeli trigonometrijske funkcije tudi pri stranicah, zato pride izrek 1 do izraza v naslednjem smislu: *če dokažemo trigonometrijsko identiteto in v njej zamenjamo stranice s suplementi kotov in kote s suplementi stranic, dobimo prav tako veljavno trigonometrijsko identiteto.* Tudi temu pravilu pravimo princip dualnosti.

Najprej se bomo omejili na trikotnike, katerih dva kota sta manjša od $\pi/2$. Bralca naprošamo, da si pri naslednjem besedilu pomaga s sliko 1. Naj bo $\triangle ABC$ tak trikotnik, O pa središče sfere. Označimo s C' pravokotno projekcijo točke C na ravnino ABO, z A_1 pravokotno projekcijo točke C' na premico OA in z B_1 pravokotno projekcijo točke C' na premico OB. Ker je

$$\begin{aligned} |OA_1|^2 + |A_1C|^2 &= |OA_1|^2 + |A_1C'|^2 + |C'C|^2 \\ &= |OC'|^2 + |C'C|^2 = |OC|^2, \end{aligned}$$



SLIKA 1.
Izpeljava sinusnega in kosinusnega izreka v sfernem trikotniku ABC

sledi, da je premica OA pravokotna na premico A_1C. Podoben razmislek nam da pravokotnost premic OB in CB_1. Torej sta trikotnika $\triangle A_1CO$ in $\triangle B_1OC$ pravokotna, zato imamo $|CA_1| = \sin b$ in $|CB_1| = \sin a$. Pravokotni trikotnik $\triangle C'CA_1$ nam zagotavlja $|CC'| = |CA_1| \sin\alpha = \sin b \sin\alpha$. Po drugi strani pa imamo $|CC'| = |CB_1| \sin\beta = \sin a \sin\beta$. Obe zvezi nam podajata razmerje $\sin a/\sin\alpha = \sin b/\sin\beta$. Začeli smo s projekcijo točke C in dobili razmerje med stranicami a, b in koti α, β. Če bi začeli s projekcijo točke A, bi dobili podobno razmerje le med stranicami b, c in koti β, γ. Rezultatu

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}. \tag{1}$$

pravimo **sinusni izrek**, zaradi očitne podobnosti z istoimenskim izrekom iz ravninske trigonometrije. Najverjetneje sta bila ibn Irak in **Mohamed al-Buzjani al-Hasib Abul Vefa** (940–997) prva, ki sta sinusni izrek eksplicitno zapisala. Na žalost nam princip dualnosti na sinusnem izreku ne razkrije nič novega.

Naj bo A_2 taka točka na premici OA in B_2 taka točka na premici OB, da bosta trikotnika $\triangle COA_2$ in $\triangle COB_2$ pravokotna. Zato imamo

$$|OA_2|^{-1} = \cos b, \quad |OB_2|^{-1} = \cos a, \tag{2}$$

$$\frac{|CA_2|}{|OA_2|} = \sin b, \quad \frac{|CB_2|}{|OB_2|} = \sin a, \tag{3}$$

$$|OA_2|^2 = 1 + |CA_2|^2, \quad |OB_2|^2 = 1 + |CB_2|^2. \tag{4}$$

Za trikotnik $\triangle A_2B_2C$ uporabimo kosinusni izrek.

Dobimo

$$|A_2B_2|^2 = |CA_2|^2 + |CB_2|^2 - 2|CA_2||CB_2|\cos\gamma.$$

Po drugi strani pa nam kosinusni izrek za trikotnik $\triangle A_2B_2O$ in zvezi (4) podajata

$$\begin{aligned}|A_2B_2|^2 &= |OA_2|^2 + |OB_2|^2 - 2|OA_2||OB_2|\cos c\\ &= |CA_2|^2 + |CB_2|^2 + 2\left(1 - |OA_2||OB_2|\cos c\right).\end{aligned}$$

Torej velja $|OA_2||OB_2|\cos c = 1 + |CA_2||CB_2|\cos\gamma$. Enačbo delimo z $|OA_2||OB_2|$ in uporabimo zveze (2) in (3). Dobimo **kosinusni izrek za stranico** c

$$\cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos\gamma. \qquad (5)$$

Z ustrezno zamenjavo stranic in kotov dobimo še kosinusna izreka za a in b. Uporabimo princip dualnosti na (5) in dobimo **kosinusni izrek za kot** γ

$$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c.$$

Podobna izraza dobimo še za kota α in β. Kosinusni izrek za kote nam razkrije nekaj, kar za ravninske trikotnike ni res: *sferni trikotnik je natanko določen s svojimi koti.* Začetki kosinusnega izreka so bolj nejasni kakor pri sinusnem izreku. Največkrat se omenjajo tri imena: **Mohamed ibn Musa al-Hvarizmi** (ok. 780–ok. 850), **Abu'Abdalah Mohamed ibn Džabir ibn Sinan al-Batani al-Harani al-Sabi'** (ok. 858–929) in indijski astronom **Somayaji Nilakantha** (1444–ok. 1501). Pri nobenem od njih pa izrek ni zapisan eksplicitno, vedno pomešan med astronomskimi izračuni.

Dokaz

Spomnimo se, da smo pri izpeljavi sinusnega in kosinusnega izreka dodali nekaj pogojev na kote v trikotniku. Z obravnavanjem vseh možnosti bi lahko po prikazani poti dokazali izreka v vsej splošnosti. Z uporabo sfernih koordinat in skalarnega produkta vektorjev pa lahko dokaz občutno poenostavimo.

Najprej bomo pokazali, da iz (5) sledi (1). Enostavno se lahko prepričamo, da za vse $x, y, z \in \mathbb{R}$ velja

$$\begin{aligned}\sin^2 x\sin^2 y - \cos^2 x\cos^2 y - \cos^2 z &= \\ &= 1 - \cos^2 x - \cos^2 y - \cos^2 z.\end{aligned}$$

Ker je izraz na desni simetričen v spremenljivkah, za vse $x, y, z \in \mathbb{R}$ velja

$$\begin{aligned}\sin^2 x\sin^2 y - \cos^2 x\cos^2 y - \cos^2 z &= \\ &= \sin^2 z\sin^2 y - \cos^2 z\cos^2 y - \cos^2 x.\end{aligned}$$

Slednjo enakost uporabimo v (5) in dobimo

$$\begin{aligned}\frac{\sin a}{\sin\alpha} &= \frac{\sqrt{\sin^2 b\sin^2 c - \cos^2 b\cos^2 c - \cos^2 a + 2\cos a\cos b\cos c}}{\sin a\sin b\sin c}\\ &= \frac{\sqrt{\sin^2 a\sin^2 c - \cos^2 a\cos^2 c - \cos^2 b + 2\cos a\cos b\cos c}}{\sin a\sin b\sin c}\\ &= \frac{\sin b}{\sin\beta}.\end{aligned}$$

Spomnimo se sfernih koordinat (φ, λ), kjer je φ geografska širina in λ geografska dolžina. Parametrizacija sfere je

$$(\varphi, \lambda) \mapsto (\cos\varphi\cos\lambda, \cos\varphi\sin\lambda, \sin\varphi),$$

kjer je $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ in $\lambda \in [-\pi, \pi]$. Sferne koordinate niso poenoten pojem, zato velja previdnost, ko se z njimi srečamo v matematični ali fizikalni literaturi. Glede ostalih definicij bralca naprošamo, naj si prebere članek [6].

Naj bo $\triangle ABC$ sferni trikotnik, kjer lahko brez posledic enačimo točko C s severnim polom. Preostali oglišči naj bosta $A = (\varphi_1, \lambda_1)$ in $B = (\varphi_2, \lambda_2)$. Potem je

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} - b,\ \varphi_2 = \frac{\pi}{2} - a \text{ in } \lambda_2 - \lambda_1 = \gamma.$$

Ker je $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \cos c$, sledi

$$\begin{aligned}\cos c &= \cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\lambda_1\cos\lambda_2 +\\ &\quad + \cos\varphi_1\cos\varphi_2\sin\lambda_1\sin\lambda_2 +\\ &\quad + \sin\varphi_1\sin\varphi_2\\ &= \cos(\lambda_2 - \lambda_1)\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2\\ &= \cos\gamma\sin b\sin a + \cos b\cos a,\end{aligned}$$

kar je ravno kosinusni izrek (5).

Kako naprej?

S sinusnim in kosinusnim izrekom se trigonometrija sfernih trikotnikov seveda ne konča. Bralcu poleg že omenjene knjige [5] priporočamo še prosto dostopni učbenik sferne trigonometrije [4] iz leta 1886. Da bralcu potešimo radovednost, navedimo dve znameniti formuli.

Recimo, da imamo v sfernem trikotniku podani stranici a in b ter kot, ki ga ne oklepata, npr. α. Tako kot v ravnini tudi ta trikotnik v splošnem ni enolično določen: iz sinusnega izreka izračunamo kot β, ki pa je lahko tudi $\pi - \beta$. Toda kako določiti stranico c in kot γ? Lahko bi vzajemno uporabili sinusni in kosinusni izrek, da bi prišli do kvadratne enačbe. Toda obstaja identiteta, imenovana *Neparjeva analogija*

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}},$$

od koder zlahka izračunamo stranico c.

Ni težko pokazati, da je ploščina sfernega trikotnika P enaka $P = \varepsilon := \alpha + \beta + \gamma - \pi$, kjer se količina ε imenuje **sferni presežek.** Ploščina sfernega trikotnika na sferi s polmerom R je $R^2\varepsilon$. Kako pa bi najenostavneje izračunali ε, če poznamo stranice a, b, c? Velja

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}},$$

kjer je $s = (a + b + c)/2$. Formulo je odkril švicarski matematik **Simon Antoine Jean L'Huilier** (1750–1840) in zelo spominja na Heronovo formulo za izračun ploščine ravninskega trikotnika.

Uporaba sferne trigonometrije

Spomnimo se temeljnih izrekov sferne trigonometrije, ki smo jih dokazali: sinusni izrek

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}$$

in kosinusni izrek za stranico c

$$\cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos\gamma,$$

kjer z ustrezno zamenjavo stranic in kotov dobimo še izreka za a in b. Omenjena izreka bomo uporabili pri izračunu dolžine zračne poti med dvema krajema na Zemlji in določitvi geografskih koordinat opazovalca nočnega neba. Ker imamo opravka s količinami, merjenimi v stopinjah, bomo vse trigonometrijske funkcije računali v teh enotah.

Uporaba v geografiji

Osrednji problem arabske astronomije je bila določitev **kible**, t. j. smeri romarskega mesta Meka, natančneje kockaste stavbe imenovane Kaba. Po zahtevah muslimanskega obreda se mora vernik med molitvijo obrniti v smeri Kabe, za kar je potrebno poznavanje kible za poljubno mesto na Zemlji. O pomembnosti tega podatka priča dejstvo, da je astronom iz Damaska **Šams al-Din Abu Abdalah Mohamed ibn Mohamed al-Kalili** (ok. 1365) izdelal tabelo kibel za kar 2880 mest na Zemlji.

Matematična formulacija problema je naslednja. Naj bosta $A(\varphi_1, \lambda_1)$ in $B(\varphi_2, \lambda_2)$ poljubna kraja na Zemlji, kjer je φ geografska širina in λ geografska dolžina. S P označimo severni pol. Obravnavamo sferni trikotnik $\triangle ABP$, kjer je $\widehat{AP} = 90^\circ - \varphi_1$, $\widehat{BP} = 90^\circ - \varphi_2$ in $\sphericalangle APB = \Delta\lambda := \lambda_2 - \lambda_1$. Opazimo, da je $\Delta\lambda > 0$ natanko tedaj, ko kraj B leži vzhodno od kraja A. Dolžina stranice $\widehat{AB}$ je zračna razdalja med krajema A in B, kot $\sphericalangle BAP$ pa je smer kraja B glede na kraj A, merjena od severnega pola.

Dolžino stranice zlahka izračunamo, uporabimo kosinusni izrek za stranico $\widehat{AB}$ in dobimo

$$|\widehat{AB}| = R\cdot\arccos\left(\sin\varphi_1\sin\varphi_2 + {} \right.$$
$$\left. + \cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\Delta\lambda\right),$$

kjer je $R \approx 6378$ km polmer Zemlje. Izračun kota je malo težje opravilo. Najprej iz kosinusnega izreka za stranico $\widehat{BP}$ izrazimo $\cos\sphericalangle BAP$. Nato vanj vstavimo izraz za $\sin\widehat{AB}$, ki ga dobimo iz sinusnega izreka. Sledi

$$\cos\sphericalangle BAP = \frac{\cos\widehat{BP} - \cos\widehat{AP}\cos\widehat{AB}}{\sin\widehat{BP}\sin\widehat{AB}} = \left(\frac{\sin\widehat{AP}\cot\widehat{BP} - \cos\widehat{AP}\cos\sphericalangle APB}{\sin\sphericalangle APB}\right)\sin\sphericalangle BAP.$$

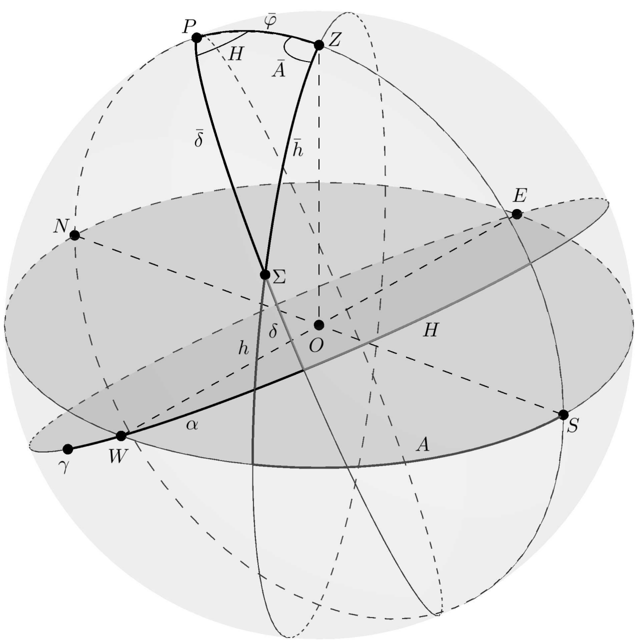
Slednji izraz olepšamo z znanimi količinami in dobimo

$$\cot\sphericalangle BAP = \frac{\cos\varphi_1\operatorname{tg}\varphi_2 - \sin\varphi_1\cos\Delta\lambda}{\sin\Delta\lambda}.$$

Izračunajmo kiblo za Ljubljano z geografskimi koordinatami $\varphi_1 = 46^\circ03'20''$ in $\lambda_1 = 14^\circ30'30''$. Geografske koordinate Kabe so $\varphi_2 = 21^\circ25'21''$ in $\lambda_2 = 39^\circ49'34''$. Dobimo $\cot\sphericalangle BAP = -0.8853$, od koder sledi $\sphericalangle BAP = 131.518^\circ$. Zaključimo lahko, da je Kaba od Ljubljane oddaljena približno 3575 km v smeri $48^\circ29'$ jugovzhodno.

Uporaba v astronomiji

Uporaba sferne trigonometrije v astronomiji zahteva poznavanje nebesnih koordinatnih sistemov (glej npr. [1]). Najbolj pogosta sistema sta **horizontski in ekvatorski koordinatni sistem** (slika 2). Naj bo $O(\varphi,\lambda)$ točka opazovalca. Horizontski sistem je sestavljen iz horizonta in nebesnega meridiana, t. j. glavnega kroga SZN, kjer je S jug, Z zenit in N sever. Naj bo E vzhod in W zahod horizontske ravnine. Ekvatorski sistem je sestavljen iz nebesnega ekvatorja, t. j. glavnega kroga WE, ki oklepa kot $\bar{\varphi} := 90^\circ - \varphi$ s horizontom, in glavnega kroga, ki gre skozi severni pol P in je pravokoten na nebesni ekvator.



SLIKA 2.
Horizontski (A,h) in ekvatorski (α,δ) koordinatni sistem ter astronomski trikotnik $\triangle ZP\Sigma$

Horizontski koordinati nebesnega telesa Σ sta **azimut** A in **višina** h (rdeča loka na sliki 2). Azimut merimo pozitivno od južišča S proti zahodu W in negativno proti vzhodu E. Koordinatni začetek ekvatorskega sistema je **pomladišče** γ, t. j. točka nebesnega ekvatorja, v katero pride Sonce pri svojem navideznem gibanju med zvezdami ob spomladanskem enakonočju. Ekvatorski koordinati sta **rektascenzija** α in **deklinacija** δ. Rektascenzijo merimo pozitivno od pomladišča proti vzhodu, deklinacijo pa pozitivno proti severnemu polu P nebesne sfere.

Za določanje dnevnega položaja nebesnih teles uporabljamo **časovni kot** H, ki ga praviloma štejemo v časovnih enotah, pozitivno od meridiana proti pomladišču. Časovni kot ima to lastnost, da ena ura ustreza petnajstim stopinjam. Večina astronomskih efemerid (npr. [2]) podaja **srednji zvezdni čas** SZČ_0 opolnoči svetovnega časa (0h UT) za meridian Greenwicha. Srednji zvezdni čas za poljuben svetovni čas a dobimo po obrazcu

$$\text{SZČ}_a = 1{,}00273791a + \text{SZČ}_0. \tag{6}$$

Pravi zvezdni čas PZČ_0 ob 0h UT pa je Greenwiški časovni kot pravega pomladišča. Njegov izračun je težaven, saj upošteva nutacijo Zemlje in nagnjenost ekliptike (za algoritem glej npr. [3]). Srednji in pravi zvezdni čas se dnevno zelo malo razlikujeta (praviloma za nekaj sekund), in če ne potrebujemo pretirane natančnosti, lahko predpostavimo $\text{SZČ}_0 = \text{PZČ}_0$. Kako pa bi določili časovni kot nebesnemu telesu Σ z rektascenzijo α_Σ ob času a UT, kot ga vidi opazovalec v O? Brez dokaza povejmo, da velja

$$H_\Sigma = \text{PZČ}_a + \lambda - \alpha_\Sigma, \tag{7}$$

kjer ponovno imamo $1\text{h} = 15^\circ$.

Cilj je podati formule, po katerih lahko pretvorimo koordinate (A,h) v (H,δ) in obratno. Za dosego tega cilja je priporočljivo uvesti **astronomski trikotnik** (slika 2). To je sferni trikotnik $\triangle ZP\Sigma$, kjer je $\bar{\delta} := \widehat{P\Sigma} = 90^\circ - \delta$, $\bar{h} := \widehat{Z\Sigma} = 90^\circ - h$ in $\bar{\varphi} = \widehat{PZ}$ s kotoma $\sphericalangle \Sigma PZ = H$ in $\bar{A} := \sphericalangle PZ\Sigma = 90^\circ - A$. Uporabimo kosinusna izreka za stranici $\bar{\delta}$ in $\bar{h}$ v astronomskem trikotniku $\triangle ZP\Sigma$:

$$\sin h \sin\varphi - \cos h \cos\varphi \cos A = \sin\delta, \tag{8}$$
$$\sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos H = \sin h. \tag{9}$$

V (8) zamenjajmo $\sin h$ z izrazom (9). Dobimo

$$\cos A \cos h = \cos H \cos\delta \sin\varphi - \sin\delta \cos\varphi. \tag{10}$$

Uporabimo še sinusni izrek za $\triangle ZP\Sigma$:

$$\sin A \cos h = \sin H \cos\delta. \tag{11}$$

Zaradi preglednosti zapišimo enačbe (10), (11) in (9) na enem mestu:

$$\begin{aligned} \cos A \cos h &= \sin\varphi \cos H \cos\delta - \cos\varphi \sin\delta, \\ \sin A \cos h &= \sin H \cos\delta, \\ \sin h &= \cos\varphi \cos H \cos\delta + \sin\varphi \sin\delta. \end{aligned}$$

Te enačbe nam omogočajo izračunati azimut in višino nebesnega telesa ob poznavanju časovnega kota in deklinacije. Kaj pa obratno? Bralec lahko brez težav preveri, da velja

$$\begin{aligned} \cos H \cos\delta &= \sin\varphi \cos A \cos h + \cos\varphi \sin h, \\ \sin H \cos\delta &= \sin A \cos h, \\ \sin\delta &= -\cos\varphi \cos A \cos h + \sin\varphi \sin h. \end{aligned}$$

V resnici je nova samo prva enačba.

Predno se lotimo navigacije po zvezdah, bomo za »ogrevanje« izračunali dolžino dneva. Recimo, da smo v kraju z geografsko širino φ_0 izmerili višino h_0 nebesnemu telesu Σ, za katerega vemo, da ima deklinacijo δ_0. Kako bi izračunali časovni kot H? Uporabimo enačbo (9) in dobimo

$$\cos H = \frac{\sin h_0}{\cos\delta_0 \cos\varphi_0} - \operatorname{tg}\delta_0 \operatorname{tg}\varphi_0.$$

Na prvi pogled bi rekli, da Sončev vzhod (ali zahod) ustreza pogoju $h_0 = 0$. Torej bi tedaj dobili za dolžino dneva $\bar{D}$ (merjena v urah) izraz

$$\bar{D} = \frac{2}{15} \arccos\left(-\operatorname{tg}\delta_0 \operatorname{tg}\varphi_0\right).$$

Poskusimo našo formulo na konkretnih podatkih. Dne 21. junija 2015 je bil poletni Sončev obrat. Tedaj je Sonce imelo največjo možno deklinacijo $\delta_0 = 23°26'$. Za Ljubljano dobimo $\bar{D} = 15{,}563$ h, kar pomeni, da je bil dan dolg 15 ur in 34 minut. Toda uradna vrednost (glej npr. [2]) znaša 15 ur in 45 minut. Kje smo se zmotili? Edini privzetek, ki smo ga naredili, je bil $h_0 = 0$. Ta predpostavka je napačna iz dveh razlogov. Prvi razlog je ta, da po dogovoru za Sončni vzhod štejemo trenutek, ko se rob Sončevega diska dotakne horizonta. Ker je navidezni Sončev polmer $16'$, moramo vzeti $h_0 = -16'$. Toda pozabili smo na pomemben astronomski pojav – **atmosfersko refrakcijo.** Pri tem pojavu gre za lom svetlobe pri potovanju skozi ozračje. Zato je Sonce še vedno pod horizontom, ko ga mi zaradi refrakcije že vidimo na nebu. Približna formula za izračun prave višine h_P nebesnega telesa ob horizontu z navidezno višino h_N je

$$h_P \approx h_N - \cot\left(h_N + \frac{7{,}31}{h_N + 4{,}4}\right), \qquad (12)$$

kjer je drugi člen merjen v minutah. Torej moramo vzeti $h_0 = -16' - 34' = -50'$. Popravljena formula za dolžino dneva je

$$D = \frac{2}{15} \arccos\left(-\frac{\sin 50' + \sin\delta_0 \sin\varphi_0}{\cos\delta_0 \cos\varphi_0}\right).$$

In res, za D dobimo 15 ur in 45 minut. Ker je velikost atmosferske refrakcije odvisna tudi od višine opazovališča ter temperature in gostote ozračja, se čas Sončevega vzida in zaida (ter posledično tudi dolžino dneva) podaja le do minute natačno.

Za določitev geografskih koordinat potrebujemo podatke o položaju dveh nebesnih teles. Zadošča že poznavanje višine ob nekem svetovnem času. Recimo, da smo ob času a UT izmerili višini h_1 in h_2 nebesnima telesoma z znanima deklinacijama δ_1 in δ_2 ter znanima rektascenzijama α_1 in α_2. Po enačbah (9) in (7) dobimo sistem dveh enačb z neznankama φ in λ:

$$\left\{ \begin{aligned} \sin h_1 &= \cos\varphi \cos\left(\lambda + \text{PZČ}_a - \alpha_1\right) \cos\delta_1 + \\ &\quad + \sin\varphi \sin\delta_1, \\ \sin h_2 &= \cos\varphi \cos\left(\lambda + \text{PZČ}_a - \alpha_2\right) \cos\delta_2 + \\ &\quad + \sin\varphi \sin\delta_2. \end{aligned} \right.$$

Sistem lahko rešujemo po kateri od numeričnih metod, vendar obstaja še boljša približna metoda, ki ne sloni na reševanju sistema. Metodo, ki jo bomo opisali, je odkril francoski kontraadmiral **Adolphe Laurent Anatole Marcq de Blond de Saint Hilaire** (1832–1889). Recimo, da slutimo, da se nahajamo na geografskih koordinatah (φ_0, λ_0). Temu položaju P_0 pravimo **domnevni položaj.** Sedaj lahko iz enačbe (9) izračunamo višini $\bar{h}_1$ in $\bar{h}_2$ nebesnima telesoma, opazovana ob času a UT iz *domnevnega* položaja:

$$\bar{h}_i = \arcsin\Big(\cos\varphi_0 \cos\left(\lambda_0 + \text{PZČ}_a - \alpha_i\right) \cos\delta_i + \sin\varphi_0 \sin\delta_i\Big)$$

za $i \in \{1, 2\}$. Izračunani višini uporabimo v enačbi (11) za izračun azimutov $\bar{A}_1$ in $\bar{A}_2$ nebesnima telesoma, opazovana ob času a UT iz *domnevnega* položaja:

$$\bar{A}_i = \arcsin \frac{\sin\left(\lambda_0 + \mathrm{PZČ}_a - \alpha_i\right)\cos\delta_i}{\cos\bar{h}_i}$$

za $i \in \{1,2\}$. Zamislimo si, da se sprehajamo po premici v smeri azimuta $\bar{A}_1$. Če gremo proti nebesnemu telesu, se njegova višina povečuje. Če pa se oddaljujemo, se njegova višina zmanjšuje. Torej obstaja točka P_1 na tej premici, od koder je višina nebesnega telesa prav h_1. Elementarna geometrija nas prepriča, da velja $\widehat{P_0P_1} = \left|\bar{h}_1 - h_1\right|$. Postavimo se v točko P_1 in se sprehajajmo po pravokotnici na azimutno premico. Višina h_1 se zelo malo spreminja, zato lahko privzamemo, da je na tej pravokotnici kar konstantna. Tej premici pravimo **premica položaja**. Vse korake ponovimo še za azimutno premico $\bar{A}_2$. Sedaj je jasno, da je približen položaj naših meritev prav presečišče premic položajev. Vaja iz enačbe premice nam da uporabna obrazca za izračun pravega položaja:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\left(\bar{h}_2 - h_2\right)\sin\bar{A}_1 - \left(\bar{h}_1 - h_1\right)\sin\bar{A}_2}{\sin\left(\bar{A}_1 - \bar{A}_2\right)},$$

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{\left(\bar{h}_1 - h_1\right)\cos\bar{A}_2 - \left(\bar{h}_2 - h_2\right)\cos\bar{A}_1}{\sin\left(\bar{A}_1 - \bar{A}_2\right)}.$$

Recimo, da smo nekje v Sloveniji dne 7. 8. 2015 ob 22. uri po lokalnem času izmerili višino $\tilde{h}_1 = 36°40{,}9'$ zvezde Arktur in višino $\tilde{h}_2 = 80°23{,}6'$ zvezde Vega [1]. Po enačbi (12) sta pravi višini enaki $h_1 = 36°39{,}6'$ in $h_2 = 80°23{,}4'$. Morda je koga zmotila uporaba refrakcijskega popravka, saj se vrednosti razlikujeta za manj kot $1{,}5'$. V bran tej odločitvi naprošamo bralce, naj naslednje postopke naredijo na nepopravljenih višinah. Iz namiga o lokaciji razberemo, da je čas izmere $a = 20$ h UT in koordinate domnevnega položaja $\varphi_0 = 46°$, $\lambda_0 = 14{,}5°$ so kar približne koordinate Ljubljane. Ker ne potrebujemo pretirane natančnosti, bomo predpostavili $\mathrm{SZČ}_0 = \mathrm{PZČ}_0$. Iz [2] preberemo $\mathrm{SZČ}_0$ = 21h 0m 48,2s. Po predpostavki in formuli (6) imamo $\mathrm{PZČ}_a$ = 17h 4m 5,3s. Potrebujemo še rektascenziji in deklinaciji zvezd: α_1 = 14h 16m 22,1s in $\delta_1 = 19°6'8''$ za Arktur ter α_2 = 18h 37m 27,8s in $\delta_2 = 38°47'56''$ za Vego. Vse te podatke dobimo v [2].

Po Hilairovi metodi imamo $\varphi_1 = 45°57'43''$ in $\lambda_1 = 14°36'8''$. Metodo lahko ponovno uporabimo na novih koordinatah. Tako dobimo še boljši približek $\varphi_2 = 45°57'42''$ in $\lambda_2 = 14°38'$. Uporaba metode tretjič nam da $\varphi_3 = 45°57'42''$ in $\lambda_3 = 14°38'\,34''$. Kaj pa, če uporabimo sistem enačb? Program *Mathematica* nam poda nekaj rešitev, smiselna med njimi je $\varphi = 45°57'42''$ in $\lambda = 14°38'47''$. Tretji približek po metodi Saint Hilaire se zelo malo razlikuje od prave rešitve sistema, v prostoru sta si oddaljena za manj kot tristo metrov. Tudi drugače smo zelo dobro ocenili naš pravi položaj, saj sta oba približka od njega oddaljena za manj kot pol kilometra.

[1] V resnici avtor tega ni lastnoročno izmeril, temveč se je poslužil brezplačnega astronomskega programa *Stellarium*.

Literatura

[1] F. Avsec, M. Prosén, *Astronomija*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2006.

[2] B. Dintinjana, D. Fabjan, H. Mikuž, T. Zwitter, *Naše nebo 2015: astronomske efemeride*, DMFA-založništvo, Ljubljana, 2014.

[3] J. Meeus, *Astronomical algorithms*, 2nd ed., Willmann-Bell, Inc., Richmond, Virginia, 1998.

[4] I. Todhunter, *Spherical trigonometry: for the use of colleges and schools*, `https://www.gutenberg.org/files/19770/19770-pdf.pdf`, ogled: 21. 1. 2016.

[5] G. Van Brummelen, *Heavenly mathematics: the forgotten art of spherical trigonometry*, Princeton University Press, Princeton, 2013.

[6] E. W. Weisstein, *Spherical coordinates*, From MathWorld–A Wolfram Web Resource, `http://mathworld.wolfram.com/SphericalCoordinates.html`, ogled: 21. 1. 2016.

× × ×