PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **19** (1991/1992)
Številka 5
Strani 258–260

Marjan Jerman:

O DIAMETRU MNOŽICE

Ključne besede: matematika, množice.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/19/1097-Jerman.pdf

O DIAMETRU MNOŽICE

Kako bi povedali, kako velika je neka množica M v 3-razsežnem (evklidskem) prostoru (torej v prostoru, kjer živimo; ima dolžino, širino in višino)? Ena od možnosti je, da povemo največjo mogočo razdaljo med dvema točkama te množice (dolžino najdaljše daljice, katere krajišči ležita v M). Taka razdalja ne obstaja vedno. Če obstaja, ji pravimo *diameter* ali *premer* množice M in jo označimo z diam M (včasih pa bomo tudi najdaljšo daljico samo imenovali diameter množice M). Da dvom o obstoju ni odveč, nam pokažeta naslednja zgleda:

1. Naj bo M premica v prostoru. Za poljubni $d \geq 0$ lahko najdemo na M daljico z dolžino d. (Eno krajišče naj bo poljubna točka na premici, po premici odmerimo d in končna točka je drugo krajišče daljice z dolžino d.) Lahko bi rekli, da je diameter premice enak neskončno.
2. Naj bo M odprti krog (to je krog brez oboda, brez mejne krožnice) s polmerom r. Za poljubni $d < 2r$ lahko najdemo v M točki, ki sta oddaljeni za d (v kako točko, ki je zadosti blizu obodu, zapičimo šestilo in narišimo krožnico s polmerom d; dobre so vse točke na tej krožnici, ki ležijo v M), za $d = 2r$ pa nam to ne uspe, kajti vzeti bi morali točki z oboda.

Če je diameter dosežen na neki daljici, pa taka daljica ni nujno ena sama. Za zaprti krog (to je krog skupaj z obodom) je diameter dosežen na vsakem premeru (od tod tudi ime). Dobra je vsaka daljica skozi središče kroga, ki ima krajišči na obodu.

Bralec, ki bo šel študirat matematiko, bo izvedel, da diameter zagotovo obstaja za množice, ki so omejene (to je take, ki jih lahko vklenemo v kak krog - za premico ni dovolj velik noben krog) in zaprte (približno si lahko mislimo, da morajo imeti rob - odprti krog ga nima).

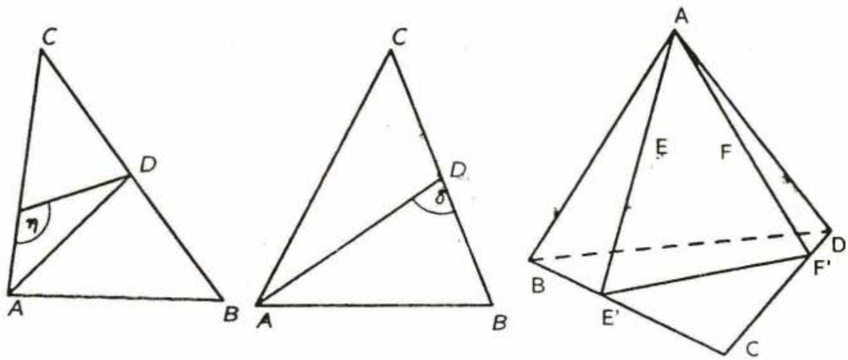
Da bomo bolje začutili, kaj je diameter, poiščimo diameter trikotnika in tetraedra (četverca). Najbolj vztrajni bralci pa lahko po napornem branju, ki zahteva nekaj osnovnega znanja ravninske geometrije, rešijo še nekaj nalog, ki so jih reševali srednješolci na republiških in zveznih tekmovanjih v (bivši) Jugoslaviji, Nemčiji in Avstriji.

Trditev 1. *Diameter trikotnika je dosežen na eni od njegovih stranic.*

Dokaz: Trikotnik je zaprt in omejen, zato diameter obstaja. Vzemimo trikotnik $\triangle ABC$ in diameter DE. Da morata krajišči diametra ležati na stranicah trikotnika, ugotovimo takole: če bi kako krajišče ležalo v notranjosti $\triangle ABC$, bi lahko narisali premico skozi D in E, ki bi sekala obod $\triangle ABC$ v točkah D' in E'. Daljica $D'E' \subset \triangle ABC$ bi bila daljša od daljice DE, to pa je v protislovju s predpostavko, da je DE diameter. Zato obravnajmo le primer, ko krajišči diametra ležita na stranicah trikotnika.

Najprej pokažimo, da se vsaj eno krajišče (to je vsaj ena od točk D in E) ujema s kakim od oglišč $\triangle ABC$. Predpostavimo nasprotno. Privzemimo oznake na sliki. Zaradi simetričnosti lahko obravnavamo le primer $E \in AC$, $D \in BC$ (za druge lege zamenjamo vloge črk, dokaz je isti). Naj bo $\varepsilon :=$ $= \angle AED$. Narišimo daljico AD in si oglejmo trikotnika $\triangle AED$ in $\triangle EDC$.

Če je kot ε topi ali pravi, je največji kot v $\triangle AED$ (za ostala kota skupaj ostane le $180^o - \varepsilon \leq 90^o \leq \varepsilon$, torej za vsakega posebej manj kot ε). Za trikotnik velja, da nasproti največjemu kotu leži največja stranica. (Radoveden bralec lahko to prebere v Pucljevem učbeniku *Geometrija za 1. razred gimnazije*, III.B/§6-izrek 26.) Tedaj bi torej veljalo $AD > ED$, to pa je v protislovju s predpostavko, da je DE diameter.



Slika 1. K dokazu 1. in 2. trditve

Če je kot ε ostri, je $\angle DEC = 180^o - \varepsilon$ top in tako največji v $\triangle EDC$ in je podobno kot prej $DC > ED$, kar je protislovje.

Dokažimo, da se tudi drugo krajišče pokriva z ogliščem trikotnika: Recimo, da to ni res. Zaradi simetričnosti lahko obravnavamo le primer $E = A$, $D \in BC$. Označimo $\delta := \angle ADB$. Oglejmo si trikotnika $\triangle ABD$ in $\triangle ADC$.

Sklepajmo podobno kot prej: Če je kot δ topi, je $AB > AD = ED$, če pa je ostri, je $\angle ADC = 180^o - \delta$ top in $AC > AD$. Trditev je tako dokazana.

Dokažimo še podobno trditev za tetraedre:

Trditev 2. *Diameter tetraedra je dosežen na enem od njegovih robov.*

Dokaz: Tudi tetraeder (imenujmo ga $ABCD$) je zaprt in omejen, zato diameter obstaja. Naj bo dosežen na daljici EF. Podobno kot pri trikotniku ležita krajišči E in F na ploskvah tetraedra. (Sicer bi potegnili premico skozi E in F, ta bi sekala površino tetraedra v točkah E' in F' in veljalo bi $E'F' >$ $> EF$.)

Tetraeder ima štiri oglišča, zato lahko izmed njih izberemo eno, ki se ne ujema z nobenim od krajišč diametra, recimo oglišče A. Točke A, E in F niso kolinearne, ker bi sicer veljalo ali $AF > EF$ ali $AE > EF$, kar je v nasprotju s predpostavko, da je EF diameter. Potegnimo poltraka z izhodiščem v A skozi E in F, naj prebodeta ploskev $\triangle BCD$ v točkah E' in F'. Ker točke A, E in F niso kolinearne, je $E' \neq F'$.

EF je po predpostavki diameter tetraedra, velja pa $EF \subset \triangle E'AF' \subset$ $ABCD$, zato je EF tudi diameter trikotnika $\triangle E'AF'$. Po trditvi 1 se mora EF ujemati z eno od stranic trikotnika $\triangle E'AF'$. Ker $A \notin \{E, F\}$, mora biti $EF = E'F'$. Daljica $E'F'$ pa leži v $\triangle BCD$. Tako lahko ponovno uporabimo trditev 1, ki nam pove, da je $EF = E'F'$ ena od stranic trikotnika $\triangle BCD$. Trditev je dokazana.

Naloge:

1. (Jugoslavija, 1972) Predpostavimo, da je v neki konveksni množici diameter dosežen na več (≥ 2) daljicah. Dokaži, da imata poljubni dve od teh daljic vsaj eno skupno točko. (*Nasvet:* Dokazuj s protislovjem, loči primera: (1) noben od diametrov ne seka nosilke drugega, (2) en diameter seka nosilko drugega diametra.)
2. (Nemčija, 1982) Dokaži, da lahko vsak konveksni štirikotnik razrežemo z lomljeno črto tako, da sta diametra tako dobljenih delov manjša od diametra štirikotnika.
3. (Nemčija, 1962) Dokaži, da je v konveksnem štirikotniku razmerje med najdaljšo in najkrajšo razdaljo med poljubnima ogliščema večje ali enako $\sqrt{2}$. (*Nasvet:* uporabi kosinusni izrek.)
4. (Avstrija, 1975) Na ravnini je poljubno izbranih šest točk. Dokaži, da je razmerje med najdaljšo in najkrajšo razdaljo med točkama večje ali enako $\sqrt{3}$. (*Nasvet:* uporabi kosinusni izrek.)

Marjan Jerman