

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik **9** (1981/1982)

Številka 3

Strani 138-140

Ivan Pucelj:

INVERZOR

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/9/9-3-Pucelj.pdf>

© 1982 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2009 DMFA – založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

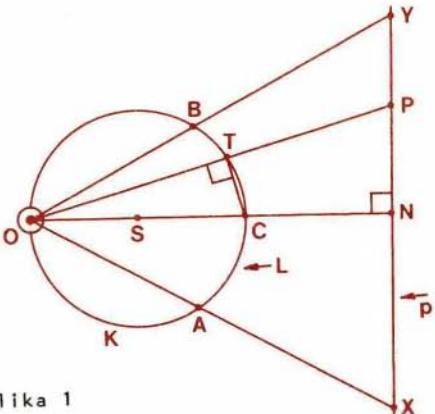
INVERZOR

1. V ravnini je določena kot negibna točka O . Gibljivi pa naj bosta točki T , P , tako da zadostimo temeljno pogoju:

- Točka T naj se giblje po krožnem loku L krožnice k s sredишčem S in premerom OC , $\overline{OC} = 2r$;
- Točka P naj se giblje po daljici XY na premici p , ki je pravokotna na premico (O, C) ;
- Točke O, T, P morajo lažati vsak hip na skupni premici (so kolinearne).

2. Problem: S katerim mehanizmom je treba povezati točke O, T, P , da ustrezmo pogoju v 1. Skratka: Želimo narediti napravo, ki prevede kroženje v premočrtno gibanje ali pa premočrtno gibanje v kroženje!

Na ta problem so naleteli v prejšnjem stoletju pri gradnji parnega stroja.



Slika 1

3. Najprej zberimo nekaj geometrijskih spoznanj, ki nam bodo v pomoč.

Lok L naj bo simetričen glede na premico (O, C) , krajišči loka L naj bosta točki A, B ($L = \widehat{AB}$). Skrajnji legi za točko T sta takoj A in B , skrajnji legi za točko P pa naj bosta ustrezní točki X in Y , na premici p . Presečišče pravokotnic (O, C) in p označimo z N (slika 1).

Ko je točka T na loku L zunaj lege C , dobimo pravokotni trikotnik OCT s pravim kotom pri T (obodni kot nad premerom OC krožnice k). Trikotnik OCT je podoben pravokotnemu trikotniku OPN . Od tod dobimo sorazmerje dolžin enakoležnih stranic

$$\overline{OT} : 2r = \overline{ON} : \overline{OP}$$

Ker je produkt zunanjih členov v sorazmerju enak produktu notranjih členov, dobimo odtod:

$$\overline{OT} + \overline{OP} = 2r + \overline{ON}$$

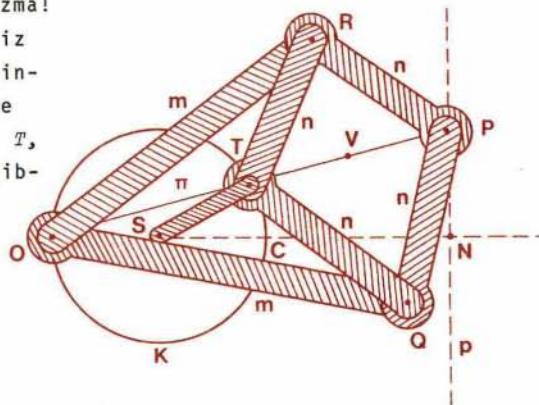
Količini $2x$ in \overline{ON} sta v našem problemu dani in stalni, zato je tudi njun produkt stalna količina. Označimo jo z α^2 , pa imamo za O, T, P pogoj

$$(1) \quad \overline{OT} \cdot \overline{OP} = a^2$$

Želena naprava, ki naj veže točki O , T in P , mora tedaj delovati tako, da je v vsakem trenutku ustreženo pogoju (1).

4. Opisimo zgradbo mehanizma!

Kaže ga slika 2. Sestoji iz sedmih lesenih ali pa kovinskih palic, ki so vrtljive okoli krajišč O , Q , P , R , T , S , tako da je točka O negibna.



Slika 2

En del mehanizma sestavlja romb $TQPR$ s stranico dolžine n in središčem v točki V , drugi del mehanizma ima dva kraka OQ , OR z dolžinama $\overline{OQ} = \overline{OR} = m$, $m > n$. Točka T je z ročico dolžine x povezana s središčem S krožnice k . Dolžini m in n izberemo tako, da velja zveza

$$m^2 - n^2 = a^2$$

če je to res, je namreč produkt $\overline{OT} \cdot \overline{OP}$, kot vidimo iz slike 2, enak $(\overline{OV} - \overline{VT})(\overline{OV} + \overline{VP})$. Ta izraz pa je zaradi enakosti $VT = VP$ enak $\overline{OV}^2 - \overline{TV}^2$. Ker se diagonali TP in QR sečeta v središču V romba $TQPR$ pravokotno, lahko uporabimo za pravokotna trikotnika OVR in TVR Pitagorov izrek, pa dobimo

$$m^2 = \overline{OV}^2 + \overline{VR}^2 \quad n^2 = \overline{TV}^2 + \overline{VR}^2$$

Odtod dobimo s kratkim računom

$$\begin{aligned}\overline{OT} \cdot \overline{OP} &= \overline{OV}^2 - \overline{TV}^2 = (\overline{OV}^2 + \overline{VR}^2) - (\overline{TV}^2 + \overline{VR}^2) = \\ &= m^2 - n^2 = \alpha^2.\end{aligned}$$

Napravo prikazano na sliki 2, imenujemo *inversor*. Videli smo, da ustreza pogoju (1), zato prevede krožno gibanje točke T po loku \widehat{AB} v premočrtno gibanje točke P po daljici XY na premici p (seveda prevede tudi gibanje točke P v kroženje točke T).

Opomba. Preslikava v ravnini, ki prireja točki T točko P po pravilu (1), in se imenuje *inverzija* v ravnini. Točka O je *središče inverzije*, število α^2 je *koeficient inverzije*. S tem dvojico podatkovoma je preslikava natančno določena. V geometrijskem pogledu ima ta preslikava veliko zanimivosti in zasluži posebne članke.

Ivan Pucežj
