

Ponazoritev limite zaporedja

↓↓↓

BOŠTJAN KUZMAN

→ Koncept limite zaporedja je verjetno eden zahtevnejših v srednješolski matematiki. Čeprav se limito zaporedja naučimo izračunati s pomočjo računskih pravil, je marsikomu težko pojasniti, kaj limita zaporedja sploh pomeni. Nekoliko približno lahko povemo, da se členi zaporedja v neskončnosti približujejo limiti na tak način, da so v majhni okolici limite vsi dovolj pozni členi zaporedja. S pomočjo GeoGebre bomo to poskusili natančneje ilustrirati.

Spomnimo se formalne definicije limite. Realno število L je limita zaporedja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja neko naravno število $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $|a_n - L| < \varepsilon$ za vsak $n \geq n_0$.

Oglejmo si, kaj to pomeni v konkretnem primeru.

Naj bo zaporedje dano s splošnim členom

$$a_n = \frac{3n+1}{2n+5}.$$

Limita tega zaporedja je enaka

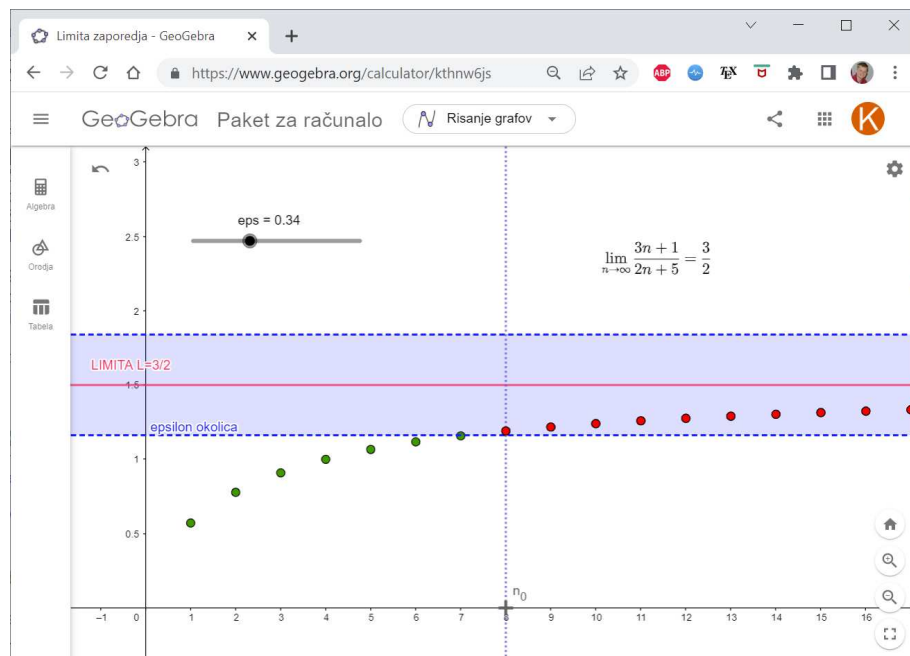
$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{5}{n}} = \frac{3}{2}$$

(imenovalec in števec ulomka smo delili z n ter ugotovili, da gresta člena $\frac{1}{n}$ in $\frac{5}{n}$ proti 0, ko gre $n \rightarrow \infty$).

Izberimo si konkreten $\varepsilon = 0,5$. Potem definicija limite pove, da obstaja takšno število n_0 , da je $|a_n - \frac{3}{2}| < 0,1$ za vse $n \geq n_0$. To število lahko določimo z reševanjem neenačbe

$$\left| \frac{3n+1}{2n+5} - \frac{3}{2} \right| < \frac{1}{2}.$$

S preurejanjem jo hitro preoblikujemo v enakovredno neenačbo $4 < n$. Členi a_n se torej od limite razlikujejo za manj kot $1/2$, če je n vsaj 5. Iskano število n_0 je v tem primeru torej enako 5.



SLIKA 1.

Interaktivna ponazoritev limite zaporedja s splošnim členom $a_n = \frac{3n+1}{2n+5}$.

Nalogo pa bi lahko rešili tudi za splošen $\varepsilon > 0$. V tem primeru dobimo neenačbo

$$\left| \frac{3n+1}{2n+5} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon,$$

ki jo preuredimo v enakovredno neenačbo $13 < \varepsilon(4n+10)$ oziroma $n > \frac{13-10\varepsilon}{4\varepsilon}$. Ker je n naravno število, bi torej lahko rekli, da je $n_0 = \lfloor \frac{13-10\varepsilon}{4\varepsilon} \rfloor + 1$ (za 1 povečani celi del števila).

Izračunane pojme lahko zdaj ponazorimo grafično z naslednjimi koraki.

- Z ukazom `Zaporedje((n,(3n+1)/(2n+5)),n,1,30)` narišemo prvih 30 členov zaporedja kot točke v ravnini.
- Definiramo vrednost $L=3/2$, ki predstavlja limito zaporedja. Na grafu jo ponazorimo s premico, ki jo vnesemo kot $y=L$ in ustrezno pobarvamo.
- Ustvarimo drsnik z vrednostmi med 0 in 1 in ga poimenujemo `eps`.
- Ustrezno ε -okolico limite na grafu ponazorimo s pasom med premicama $y = 3/2 \pm \varepsilon$, kar v GeoGebro vnesemo kot $L-eps < y < L+eps$.
- Zdaj že lahko opazujemo, kako je od vrednosti `eps` odvisno število členov zaporedja, ki ležijo v ustreznem pasu.
- Izračunajmo vrednost $n_0 = \text{floor}((13-10*eps)/(4*eps))+1$ (ukaz `floor` pomeni celi del števila). Na grafu jo ponazorimo s premico $x=n_0$.
- Zdaj lahko točke zaporedja, ki v celoti ležijo znotraj pasu, obarvamo z drugo barvo tako, da narišemo še eno zaporedje z ukazom `Zaporedje((n,(3n+1)/(2n+5)),n,n_0,30)`. Dodane točke seveda pobarvamo z drugo barvo.
- S spremembo vrednosti drsnika `eps` se zdaj interaktivno spreminjata širina pasu in mejna vrednost n_0 , za katero ustrezni členi zaporedja ležijo znotraj tega pasu.

Na podoben način lahko ponazorimo tudi limito kakšnega drugega zaporedja, ki pa naj ne bo prekomplikirano, da bomo lahko zares izračunali vrednost n_0 v odvisnosti od ε . Bralke in bralce vabimo, da svojo spretnost pri računanju in konstrukcijah v GeoGebri preizkusijo še na primeru zaporedja s splošnim členom $a_n = \frac{n^2+1}{n^2-1}$.

Rešitve uganke s strani 14

↓↓↓

→

1. Upoštevamo, da je $2023 = 7 \cdot 17^2$, in kvadriramo enačbo $\sqrt{y} = \sqrt{2023} - \sqrt{x}$. Dobimo $y = 2023 - 34\sqrt{7x} + x$. Ker so števila cela, velja $x = 7k^2$ za neko celo število $k \leq 17$. Če to vstavimo v prejšnjo enačbo, po preurejanju sledi $y = 7(k-17)^2$. Za $k=1$ dobimo rešitev $x=7, y=1792$. Za $k=2, \dots, 8$ dobimo še 7 bistveno različnih rešitev, preostale rešitve so enakovredne že znanim zaradi simetrije neznank x, y .
2. Izraz z nekaj spretnosti preoblikujemo v $(x-2023)(y-2023) = 2023^2 = 7^2 \cdot 17^4$. Rešitve zdaj dobimo z različnimi kombinacijami prafaktorjev na desni strani enakosti. Ena rešitev je denimo $x-2023=1$ in $y-2023=2023^2$, torej $x=2024$ in $y=4094552$. Vseh bistveno različnih rešitev je 8.
3. Izraz preoblikujemo v $xyz + xy + xz + yz + x + y + z + 1 = 2024$, torej rešujemo enačbo $(1+x)(1+y)(1+z) = 2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ v naravnih številih. Ena rešitev je denimo $1+x=2^3, 1+y=11$ in $1+z=23$ oziroma $x=7, y=10$ in $z=22$. Z drugačnim kombiniranjem prafaktorjev dobimo še preostale rešitve. Vse rešitve je nekoliko sitno prešteti, a izkaže se, da je bistveno različnih le 8. Podrobnosti prepustimo bralcem in bralkam.
4. Ena rešitev je očitno $x=0$. Da bi našli vse, moramo prešteti vsa presečišča sinusne krivulje $\sin x$ s premico $\frac{x}{2023}$. Za rešitve seveda velja $|x| \leq 2023$. Za $0 \leq x \leq 2023$ je funkcija $\sin(x)$ nenegativna na intervalih $[0, \pi], [2\pi, 3\pi], \dots, [642\pi, 643\pi]$ (velja $644\pi > 2023$). Na vsakem takem intervalu torej premico seka dvakrat, kar da skupaj 644 presečišč. Podobno preštejemo 644 presečišč za $-2023 \leq x \leq 0$. Pri tem pa smo rešitev $x=0$ šteli dvakrat, vseh presečišč je torej 1287.

× × ×

× × ×