PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **32** (2004/2005)
Številka 4
Strani 9–12

Peter Šemrl:

LINEARNE PRESLIKAVE RAVNINE IN 2 x 2 MATRIKE

Ključne besede: matematika, linearna algebra, matrike, preslikave ravnine.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/32/1593-Semrl.pdf

Linearne preslikave ravnine in 2X2 matrike

Uvod

Ta sestavek je namenjen dijakom srednjih šol, ki že poznajo vektorje. Ob reševanju uporabne matematične naloge se bomo seznanili z osnovnimi idejami linearne algebre.

Denimo, da ravnino, opremljeno s pravokotnim koordinatnim sistemom, najprej zavrtimo okoli izhodišča za kot 30° v pozitivni smeri, jo nato pravokotno projiciramo na premico $y = 2x$, potem jo prezrcalimo čez simetralo drugega in četrtega kvadranta ter jo na koncu še zasukamo okoli izhodišča za pravi kot v negativni smeri. Kje konča točka (x, y), ko opravimo vse štiri opisane transformacije?

Zakaj bi sploh reševali tako zapletene naloge? Pri računalniških igricah je pogosto potrebno zarotirati sliko na zaslonu okoli neke središčne točke ali pa jo prezrcaliti preko premice, ki poteka skozi to središčno točko. Včasih nam koristi tudi projiciranje prostora (ki je na zaslonu predstavljen ravninsko) na kakšno steno (ki je na sliki predstavljena z daljico, ta daljica pa seveda določa premico). In seveda je pogosto potrebno izvesti več takih transformacij zaporedoma. Kaj se potem zgodi s sliko na zaslonu? Pri iskanju odgovora na tako vprašanje nam pomaga, če vemo, kaj se zgodi z vsako točko na zaslonu. To pa pomeni, da moramo rešiti nalogo, podobno zgoraj zastavljenemu problemu. S sorodnimi matematičnimi problemi se srečujejo sestavljalci programske opreme, namenjene arhitektom, oblikovalcem, prodajnim salonom pohištva.

Tako kot pri vsaki zahtevnejši matematični nalogi bomo tudi svoj uvodni problem razbili v manjše, lažje obvladljive naloge. Vprašali se bomo, kaj se zgodi s poljubno točko (x, y) pri rotaciji ravnine okoli izhodišča za kot φ, kaj se zgodi s točko pri zrcaljenju preko premice, ki poteka skozi izhodišče, in še kam se preslika točka (x, y) pri pravokotnem projiciranju na premico skozi izhodišče koordinatnega sistema. Pri tem bomo opazili nekatere podobnosti med navedenimi različnimi problemi in te podobnosti izkoristili pri njihovem reševanju. To nas bo pripeljalo do osnovnih idej linearne algebre. Končali bomo z nekaj opombami o možnih posplošitvah na trorazsežni prostor in višje dimenzije.

Matrike

V tem poglavju si bomo pripravili orodje, ki bo poenostavilo računanje pri reševanju zastavljenega problema.

Matrika je tabela števil. Oglejmo si najprej nekaj primerov:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{1}{2} \\ \pi & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 7 & 3 \end{bmatrix}.$$

Prva matrika ima dve vrstici in tri stolpce, druga štiri vrstice in štiri stolpce, zadnja pa eno samo vrstico in dva stolpca. Rečemo, da je velikost prve matrike 2×3, drugi matriki rečemo 4×4 matrika, zadnji pa 1×2 matrika.

V tem članku bomo večinoma potrebovali 2×2 in 2×1 matrike. Matrika velikosti 2×2 je tabela štirih števil, razporejenih v dve vrstici in dva stolpca:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Število a_{ij} imenujemo (i, j)-ti člen matrike. Prvi indeks pove, v kateri vrstici leži ta člen, drugi pa v katerem stolpcu.

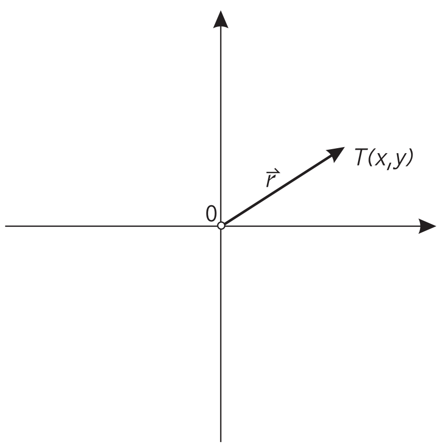
Matrika

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

je 2×1 matrika s členoma x in y. Taki matriki bomo rekli tudi matrični stolpec.

Linearne preslikave ravnine

Naj bo ravnina $\mathcal{R}$ opremljena s pravokotnim koordinatnim sistemom. Potem vsaki točki T v ravnini pripada urejen par koordinat (x,y). V okviru tega sestavka bomo namesto običajnega zapisa (x,y) koordinati točke T vedno pisali v matričnem stolpcu $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Vektor $\vec{r}$ z začetno točko v izhodišču koordinatnega sistema in končno točko T imenujemo krajevni vektor točke T. Koordinati tega vektorja sta $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (glej sliko 1).



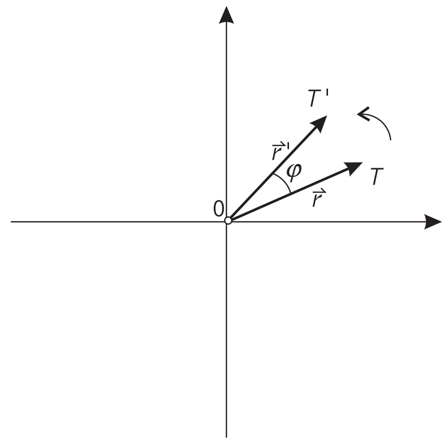
Slika 1.

Najprej obravnavajmo rotacijo ravnine za kot φ okoli koordinatnega izhodišča. Pri tej rotaciji se točka T s koordinatama $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ transformira v točko T' s koordinatama $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$. Ponavadi si ravnino predstavljamo kot množico točk. Mi pa jo raje obravnavajmo kot množico ustreznih krajevnih vektorjev. Potem je rotacija ravnine za kot φ okoli koordinatnega izhodišča transformacija, ki vsak krajevni vektor zasuka za kot φ (slika 2).

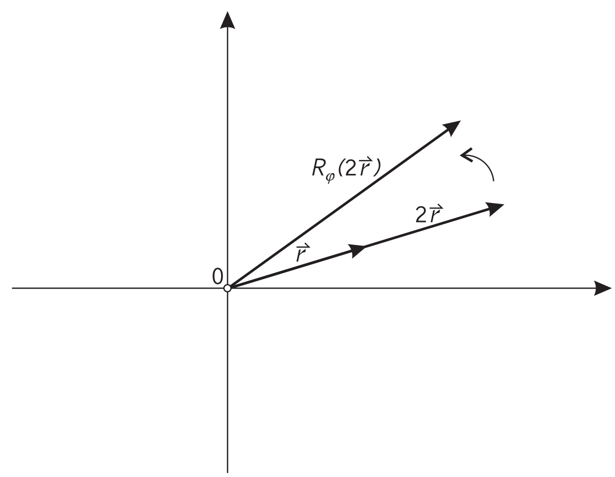
Označimo to rotacijo z R_φ. Potem pišemo $R_\varphi \vec{r} = \vec{r}\,'$ ali $R_\varphi \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$. Vektor $\vec{r}$ najprej podaljšamo s faktorjem 2 in ga potem zavrtimo za kot φ (slika 3).

Dobimo enak rezultat kot v primeru, ko vektor $\vec{r}$ najprej zavrtimo za kot φ in ga potem podaljšamo s faktorjem 2 (slika 4).

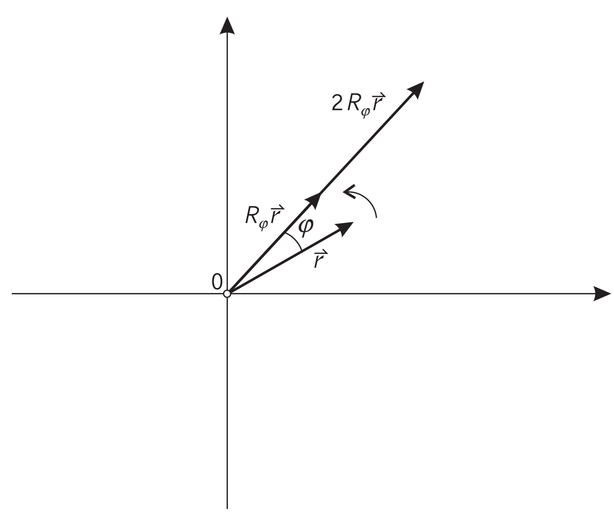
V prvem primeru smo najprej vektor $\vec{r}$ transformirali v vektor $2\vec{r}$ in potem po zasuku dobili vektor $R_\varphi(2\vec{r})$.



Slika 2.



Slika 3.



Slika 4.

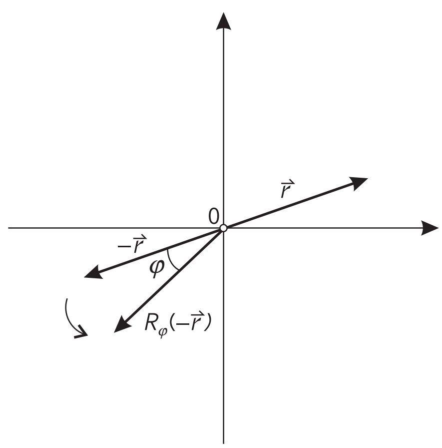
V drugem primeru pa smo v prvem koraku prišli do vektorja $R_\varphi \vec{r}$ in tega potem podaljšali do vektorja $2R_\varphi \vec{r}$. Ker smo obakrat dobili isto, velja

$$R_\varphi(2\vec{r}) = 2R_\varphi \vec{r}.$$

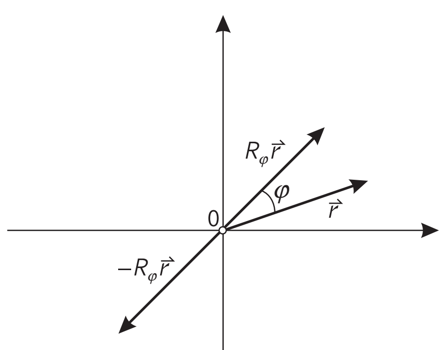
Namesto s skalarjem 2 bi lahko vektor pomnožili s katerimkoli pozitivnim skalarjem t in z enakim razmislekom ugotovili, da velja

$$R_\varphi(t\vec{r}) = t(R_\varphi \vec{r}). \tag{1}$$

Vektor $\vec{r}$ najprej nadomestimo z nasprotnim vektorjem in potem tega zavrtimo za kot φ (slika 5).



Slika 5.



Slika 6.

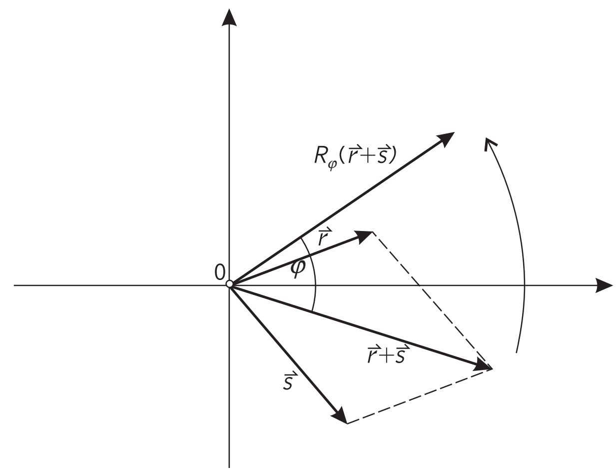
Dobimo enak rezultat kot v primeru, ko vektor $\vec{r}$ najprej zavrtimo za kot φ in potem dobljeni vektor nadomestimo z nasprotnim vektorjem (slika 6).

Zato velja

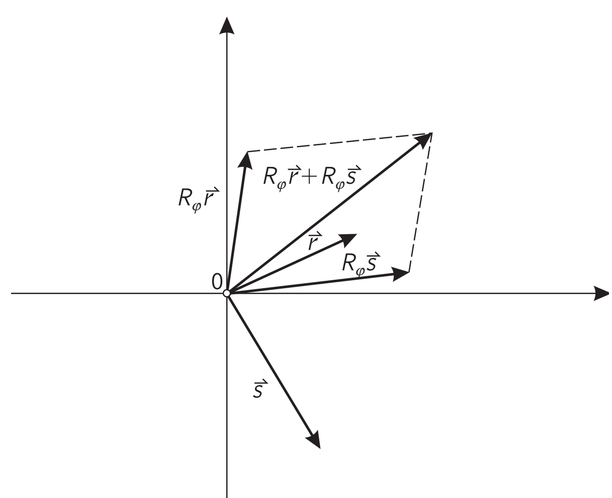
$$R_\varphi(-\vec{r}) = -R_\varphi \vec{r}$$

za vsak vektor $\vec{r}$. Za vsak vektor $\vec{r}$ pa je res tudi $R_\varphi(0\vec{r}) = \vec{0} = 0R_\varphi \vec{r}$. S tem smo dognali, da formula (1) velja za vsako realno število t in vsak vektor $\vec{r}$.

V naslednjem koraku pa premislimo, kako rotacija deluje na vsoto vektorjev $\vec{r} + \vec{s}$. Vektorja $\vec{r}$ in $\vec{s}$ najprej seštejemo in potem njuno vsoto zavrtimo okoli izhodišča za kot φ (slika 7).



Slika 7.



Slika 8.

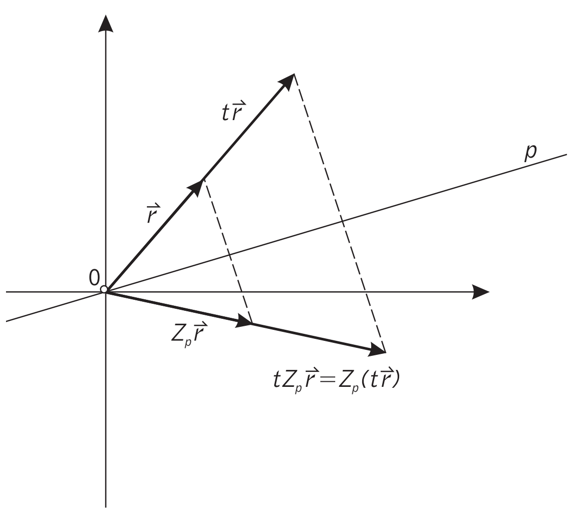
Dobimo enak rezultat kot v primeru, ko najprej zavrtimo vektorja $\vec{r}$ in $\vec{s}$ in potem zavrtena vektorja seštejemo (slika 8).

Ugotovili smo, da za poljubna vektorja $\vec{r}$ in $\vec{s}$ velja $R_\varphi(\vec{r}+\vec{s}) = R_\varphi\vec{r} + R_\varphi\vec{s}$.

Transformacijo $A : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ imenujemo linearna preslikava, če za vsako realno število t in vsak par vektorjev $\vec{r}$ in $\vec{s}$ velja

- $A(t\vec{r}) = t(A\vec{r})$ in
- $A(\vec{r}+\vec{s}) = A\vec{r} + A\vec{s}$

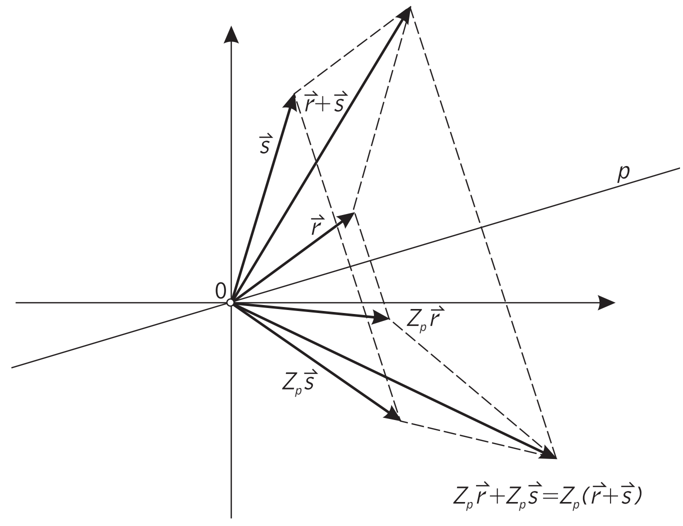
Pravkar smo ugotovili, da je rotacija za kot φ okoli izhodišča linearna preslikava. Naj bo dana premica p, ki poteka skozi izhodišče koordinatnega sistema. Označimo z Z_p transformacijo ravnine, ki vsako točko prezrcali preko premice p. Slika 9 in slika 10 nas prepričata, da je tudi $Z_p : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ linearna preslikava.



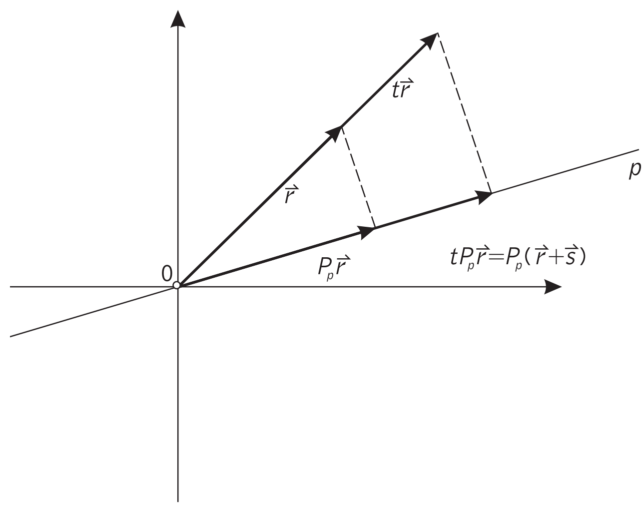
Slika 9.

In končno naj bo $P_p : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ transformacija, ki vsako točko ravnine pravokotno projicira na premico p. Tudi to je linearna transformacija ravnine (slika 11 in slika 12).

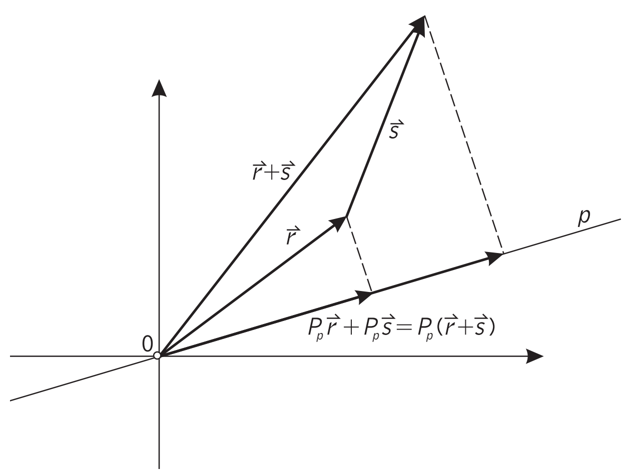
Peter Šemrl



Slika 10.



Slika 11.



Slika 12.