PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **7** (1979/1980)
Številka 2
Strani 73–76

Danijel Bezek:

O OBSEGU IN PLOŠČINI

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/7/428-Bezek.pdf

MATEMATIKA

O OBSEGU IN PLOŠČINI

Poznavanje števil in prostorskih povezav je imelo v najstarejših civilizacijah praktičen pomen.

Geometrijski problemi, kot sta npr. računanje obsega in ploščine, so bili povezani z merjenjem kot praktično dejavnostjo. Če sežemo v zgodovino nazaj, vidimo po pisanih virih, da ljudem, kjub praktičnemu ravnanju in merjenju, dolgo ni bilo jasno, v kakšnem medsebojnem odnosu sta si obseg in ploščina.

1. primer: Grški zgodovinar Tukidid (460 - 396 pr.n.št.) je v Zgodovini peloponeških vojn zapisal: Za jadranje okoli dvakrat večjega otoka porabimo dvakrat daljši čas.

Tukididova ocenitev, da sta si obseg in ploščina premosorazmerna, je bila bolj posledica njegovega prepričanja, kot pa rezultat praktičnega poskusa ali matematičnega premisleka.

Sl. 1

Problem odnosa med obsegom in ploščino lahko nekoliko raziščemo s poenostavljenim matematičnim primerom, kjer je otok predstavljen s pravokotnikom, ostali liki pa predstavljajo ploščinsko dvakrat večji otok (sl. 1).

Ali je obseg pri teh likih tudi dvakrat večji? Razmisli!

<u>2. primer</u>: Polibij (okoli 200 do okoli 120 pr.n.št.) je nekje zapisal: še vedno so ljudje, ki ne morejo razumeti, da ima prostor, odmerjen za vojaški tabor, pri istem obsegu več ali manj prostora za šotore.

Sl. 2

Pri razmišljanju si lahko pomagamo s poenostavljenim poskusom (sl. 2). Sklenjeno nitko ali vrvico napnemo okoli bucik ali žebljičkov, ki predstavljajo oglišča trikotnikov. Dveh oglišč ne premikamo, s tretjim pa oblikujemo najrazličnejše trikotnike z istim obsegom.

Vsakič ugotovi ploščino nastalega trikotnika in jih primerjaj med seboj!

Poskušaj narediti kakšen zaključek!

<u>Opomba</u>: Kako se je iskanje odnosa med ploščino in obsegom ravninskih likov v zgodovini nadaljevalo, si lahko bralec poišče v knjigi Ivana Vidava: *Rešeni in nerešeni problemi matematike* v poglavju *Izoperimetrični problemi*.

3. primer: Narava rešuje problem odnosa med ploščino in obsegom na začudenja vreden način. Poglejmo v čebelji panj. Celice v satovju so pravilni šestkotniki. Domnevamo, da je vprašanje povezano z ekonomičnostjo. To pomeni, da je pri čim manjši porabi voska (iz tega so narejena stene celic), dosežen največji izkoristek prostora, ki je namenjen za skladiščenje medu.

Ali imajo čebele v svoji nagonski izbiri prav? Poglejmo si njihovo gradbeništvo v jeziku matematike.

Trditev: Od vseh pravilnih mnogokotnikov, s katerimi se da pokriti ravnino, tako da ni medprostorov, ima pravilni šestkotnik pri istem obsegu največjo ploščino.

Dokaz: a) Ravnino lahko na predpisani način, tako da ni medprostorov, pokrijemo z enakostraničnimi trikotniki, kvadrati in pravilnimi šestkotniki (sl. 3).

Sl. 3: a) b) c)

Z drugimi mnogokotniki ravnine ni mogoče prekriti. Razmišljamo pa takole: Vsota notranjih kotov m pravilnih n-kotnikov, ki se stikajo v skupnem oglišču, je 360^0.

$$m(180^0(n - 2)/n) = 360^0 \quad \text{ali tudi}$$

$$m = 2n/(n - 2) \tag{1}$$

Če enačbo za m iz (1) preoblikujemo, dobimo:

$$(n - 2)(m - 2) = 4 \tag{2}$$

Število 4 lahko na tri načine zapišemo kot produkt dveh naravnih števil: $4 \cdot 1$, $1 \cdot 4$ in $2 \cdot 2$.

Tako dobimo za n tri rešitve, ki nam povedo možne mnogokotnike, s katerimi se da pokriti ravnino. Iz enačbe $(n - 2) = 4$ dobimo prvo rešitev $n_1 = 6$; iz enačbe $(n - 2) = 1$ dobimo drugo rešitev $n_2 = 3$ in iz enačbe $(n - 2) = 2$ dobimo tretjo rešitev $n_3 = 4$.

b) Dokazati je treba, da ima pri istem obsegu (oznaka L) pravilni šestkotnik od možnih mnogokotnikov največjo ploščino.

	Enakostranični trikotnik	Kvadrat	Pravilni šestkotnik
Obrazec za ploščino, če je stranica a	$a^2 \sqrt{3} / 4$	a^2	$3a^2\sqrt{3} / 2$
Dolžina stranice pri danem obsegu L	$L/3$	$L/4$	$L/6$
Z obsegom izražena ploščina	$L^2 . \sqrt{3}/36$ $L^2 . 0{,}0481$	$L^2/16$ $L^2 . 0{,}0625$	$L^2 . \sqrt{3}/24$ $L^2 . 0{,}0722$

Naloga: Nariši enakostranični trikotnik, kvadrat in pravilni šestkotnik, če je obseg vsakega od njih 20 cm. Postavi jih tako, da je središče očrtanih krogov za vse mnogokotnike isto.

Danijel Bezek