PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **7** (1979/1980)
Številka 4
Strani 214–223

Roman Rojko:

TRIKOTNA ŠTEVILA

Ključne besede: matematika, teorija števil, trikotna števila.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/7/444-Rojko.pdf

TRIKOTNA ŠTEVILA

(Predavanje na 17. seminarju DMFA SRS 1980 - Zanimiva matematika)

1. MNOGOKOTNA ŠTEVILA

Vzemimo aritmetična zaporedja s prvim členom 1 in razlikami 1, 2, 3, ... :

	začetek zaporedja	splošni člen	razlika
(1)	1, 2, 3, 4, 5, 6,...	n	1
(2)	1, 3, 5, 7, 9,11,...	$2n-1$	2
(3)	1, 4, 7,10,13,16,...	$3n-2$	3
(4)	1, 5, 9,13,17,21,...	$4n-3$	4

in tako naprej.

Definicija:

n-to delno vsoto $p(n,r+2)$ r-tega zaporedja imenujemo $r+2$ -kotno število.

Tako smo dobili:

(1) *trikotna* števila

1, 3, 6, 10, 15, 21, ... $p(n,3) = t_n = n(n+1)/2$

(2) *štirikotna* (*kvadratna*) števila

1, 4, 9, 16, 25, 36, ... $p(n,4) = k_n = n^2$

(3) *petkotna* števila

1, 5, 12, 22, 35, 51,... $p(n,5) = n(3n-1)/2$

in tako naprej.

Spomnimo se obrazca $n(2a_1+r(n-1))/2$ za vsoto prvih n členov aritmetičnega zaporedja s splošnim členom $a_n = a_1+r(n-1)$.

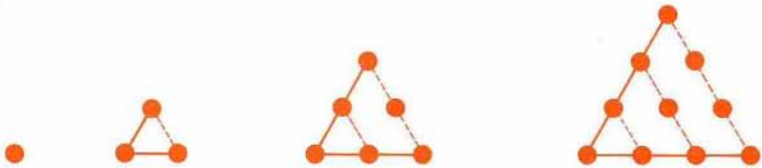
Uporabimo to na zgornjih zaporedjih in dobimo splošno formulo za mnogokotna števila:

$$p(n,r) = n(2 + (n-1)(r-2))/2$$

Tako so $p(n,3) = t_n$ trikotna števila, $p(n,4) = k_n$ so kvadratna (štirikotna) števila in tako naprej.

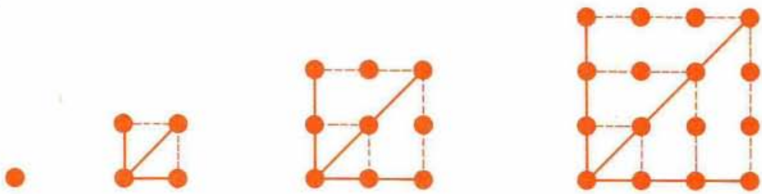
Pojasnimo še izvor imena mnogokotnih števil. Do njih lahko nam reč pridemo tudi geometrijsko:

(1)



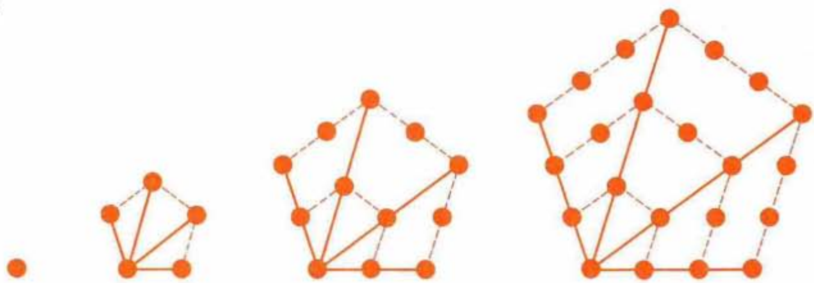
$1 = 1$ $3 = 1+2$ $6 = 1+2+3$ $10 = 1+2+3+4$

(2)



$1 = 1$ $4 = 1+3$ $9 = 1+3+5$ $16 = 1+3+5+7$

(3)



$1 = 1$ $5 = 1+4$ $12 = 1+4+7$ $22 = 1+4+7+10$

in tako naprej.

Naloga 1 : Preizkusi definicijo še na šestkotnih številih.

2. TRIKOTNA ŠTEVILA

Trikotna števila smo definirali s $t_n = \frac{1}{2}\, n\,(n+1)$.

Spomnimo se, kako je definiran Pascalov trikotnik: sestavljen je iz naravnih števil; na krakih ležijo enice, vse ostale vrednosti pa so enake vsoti dveh nad njo ležečih vrednosti.

Oglejmo si, kako ležijo trikotna števila v Pascalovem trikotniku:

```
                 enojke                1
          naravna števila           1     1
       trikotna števila          1     2     1
                              1     3     3     1
                           1     4     6     4     1
                        1     5    10    10     5     1
                     1     6    15    20    15     6     1
                  1     7    21    35    35    21     7     1
```

in tako naprej.

Še na en način lahko definiramo trikotna števila, namreč z *rekurzivno enačbo:*

$$t_n = n + t_{n-1} \quad ; \quad t_1 = 1$$

Naloga 2 : Kako bi definirali tetraedrska in kubna števila?

Oglejmo si nekaj zanimivosti med trikotnimi števili:

$t_3 = 6, \quad t_{33} = 561, \quad t_{333} = 55611$

splošno: $\underbrace{t_{33333}}_{n} = \underbrace{5555}_{n-1}\,6\,\underbrace{1111}_{n-1}$

$t_6 = 21, \quad t_{66} = 2211, \quad t_{666} = 222111$

splošno: $\underbrace{t_{66666}}_{n} = \underbrace{22222}_{n}\,\underbrace{11111}_{n}$

$t_9 = 45, \quad t_{99} = 4950, \quad t_{999} = 499500$

splošno: $\underbrace{t_{99999}}_{n} = 4\,\underbrace{9999}_{n-1}\,5\,\underbrace{0000}_{n-1}$

$$t_{69} = 2415, \quad t_{669} = 224115$$

$$\text{splošno:} \quad t_{\underbrace{666}_{n}9} = \underbrace{222}_{n}4\underbrace{111}_{n}5$$

$$t_{10} = 55, \; t_{100} = 5050, \quad t_{1000} = 500500$$

$$\text{splošno:} \quad t_{1\underbrace{000}_{n}} = 5\underbrace{00}_{n-1}5\underbrace{00}_{n-1}$$

$$t_{101} = 5151, \quad t_{1001} = 501501$$

$$\text{splošno:} \quad t_{1\underbrace{00}_{n}1} = 5\underbrace{00}_{n-1}15\underbrace{00}_{n-1}1$$

$$t_{12} = 78, \; t_{132} = 8778, \quad t_{1332} = 887778$$

$$\text{splošno:} \quad t_{1\underbrace{333}_{n}2} = \underbrace{888}_{n}\underbrace{7777}_{n+1}8$$

Če bi bili vztrajni, bi našli še kaj takega.

3. KVADRATNA TRIKOTNA ŠTEVILA

Med trikotnimi števili so tudi taka, ki so hkrati kvadratna. Za taka števila seveda velja zveza $t_n = k_m$ oziroma enačba $n(n+1) = 2m^2$. Prvo kvadratno trikotno število dobimo takoj; za $m = n = 1$ namreč dobimo $t_1 = k_1 = 1$. Naštejmo jih še nekaj:

$$t_8 = 6^2, \quad t_{49} = 35^2, \quad t_{288} = 204^2, \quad t_{1681} = 1189^2, \; \ldots$$

Sedaj pa se bomo potrudili do splošne formule za računanje kvadratnih trikotnih števil.

Trditev 1.
Če za dvoje naravnih števil u in v velja $t_u = v^2$, tedaj velja tudi $t_{3u+4v+1} = (2u+3v+1)^2$.

Dokaz:

$$\begin{aligned} t_{3u+4v+1} &= (3u+4v+1)(3u+4v+2)/2 \\ &= (9u^2+16v^2+24uv+9u+12v+2)/2 \\ &= 9u(u+1)/2 + 8v^2 + 6v(2u+1) + 1 \end{aligned}$$

upoštevamo: $u(u+1)/2 = t_u = v^2$, $9t_u = 9v^2 = v^2 + 8v^2 =$
$= v^2 + 8t_u = v^2 + 4u(u+1)$,

$$t_{3u+4v+1} = v^2 + 4u(u+1) + 8v^2 + 6v(2u+1) + 1$$
$$= 9v^2 + (2u+1)^2 + 6v(2u+1) = (2u + 3v + 1)^2$$

Če še enkrat pogledamo trditev 1, opazimo, da ta trditev dolo̲ča neko zaporedje števil, ki so hkrati kvadratna in trikotna. Začnemo seveda z $u = 1$, kar pomeni $v = 1$, naprej imamo $t_{3u+4v+1} = t_8 = 36 = k_6$. Dobili smo nova u in v, namreč 8 in 6. Sedaj mirno nadaljujemo postopek, dokler se ne naveličamo.

Naloga 3 : Izračunaj prvih 8 parov u in v iz zaporedja v trdit̲vi 1.

Dokažimo sedaj še eno trditev!

Trditev 2.
Zaporedje t_u, $t_{3u+4v+1}$, ... iz trditve 1 vsebuje vsa kvadratna trikotna števila.

Dokaz:
Recimo, da obstaja kvadratno število izven zgornjega zaporedja. Naj bo $t_u = v^2$ najmanjše tako število. Ker je t_1 že element zaporedja, mora biti $u > 1$. Dokazali bomo, da sta števili $x = 3u-4v+1$ in $y = 3v-2u-1$ pozitivni in velja $x < u$ in $t_x = y^2$.

$t_u = v^2$, $u(u+1) = 2v^2$, $u^2 < 2v^2$, $u < v\sqrt{2}$, $2u < 2\sqrt{2}\ v < 3v$
$v > 1$, $3v = 4v-v < 4v-1$, $2u < 4v-1$, $2u-(4v-1) < 0$, torej
$x = 3u-4v+1 = u+2u-(4v-1) < u$, dokazali smo $x < u$.

Vzemimo $x \leqq 0$, $v = \sqrt{u(u+1)/2}$, $x = 3u - 4\sqrt{u(u+1)/2} + 1$,
$x \leqq 0$, $3u+1 \leqq 4\sqrt{u(u+1)/2}$, $9u^2 + 6u + 1 \leqq 8u^2 + 8u$, poenostavimo, $u^2 - 2u + 1 \leqq 0$, $(u-1)^2 \leqq 0$, to da $u = 1$; to je v protislovju s predpostavko $u > 1$. Od tod sklep: $x > 0$.

Vzemimo $y \leqq 0$, $y = 3\sqrt{u(u+1)/2} - 2u - 1 \leqq 0$, podobno,
$9u(u+1) \leqq 2(2u+1)^2$, $u^2+u \leqq 2$; to je v protislovju z $u > 1$, zato velja $y > 0$.

$$t_x = t_{3u-4v+1} = (3u-4v+1)(3u-4v+2)/2$$
$$= 9(u^2+u)/2 - 12uv + 8v^2 - 6v + 1$$

upoštevamo: $t_u = v^2$, $9(u^2+u)/2 = 9t_u = v^2 + 4u(u+1)$,
pa dobimo $t_x = 9v^2 + 4u^2 + 4u - 12uv - 6v + 1$
$= (3v - 2u - 1)^2 = y^2$, dokaz je končan.

Lastnost $x < u$ zatrjuje, da t_u ni najmanjše trikotno kvadratno število izven zgornjega zaporedja. S tem protislovjem je trditev 2 dokazana.

Mislimo si kvadratna trikotna števila razvrščena v naraščajočem zaporedju. Naj bo n-to število v tem zaporedju hkrati x_n-to trikotno število t_{x_n} in y_n-to kvadratno število k_{y_n} :

$$t_{x_n} = x_n(x_n + 1)/2 = y_n^2 = k_{y_n}$$

Iz obeh trditev vidimo:

$$x_1 = 1 \qquad y_1 = 1$$

$$x_{n+1} = 3x_n + 4y_n + 1 \;; \quad y_{n+1} = 2x_n + 3y_n + 1$$

Obrazca za x_n in y_n nam dajeta naslednji izrek

Izrek.
Kvadratna trikotna števila so zbrana v zaporedju, ki ga določajo formule:

$$x_n = \frac{1}{4}\left((\sqrt{2} + 1)^n - (\sqrt{2} - 1)^n\right)^2$$

$$y_n = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left((3 + 2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n\right) \qquad t_{x_n} = y_n^2$$

Dokaz:
Uporabili bomo *popolno indukcijo*. Za $n = 1$ izrek gotovo velja, saj imamo tedaj $t_1 = 1^2$. Dokazati moramo še, da velja izrek za $n+1$, če velja za n .

$$x_{n+1} = 3x_n + 4y_n + 1 \,, \quad 4x_{n+1} = 3((\sqrt{2} + 1)^n - (\sqrt{2} - 1)^n)^2 +$$
$$+ 2\sqrt{2}\,((\sqrt{2} + 1)^{2n} - (\sqrt{2} - 1)^{2n}) + 4$$

upoštevali smo: $(\sqrt{2} + 1)^2 = 3 + 2\sqrt{2}$, $(\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$;

upoštevali pa bomo še: $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 1$ (na poljubno potenco). Po krajšem računu dobimo:

$$x_{n+1} = \frac{1}{4}\left((\sqrt{2} + 1)^{n+1} - (\sqrt{2} - 1)^{n+1}\right)^2;$$ nato izračunamo

$$x_{n+1} + 1 = \frac{1}{4}\left((\sqrt{2} + 1)^{n+1} + (\sqrt{2} - 1)^{n+1}\right)^2,$$ upoštevamo osnovno enačbo: $y^2_{n+1} = t_{x_{n+1}} = x_{n+1}(x_{n+1} + 1)/2 =$

$$= \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}(3 + 2\sqrt{2})^{n+1} - \frac{1}{4\sqrt{2}}(3 - 2\sqrt{2})^{n+1}\right)^2 .$$

Tako smo izrek dokazali. Zanimivost teh formul je med drugim tudi v tem, da so števila x_n in y_n zmeraj naravna, čeprav nastopajo v izrazih ulomki in koreni.

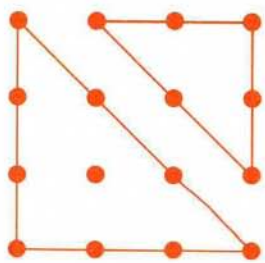
Naloga 4 : Izračunaj nekaj vrednosti x_n in y_n in jih primerjaj z vrednostmi iz naloge 3.

Naloga 5 : Dokaži, da sta števili 48024900 in 1631432881 trikotna kvadrata.

Omenimo še, da so pri sodem n števila $x_n/2$ in x_n+1 kvadrati, pri lihem n pa so x_n in $(x_n+1)/2$ kvadrati.

4. RELACIJE MED TRIKOTNIMI ŠTEVILI

1) *Nikomahova identiteta:*

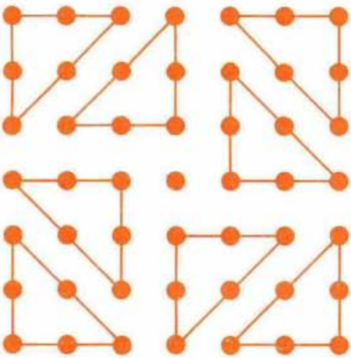


dve zaporedni trikotni števili sestavljata kvadrat:

$$t_n + t_{n+1} = (n + 1)^2$$

O tem se zlahka prepričamo tudi algebrajsko. Primer: $t_3 + t_4 = 4^2$

2) *Plutarhova identiteta*



$$8t_n + 1 = (2n + 1)^2$$

Primer:

$$8t_3 + 1 = 7^2$$

Naloga 6 : S pomočjo definicije za trikotna števila dokaži Nikomahovo in Plutarhovo identiteto.

3) *Posplošitve Nikomahove identitete:*

zahtevajo samo malo več dela. Pokažimo samo začetek:

vzamemo enačbi $t_n+t_{n+1} = (n+1)^2$ in $t_{n+1}+t_{n+2} = (n+2)^2$,

$t_n+2t_{n+1}+t_{n+2} = n^2+2n+1+n^2+4n+4 = 2(n+1)(n+2)+1 = 4t_{n+1}+1$

$t_n+t_{n+2} = 4t_{n+1}-2t_{n+1}+1 = 2t_{n+1} + 1$

Naprej ne bomo računali. Zapišimo samo rezultat:

$$t_n + t_{n+2k-1} = (n + k)^2 + 2t_{k-1}$$

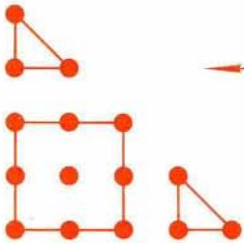
$$t_n + t_{n+2k} = 2t_{n+k} + k^2$$

če v teh enačbah vstavimo $n = 0$, dobimo znano lastnost:

$$t_{2k-1} = k^2 + 2t_{k-1}$$

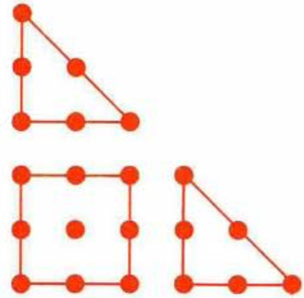
$$t_{2k} = k^2 + 2t_k$$

Vsako trikotno število se da torej izraziti kot vsota kvadrata in dvakratnika nekega trikotnega števila. Slika bo to še lepše pokazala:



$$t_5 = 3^2 + 2t_2$$

$$t_6 = 3^2 + 2t_3$$

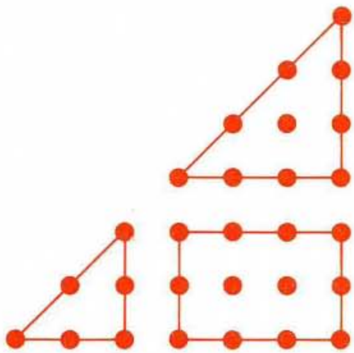


Če vzamemo v Nikomahovi identiteti bolj splošne člene, dobimo pravokotniško obliko teh enačb:

$$t_{n+k} = nk + t_n + t_k$$

Pokažimo to na sliki:

$$t_{3+4} = t_7 = 12 + t_3 + t_4$$



Leta 1836 je Casinelli izpeljal identiteti:

$$t_{n+k+1} = t_n + t_k + (n+1)(k+1)$$
$$t_{n-k} = t_n + t_k - k(n+1)$$

4) *Identitete z obliko* $t_a + t_b = t_c$

Sierpinski je pokazal, da obstaja neskončno mnogo parov trikotnih števil, ki imajo trikotno vsoto. Dokaz je prav preprost. V enačbo $t_k = k + t_{k-1}$ vstavimo t_n namesto indeksa k, pa dobimo:

$$t_{t_n-1} + t_n = t_{t_n}$$

5. PALINDROMNA TRIKOTNA ŠTEVILA

Palindromna števila so taka, da se naprej berejo enako kot nazaj. Med prvimi 151340 trikotnimi števili je 27 palindromnih. Leta 1973 jih je v reviji Journal of the Recreational Mathematics razkazal Trigg. Skoraj zanesljivo jih je dobil z računalnikovo pomočjo. Oglejmo si jih še mi!

n	t_n	n	t_n	n	t_n
1	1	109	5995	3185	5073705
2	3	132	8778	3369	5676765
3	6	173	15051	3548	6295926
10	55	363	66066	8382	35133153
11	66	1111	617716	11088	61477416
18	171	1287	828828	18906	178727871
34	595	1593	1269621	57166	1634004361
36	666	1833	1680861	102849	5289009825
77	3003	2662	3544453	111111	6172882716

Števila t_{109}, t_{1111}, t_{2662} in t_{57166} imajo enako številsko vsoto, namreč 28. Trem številom pripada lastnost, da imajo enaka mesta: 55, 66, 666. Edini dvojni palindrom je 828828. Tri števila so palindromi z vrhom (mesta monotono naraščajo do nekega mesta, nato monotono padajo): 171, 595, 1269621. Tri števila so valovita (zaporedni mesti sta večji in manjši od sosednjih): 15051, 5073705, 6295926.

Števila t_1, t_2, t_{10}, t_{18}, t_{34}, t_{109}, t_{8382} imajo sama liha mesta. Števila t_3, t_{11}, t_{36}, t_{363}, t_{1287} imajo sama soda mesta. Pri številih t_{132}, t_{3369} in t_{2662} so različna sosednja mesta tudi sosednja naravna števila.

Roman Rojko

REŠITVE NALOG

TRIKOTNA ŠTEVILA - rešitve nalog s str. 214

1) Aritmetično zaporedje, iz katerega dobimo šestkotna števila, je že napisano v točki (4) v uvodu članka. Števila $p(n,6)$ so definirana takole:

$$p(n,6) = n(4n - 2)/2$$

zaporedje šestkotnih števil pa se začne z

$$1,\ 6,\ 15,\ 28,\ 45,\ 66,\ 91,\ 120,\ \ldots$$

2) Tetraedrsko število dobimo tako, da seštejemo prvih nekaj trikotnih števil. Predstavljajmo si srednjeveške topovske krogle zložene v tristrano piramido. V njej je ravno za tetraedrsko število krogel. Oglejmo si nekaj teh števil:

$$1,\quad 4 = 1 + 3,\quad 10 = 1 + 3 + 6$$
$$20 = 1 + 3 + 6 + 10,\quad 35 = 1 + 3 + 6 + 10 + 15$$

n-to kubno število pa dobimo tako, da n-to kvadratno število n-krat seštejemo. Tako je n^3 splošen obrazec za kubna števila.

3), 4) in 5)

u	1	8	49	288	1681	9800	57121	332928	x_n
v	1	6	35	204	1189	6930	40391	235416	y_n

6) $t_n = n(n+1)/2\ ,\quad t_{n+1} = (n+1)(n+2)/2$

$$t_n + t_{n+1} = (n^2 + n + n^2 + 3n + 2)/2 = (2n^2 + 4n + 2)/2 = $$
$$= n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

$$8t_n + 1 = 4n(n+1) + 1$$
$$= 4n^2 + 4n + 1$$
$$= (2n + 1)^2$$

Roman Rojko