



## Naloge bralcu

1. Ročno koreni:

(a)  $\sqrt{2989441}$

(b)  $\sqrt{9,8596}$

(c)  $\sqrt[8]{5764801}$

2. Poišči prvih 5 decimalnih mest  $\sqrt{2}$ .

3. Dana števila zapiši v običajnem desetiškem stavu.

(a)  $\overline{1(23)4(56)7(89)}$

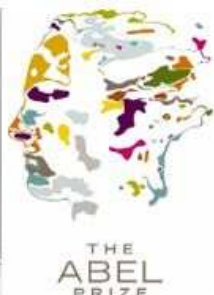
(b)  $\overline{(123)(45)(6789)}$

(c)  $\overline{(12)345(67)89}$

## Literatura

- [1] »Ručno« izračunavanje kvadratnog korena, dostopno na <http://forum.matemacija.com/viewtopic.php?f=46&t=317>, ogled 19. 5. 2023.
- [2] *Methods of computing square roots*, dostopno na [https://en.wikipedia.org/wiki/Methods\\_of\\_computing\\_square\\_roots](https://en.wikipedia.org/wiki/Methods_of_computing_square_roots), ogled 19. 5. 2023.
- [3] F. Močnik, *Aritmetika za učiteljska*, Kleinmayr & Bamberg, Ljubljana, 1885.

× × ×



$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

SLIKA K MATEMATIČNEMU TRENUTKU.

× × ×

# EDMO 2023

↓↓↓

ANA META DOLINAR IN LUKA HORJAK

→ V Portorožu je od 13. do 19. aprila 2023 potekala 12. Evropska dekliška matematična olimpijada (EDMO). Na tekmovanju je sodelovalo 213 tekmovalk iz 54 držav (do 4 najboljša srednješolska dekleta iz vsake države). Vključno z vodji ekip, koordinatorji (ocenjevalci), prostovoljci, organizatorji ipd. je bilo udeležencev dogodka 504. To je bil največji tovrstni dogodek v Sloveniji od leta 2006 naprej, ko smo v naši državi gostili Mednarodno matematično olimpijado.

## Organizacija, potek

Evropska dekliška matematična olimpijada (EDMO) je namenjena spodbudi deklet k pripravi in udeležbi na matematičnih tekmovanjih, saj je razmerje spolov na drugih tekmovanjih zelo neuravnoteženo – deklet je na olimpijadah, kot je Mednarodna matematična olimpijada, le okoli 10 %. EDMO dekletom da motivacijo za pripravo na tekmovanja na višji ravni ter služi kot dogodek, kjer si lahko dokažejo, da so sposobne reševanja olimpijskih nalog. Poleg tega olimpijada tudi pripomore k ustvarjanju prijateljstev med dekleti s podobnimi interesi, kar dekletom, ki na svoji šoli med ljubitelji matematike morda vidijo le fante, pokaže, da niso edine s tem hobijem. Poleg tega pa lahko na EDMO dekleta spoznajo tudi uspešne matematičarke, ki jim lahko služijo kot vzornice.

Slovenija na EDMO sodeluje vsako leto od leta 2013. V teh letih je Slovenijo zastopalo 28 deklet, nekatera celo trikrat ali štirikrat.

Letos je EDMO organizirala Slovenija pod okriljem DMFA Slovenije.

Dogodek je bil organiziran v Portorožu, podprli pa so ga tudi predsednica RS dr. Nataše Pirc Musar, Ministrstvo za vzgojo in izobraževanje, Ministrstvo za delo, družino, socialne zadeve in enake možnosti, ter univerze – Univerza na Primorskem, Univerza v Ljubljani in Univerza v Mariboru.

V organizacijskem odboru tekmovanja pod vodstvom Lucijane Kračun Berc so bili Gregor Dolinar, Klavdija Kutnar, Ana Meta Dolinar, Ciril Dominko, Tanja Labus, Sanja Sandič, Doris Keršič, Sandra Cigula, Mateja Grašič in Špela Kumer.

Za izvedbo tekmovalnega dela so poskrbeli Klemen Šivic (predsednik komisije za izbor nalog), Luka Horjak (vodja koordinacije), Brigita Mastnak (glavna nadzornica) ter Ana Meta Dolinar (predsednica žirije).

Eden izmed dogodkov v okviru tekmovanja je bila tudi okrogla miza – Uspešne ženske, pri kateri so svoje izkušnje predstavile prof. dr. Nežka Mramor Kosta, matematičarka na Univerzi v Ljubljani, prof. dr. Dunja Mladenčič, vodja Odseka za umetno inteligenco na Institutu Jožefa Stefana, Rosana Kolar, letalska mehaničarka v Adria Tehniki, in prof. dr. Maryna Viazovska, prejemnica Fieldsove medalje 2022. Tekmovalke so v govorkah gotovo lahko našle vzor in navdih.

Za vodje ekip je bila organizirana tudi delavnica Enakost, raznolikost, vključenost. Na njej so mentorji iz različnih držav, kultur, ozadij ter ver na podlagi primerov iz resničnega sveta razpravljali, kako se spopasti z delikatnimi situacijami ter kako zagotoviti, da bo okolje matematičnih tekmovanj prijazno do vseh.



SLIKA 1.

Skupinska slika tekmovalk na otvoritveni slovesnosti

Po tekmovanju so se dekleta udeležila različnih prostočasnih aktivnostih, od plesa in odbojke do ustvarjalnih in glasbenih delavnic. Na ekskurzijah v Ljubljano in Postojnsko jamo so spoznala slovenske turistične znamenitosti, veliko pa je bilo tudi priložnosti za druženje s tekmovalkami iz drugih držav.

## Tekmovanje, dosežki slovenskih tekmovalk in rezultati

Kot država gostiteljica je Slovenija lahko poslala dve ekipi, torej 8 tekmovalk. Slovenijo so zastopale Katarina Grilj s SŠ Slovenska Bistrica, Kaja Rajter z II. gimnazije Maribor, Nives Gošnjak in Ema Hojan s ŠC Velenje, Gimnazija, Patricia Király, Zara Barbarić in Neca Camlek z Gimnazije Bežigrad ter Ekaterina Chizhova z Osnovne šole Trnovo, Ljubljana.

Ekipo so spremljali Jaka Vrhovnik, Lana Prijon in Jan Pantner.

Tekmovanje poteka v obliki individualnega reševanja nalog z različnih področij matematike – algebra, geometrija, kombinatorika in teorija števil. Tekmovalke dva zaporedna dni po 4 ure in pol rešujejo po tri naloge na dan, skupno 6 nalog, vsaka ocenjena z do 7 točkami. Tako je najvišje možno število doseženih točk 42.

Ocenjevanje nalog se izvede prek procesa koordinacije, kjer koordinatori (neodvisni strokovnjaki, ki jih izberejo organizatorji) z vodji ekip vsake države uskladijo število točk, ki so jih tekmovalke dosegle na posamezni nalogi.



SLIKA 2.

Tekmovalke pred začetkom tekmovanja



Ekipno je med evropskimi državami zmagala Ukrajina, absolutno pa Kitajska. 14 tekmovalk je doseglo vse točke in za popoln rezultat prejelo posebno nagrado. Skupno se je podelilo 119 medalj (26 zlatih, 36 srebrnih in 57 bronastih) ter 42 pohval.

Slovenske tekmovalke so se na tekmovanju izvrstno odrezale. Katarina Grilj je prejela srebrno medaljo in s 47. mestom (32. med Evropejkami) osvojila najboljšo relativno uvrstitev v zgodovini slovenske udeležbe na EDMO. Poleg tega so Kaja Rajter, Neca Camlek in Ema Hojan prejele pohvalo za popolno rešitev naloge.

Vsem našim tekmovalkam čestitamo za dosežen uspeh!

### Nalogi s tekmovanja

Da si bomo lažje predstavljali izzive, s katerimi so se soočale naše tekmovalke na tej olimpijadi, si oglejmo dve nalogi s tekmovanja in njuni rešitvi:

**Naloga 2.** Naj bo  $ABC$  ostrokoten trikotnik in naj bo  $D$  taka točka na njegovi očrtani krožnici, da je  $AD$  premer. Recimo, da točki  $K$  in  $L$  zaporedoma ležita na straneh  $AB$  in  $AC$  ter da sta  $DK$  in  $DL$  tangenti na krožnico očrtano trikotniku  $AKL$ .

Dokaži, da premica  $KL$  poteka skozi višinsko točko trikotnika  $ABC$ .

**Rešitev.** Kot pri vsaki geometrijski nalogi si tudi tu najprej narišimo natančno skico.



SLIKA 3.

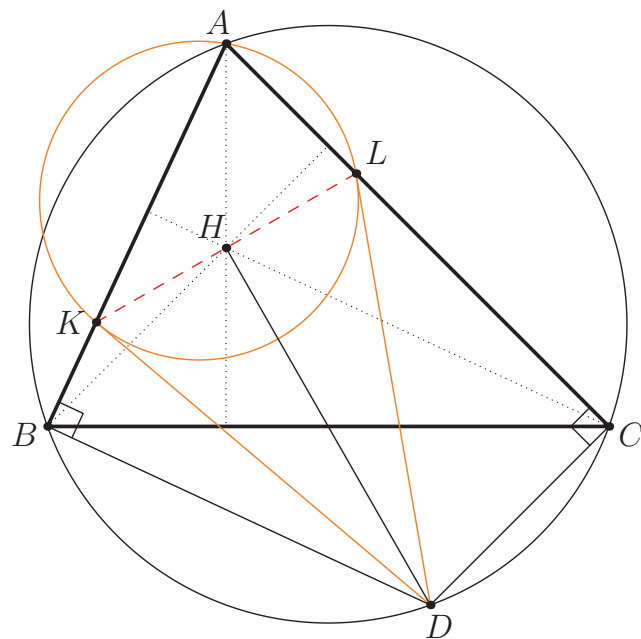
Tekmovalke s Katarininino srebrno medaljo in ekipno maskoto Kozo

Dobra intuicija nam pove, da bo višinska točka  $H$  najverjetneje kar razpolovišče daljice  $KL$ . V takih primerih je zelo dobra strategija ta, da označimo to razpolovišče z  $M$  in dokažemo, da leži na višinah trikotnika  $ABC$ . Pravzaprav je dovolj dokazati že  $BM \perp AC$ . Po enakem razmisleku bo namreč sledilo  $CM \perp AB$ , kar že implicira to, da je  $M$  višinska točka.

Oglejmo si trikotnik  $DKL$ . Ker sta  $DK$  in  $DL$  tangenti na krožnico očrtani trikotniku  $AKL$ , po izreku o kotu med tangento in tetivo dobimo  $\angle DKL = \angle KAL = \angle KLD$ . Od tod sledi, da je trikotnik  $DKL$  enakokrak, zato je  $DM \perp KL$ . Ker je  $DA$  premer krožnice, po Talesovem izreku sledi  $\angle DBA = 90^\circ$ . Po obratu Talesovega izreka tako sledi, da so točke  $B, D, M$  in  $K$  konciklične.

Naj bo točka  $X$  presečišče premic  $BM$  in  $AC$ . Oglejmo si kote v trikotniku  $ABX$ . Iz koncikličnosti točk  $B, D, M$  in  $K$  sledi, da je  $\angle MBA = \angle MDK = 90^\circ - \angle DKM = 90^\circ - \angle BAX$ . Tako dobimo, da je  $\angle AXB = 90^\circ$ , oziroma  $BM \perp AC$ . Premica  $BM$  je tako višina v trikotniku  $ABC$ , s tem pa je dokaz zaključen.

**Naloga 5.** Dano je naravno število  $s \geq 2$ . Za vsako



SLIKA 4.

Višinska točka leži na premici  $KL$

naravno število  $k$  definiramo njegov zasuk  $k'$  na sledeč način: zapišemo  $k$  v obliki  $as + b$ , kjer sta  $a$  in  $b$  nenegativni celi števili in  $b < s$ ; potem je  $k' = bs + a$ . Za naravno število  $n$  si oglejmo neskončno zaporedje  $d_1, d_2, \dots$ , kjer je  $d_1 = n$  in je  $d_{i+1}$  zasuk števila  $d_i$  za vsako naravno število  $i$ .

Pokaži, da to zaporedje vsebuje število 1, natanko tedaj ko je ostanek števila  $n$  pri deljenju s  $s^2 - 1$  bodisi 1 bodisi  $s$ .

**Rešitev.** Na prvi pogled se zdi, da je to zaporedje zelo enostavno – če je  $n = as + b$ , je tako  $d_2 = bs + a$  in zato  $d_3 = as + b = n$ . Težava je v tem, da ne velja nujno  $a < s$ . Ko računamo zasuk števila  $d_2$ , ga moramo tako najprej zapisati v obliki  $a's + b'$ , kjer je  $b' < s$ . Oglejmo si torej, kako delujejo večkratni zasuki.

Za neko naravno število  $k$  si oglejmo zasuk njegovega zasuka, torej  $k'' = (k')'$ . Če je  $k = as + b$ , kjer je  $b < s$ , sledi, da je  $k' = bs + a$ . Sedaj lahko po osnovnem izreku o deljenju zapišemo še  $a = ps + q$ , kjer je  $0 \leq q < s$ , in tako dobimo  $k' = (p + b)s + q$ .

Število  $k'$  smo s tem znova zapisali v želeno obliko, zato lahko izračunamo

$$\blacksquare k'' = qs + (p + b).$$

Tako lahko izračunamo razliko

$$\blacksquare k - k'' = as + b - qs - p - b = (a - q)s - p = p(s^2 - 1).$$

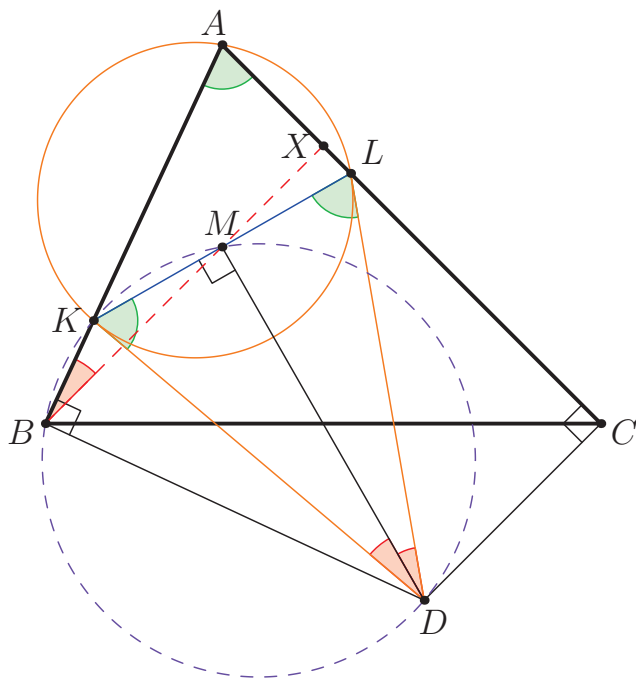
To nam pove veliko informacij o zaporedju  $d_1, d_2, \dots$  – ker  $s^2 - 1$  deli razliko  $k - k''$  za vsak  $k$ , deli tudi  $d_i - d_{i+2}$  za vsako naravno število  $i$ . Števila  $d_1, d_3, d_5, \dots$  imajo tako vsa enak ostanek pri deljenju s  $s^2 - 1$ , enako pa velja za števila  $d_2, d_4, d_6, \dots$ .

Predpostavimo, da je eden izmed členov zaporedja  $d_1, d_2, d_3, \dots$  enak 1 – naj bo to  $d_m$ . Če je  $m$  liho število, po zgornjem razmisleku sledi, da je ostanek števila  $n = d_1$  pri deljenju s  $s^2 - 1$  enak 1. Če pa je  $m$  sodo število, pa opazimo, da velja  $1 = 0 \cdot s + 1$ , zato sledi  $d_{m+1} = 1' = 1 \cdot s + 0 = s$ . Sledi, da je ostanek števila  $n = d_1$  pri deljenju s  $s^2 - 1$  enak  $s$ . V obeh primerih smo tako dokazali, da je ostanek števila  $n$  pri deljenju s  $s^2 - 1$  enak 1 ali  $s$ .

Sedaj predpostavimo, da je ostanek števila  $n$  pri deljenju s  $s^2 - 1$  enak 1 ali  $s$ . Najprej se vrnimo k enačbi  $k - k'' = p(s^2 - 1)$ . Opazimo lahko novo uporabno dejstvo – velja  $k - k'' = p(s^2 - 1) \geq 0$ . Tako lahko sklepamo, da sta zaporedji  $d_1, d_3, d_5, \dots$  in  $d_2, d_4, d_6, \dots$  padajoči. Še več, enakost  $k = k''$  velja natanko v primeru  $p = 0$ , oziroma  $a < s$ , kar je ekvivalentno  $k < s^2$ .

Dokler so členi zaporedja  $d_1, d_3, d_5, \dots$  večji ali enaki  $s^2$ , je zaporedje tako strogo padajoče. Sklepamo lahko, da obstaja tako liho število  $m$ , da velja  $d_m < s^2$ . Spet ločimo dva primera – najprej predpostavimo, da je ostanek števila  $n$  pri deljenju s  $s^2 - 1$  enak 1. Sledi, da je  $d_m = 1$ , saj je to edino število, ki da pri deljenju s  $s^2 - 1$  ostanek 1 in je strogo manjše od  $s^2$ . Če pa je ostanek števila  $n$  pri deljenju s  $s^2 - 1$  enak  $s$ , po podobnem razmisleku dobimo  $d_m = s$ . Zaključek je sedaj preprost – velja namreč  $d_{m+1} = d'_m = (1 \cdot s + 0)' = 1$ , torej smo našli člen zaporedja, ki je enak 1.

× × ×



SLIKA 5.

Dovolj je pokazati, da je  $BM \perp AC$