JOSIP PLEMELJ IN PRAVILNI SEDEMKOTNIK

MILAN HLADNIK

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 12F05, 97G40

Plemljev pristop h konstrukciji (stranice) pravilnega sedemkotnika zahteva nekaj predhodne matematične razlage. Ogledali si bomo tudi rahlo dopolnitev in dve novejši varianti Plemljeve ideje.

JOSIP PLEMELJ AND REGULAR HEPTAGON

Plemelj's approach to the construction of (the side of) the regular heptagon requires some preliminary mathematical explanations. Also a slight addition and two recent variations of Plemelj's idea will be given.

Leta 1892 je devetnajstletni Josip Plemelj, čigar okroglo obletnico (sto štirideset let) praznujemo letos, odkril preprosto konstrukcijo pravilnega sedemkotnika, temelječo na tretjinjenju kota. Objavil jo je sicer šele pred dobrimi sto leti, leta 1912, v nemščini v časopisu *Monatshefte für Mathematik und Physik* [7], leta 1954 pa so jo v slovenskem prevodu Nika Prijatelja v *Obzorniku* [8] lahko spoznali tudi slovenski bralci. Njegova metoda še danes velja za eno najbolj elegantnih in najbolj pogosto citiranih konstrukcij tega lika (glej npr. [1, 3, 4, 5, 6]).

V tem sestavku si bomo ogledali Plemljev pristop k problemu razdelitve krožnice na sedem enakih delov. Privoščili si bomo majhno dopolnitev Plemljeve rešitve, da bomo poleg stranice dobili tudi obe sedemkotnikovi diagonali. Spoznali bomo tudi dve novejši, na Plemljevi ideji sloneči sorodni konstrukciji (oglišč) pravilnega sedemkotnika (prvo je prispeval Andrew M. Gleason, drugo John H. Conway). Na kratko bomo predstavili širši teoretični okvir o možnih konstrukcijah pravilnih večkotnikov.

Najprej na kratko ponovimo nekaj znanih dejstev o geometrijskih konstrukcijah z evklidskim (in izpopolnjenim) orodjem, posebej o konstrukcijah pravilnih večkotnikov. Pri tem je pomembno, katere realne korene kubičnih enačb z racionalnimi koeficienti znamo konstruirati z izbranim orodjem.

Splošno o konstrukciji z ravnilom in šestilom

Znano je, da lahko točko (x, y) v koordinatnem sistemu konstruiramo z (neoznačenim) ravnilom in šestilom natanko takrat, ko se dasta njeni koordinati x in y, izhajajoč iz enote 1, izračunati s štirimi osnovnimi računskimi operacijami in z (večkratno) uporabo kvadratnega korena (glej npr. [10]). Bolj učeno to izrazimo z zahtevo, da morata pripadati koordinati x, y večkratni kvadratni razširitvi obsega racionalnih števil $F_k = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, ..., \sqrt{d_k})$, ki jo dobimo postopoma z zaporednimi enostavnimi kvadratnimi razširitvami $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_k$, tako da za vsak $i = 1, 2, ..., k$ obsegu F_{i-1} dodamo kvadratni koren iz nekega pozitivnega nekvadratnega elementa $d_i \in F_{i-1}$, torej $F_i = F_{i-1}(\sqrt{d_i})$; vsak element v F_i je oblike $p + q\sqrt{d_i}$ s $p, q \in F_{i-1}$ (glej npr. [6], pogl. 1, ali [9], razdelek 5.6). Ravninski kot pa lahko konstruiramo, kadar zmoremo konstruirati njegov kosinus (ali sinus).

Naslednja trditev opisuje prepreko za konstrukcijo korenov kubičnih enačb samo z ravnilom in šestilom.

Trditev 1. *Če kubična enačba z racionalnimi koeficienti nima racionalnega korena, nobenega njenega korena ne moremo konstruirati samo z ravnilom in šestilom.*

Dokaz. Denimo, da so $a, b, c \in \mathbb{Q}$ in da enačba $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ nima racionalnih korenov (da je torej, kot rečemo, nerazcepna nad obsegom racionalnih števil $\mathbb{Q}$), ima pa koren, ki ga je mogoče konstruirati z ravnilom in šestilom. Kot prej označimo $F_0 = \mathbb{Q}$ in $F_k = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \ldots, \sqrt{d_k})$, pri čemer naj bo F_k najmanjša večkratna kvadratna razširitev obsega racionalnih števil, ki vsebuje tak konstruktibilen koren. Ta koren je torej oblike $p + q\sqrt{d_k}$, kjer je $p, q \in F_{k-1}$ in $q \neq 0$, sicer bi bil koren že v F_{k-1}. Če vstavimo koren $p + q\sqrt{d_k}$ v enačbo in poračunamo, dobimo

$$(p^3 + 3pq^2d_k + ap^2 + aq^2d_k + bp + c) + (3p^2q + q^3d_k + 2apq + bq)\sqrt{d_k} = 0.$$

Od tod vidimo, da morata biti oba oklepaja enaka nič. Če vstavimo tudi $p - q\sqrt{d_k}$, dobimo podoben izraz, le da je med obema oklepajema minus. To pa pomeni, da je tudi $p - q\sqrt{d_k}$ koren iste enačbe (različen od $p + q\sqrt{d_k}$ zaradi $q \neq 0$). Naj bo r tretji koren iste kubične enačbe, tako da imamo razcep

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx + c &= (x - r)(x - p - q\sqrt{d_k})(x - p + q\sqrt{d_k}) \\ &= (x - r)(x^2 - 2px + p^2 - q^2d_k). \end{aligned}$$

S primerjavo koeficientov pri potenci x^2 ugotovimo, da mora biti $a = -r - 2p$ oziroma $r = -a - 2p$. Koren r, ki po predpostavki ni racionalen, leži torej v F_{k-1}, zato ga lahko konstruiramo z ravnilom in šestilom. To pa je v nasprotju s privzetkom, da je F_k najmanjša kvadratna razširitev obsega $\mathbb{Q}$, v kateri tak koren obstaja. ∎

Zgled 1. Ker se z uporabo formule za trojni kot lahko takoj prepričamo, da je en koren enačbe $x^3 - 3x - 1 = 0$, ki očitno ne premore nobene racionalne rešitve, enak $2\cos(\pi/9)$ (druga dva sta $2\cos(5\pi/9)$ in $2\cos(7\pi/9)$), iz trditve 1 vidimo, da z ravnilom in šestilom ne moremo načrtati števila $2\cos(\pi/9)$, torej tudi ne tretjiniti kota $\pi/3$. Prav tako ne moremo z ravnilom in šestilom načrtati $\sqrt[3]{2}$, ki zadošča enačbi $x^3 - 2 = 0$ brez racionalnih korenov.

Zgled 2. Podobno lahko pokažemo, da tudi konstrukcija pravilnega sedemkotnika z evklidskim orodjem ni možna. Če namreč ležijo oglišča pravilnega sedemkotnika na enotski krožnici s središčem v koordinatnem izhodišču, jih lahko predstavimo v kompleksnem kot rešitve enačbe $z^7 - 1 = 0$. Ena od rešitev je 1, druge pa zadoščajo simetrični enačbi šeste stopnje $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$. Takoj lahko preverimo naslednje: če kompleksno število z reši to enačbo, potem realno število $x = z + 1/z$ reši enačbo tretje stopnje $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$, ki nima racionalnih rešitev. Zato nobenega njenega korena ne moremo konstruirati samo z ravnilom in šestilom, tudi ne števila $x = 2\cos(2\pi/7)$, ki določa točki (1,0) najbližje oglišče pravilnega sedemkotnika (v prvem kvadrantu) oziroma kompleksni koren $z = e^{2\pi i/7}$ prvotne enačbe $z^7 - 1 = 0$ z realnim delom $x/2$.

Kot dopolnilo zadnjemu zgledu povejmo, da je problem konstrukcije pravilnih večkotnikov z ravnilom in šestilom že zelo dolgo rešen. Osnovni izrek s tem v zvezi pravi (primerjaj npr. [6]):

Izrek 2 (Gauss-Wantzel). *Pravilni n-kotnik lahko konstruiramo z ravnilom in šestilom (tj. z evklidskim orodjem) natanko takrat, ko je naravno število n oblike $n = 2^m p_1 p_2 \ldots p_k$, kjer je $m, k \geq 0$ (pri $k = 0$ mora biti $m \geq 2$) in so p_i, $i = 1, 2, ..., k$, različna Fermatova praštevila, tj. praštevila, ki so za ena večja od potence števila 2.*

Zadostnost je ugotovil Carl Friedrich Gauss (1777–1855) v svoji razpravi *Disquisitiones Arithmeticae* leta 1801. V njej je tudi navedel, da enaka konstrukcija drugih pravilnih večkotnikov ni možna, korekten dokaz tega dejstva pa je leta 1837 objavil francoski matematik Pierre Laurent Wantzel (1814–1848). Wantzel je tudi prvi dokazal, da tretjinjenje poljubnega kota in podvojitev kocke iz zgleda 1 nista možna. Ker (za zdaj) poznamo samo pet Fermatovih praštevil, namreč $3, 5, 17, 257$ in 65537, lahko (za zdaj) z evklidskim orodjem konstruiramo samo pet pravilnih večkotnikov s praštevilsko stranico, od vseh n-kotnikov pa npr. tiste, kjer je $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51$ itd. Vidimo, da pravilnega sedemkotnika ni med njimi.

Geometrijsko reševanje kubične enačbe

Potem ko smo v trditvi 1 spoznali, da z evklidskim orodjem uspemo le v zelo posebnih primerih, si oglejmo, kako bi sploh lahko geometrijsko konstruirali realno rešitev enačbe tretje stopnje z racionalnimi koeficienti.

Splošno kubično enačbo $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, kjer je $a \neq 0$, lahko s substitucijo $x = t - b/(3a)$ vedno prevedemo v obliko

$$t^3 - 3pt + 2q = 0. \tag{1}$$

Izrek 3 (Cardano). *Vse tri rešitve enačbe $t^3 - 3pt + 2q = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$, lahko zapišemo v obliki*

$$t_0 = \sqrt[3]{-q + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{D}}, \tag{2}$$

$$t_1 = \omega \sqrt[3]{-q + \sqrt{D}} + \omega^2 \sqrt[3]{-q - \sqrt{D}}, \quad t_2 = \omega^2 \sqrt[3]{-q + \sqrt{D}} + \omega \sqrt[3]{-q - \sqrt{D}}, \tag{3}$$

kjer je $D = q^2 - p^3$ in $\omega = e^{2\pi i/3}$ tretji koren enote[1]*. Pri tem moramo tretja korena, ki nastopata v zgornjih formulah, izbrati tako, da je njun produkt enak p.*

Kadar je $D > 0$, je rešitev (2) realna ($\bar{t}_0 = t_0$), rešitvi (3) pa konjugirano kompleksni ($\bar{t}_1 = t_2$). Pri $D = 0$ in $p, q \neq 0$ imamo enojni koren $-2q/p$ in dvojni koren q/p, saj lahko zapišemo

$$t^3 - 3pt + 2q = (t + 2q/p)(t - q/p)^2.$$

Pri $D = 0$ in $p = q = 0$ obstaja seveda en sam trojni koren, ki je enak nič.

Najbolj zanimiva je situacija, ko je $D < 0$ (in mora zato biti $p > 0$). Tedaj ima enačba $t^3 - 3pt + 2q = 0$ tri realne rešitve, ki pa se po Cardanovih formulah izražajo s tretjimi koreni iz kompleksnih števil $-q \pm i\sqrt{-D}$. Kadar enačba (1) nima racionalnih korenov, se kompleksnim številom ne moremo izogniti in izvesti vse račune samo v realnem, zato tako situacijo tradicionalno imenujemo (po latinsko) *casus irreducibilis*, čeprav je enačba (1) seveda razcepna nad $\mathbb{R}$. Da dobimo tretji koren iz kompleksnega števila, pa je treba izračunati (realni) tretji koren iz njegove absolutne vrednosti, v danem primeru torej $\sqrt[3]{|-q \pm i\sqrt{-D}|} = \sqrt[6]{q^2 - D} = \sqrt[6]{p^3} = \sqrt{p}$, in tretjiniti njegov argument. Iz tega vidimo, da je nerazcepni primer kubične enačbe nujno povezan s tretjinjenjem kota.

[1] Izraz $-108D$, ki je enak $(t_0 - t_1)^2 (t_0 - t_2)^2 (t_1 - t_2)^2$, imenujemo *determinanta* enačbe (1).

V nerazcepnem primeru lahko v enačbi (1) neznanko izrazimo s kosinusom nekega kota: $t = 2\sqrt{p}\cos\theta$ in dobimo $p\sqrt{p}(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) + q = 0$ oziroma $\cos 3\theta = -q/(p\sqrt{p})$. Tu je namreč zaradi zahteve $D = q^2 - p^3 < 0$ desna stran po absolutni vrednosti pod 1, zato tak kot 3θ obstaja. Če ga znamo tretjiniti, dobimo θ in s tem eno rešitev $t_0 = 2\sqrt{p}\cos\theta$; drugi dve dobimo, če kotu θ prištejemo ali odštejemo $2\pi/3$.

Denimo zdaj, da so koeficienti a, b, c, d prvotne kubične enačbe racionalni. Potem sta racionalna tudi koeficienta p in q izpeljane enačbe (1) in ju znamo konstruirati z ravnilom in šestilom, kakor hitro izberemo enoto. Predpostavimo, da je $D = q^2 - p^3 < 0$. Rešitve lahko v tem primeru dobimo geometrijsko, vendar moramo, kot smo videli, poleg ravnila in šestila uporabiti tudi eno od naprav za tretjinjenje kota (na kratko *kotni trisektor*), saj samo z evklidskim orodjem konstrukcija v splošnem ni možna (glej trditev 1).

Naj ob tem pripomnimo, da ta metoda deluje samo tedaj, ko ima kubična enačba (1) vse tri korene realne. Vedno namreč dobimo tri kote, če že najdemo enega. Če bi npr. hoteli izračunati $\sqrt[3]{2}$ kot pri podvojitvi kocke, nam uvedba trigonometrične funkcije ne bi pomagala, ker ima enačba $x^3 - 2 = 0$ le en realni koren. Povzemimo:

Trditev 4. *Kubično enačbo z racionalnimi koeficienti lahko rešimo geometrijsko z uporabo ravnila, šestila in kotnega trisektorja natanko takrat, ko ima vse tri korene realne.*

Pri enačbi (1) je torej to res natanko takrat, ko je $D = q^2 - p^3 \leq 0$ oziroma $p^3 \geq q^2$. Za geometrijsko konstrukcijo tretjega korena iz realnega števila ali, bolj splošno, korena kubične enačbe (1) tedaj, ko je $D > 0$, je treba uporabiti druge metode.

Plemljeva konstrukcija pravilnega sedemkotnika

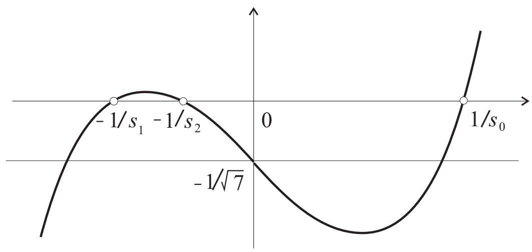
Vprašajmo se, ali lahko konstruiramo stranico pravilnega sedemkotnika $s = 2\sin(\pi/7)$, če poleg ravnila in šestila kot legitimno metodo dopustimo tudi tretjinjenje kota. Odgovor je pritrdilen.

Trditev 5. *Stranica pravilnega sedemkotnika je enaka $s_0 = 1/t_0$, kjer je $t_0 = (2/\sqrt{3})\cos\theta$ in $\cos 3\theta = 3\sqrt{3}/(2\sqrt{7})$ oziroma $\mathrm{tg}\,3\theta = 1/(3\sqrt{3})$.* Poleg tega sta mala in velika diagonala, s_1 in s_2, enaki $s_1 = -1/t_1$, $s_2 = -1/t_2$, kjer je $t_1 = (2/\sqrt{3})\cos(\theta + 2\pi/3)$ in $t_2 = (2/\sqrt{3})\cos(\theta - 2\pi/3)$.

Dokaz. Spoznali smo že, da število $x = 2\cos(2\pi/7)$ reši kubično enačbo

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0. \tag{4}$$

Ker je $x = 2(1 - 2\sin^2(\pi/7)) = 2 - s^2$, vidimo, da stranica pravilnega sedemkotnika zadošča enačbi $(2-y^2)^3 + (2-y^2)^2 - 2(2-y^2) - 1 = 0$ oziroma enačbi $y^6 - 7y^4 + 14y^2 - 7 = 0$. To enačbo šeste stopnje lahko zapišemo tudi v obliki $y^6 - 7(y^2-1)^2 = 0$, zato razpade v dve kubični enačbi: $y^3 - \sqrt{7}(y^2-1) = 0$ in $y^3 + \sqrt{7}(y^2-1) = 0$. S substitucijo $t = 1/y$ in odpravo ulomkov dobimo lepši enačbi tretjega reda: $t^3 - t - 1/\sqrt{7} = 0$ in $t^3 - t + 1/\sqrt{7} = 0$. Dovolj je obravnavati samo prvo enačbo, saj dobimo drugo iz nje z zamenjavo $t \to -t$.

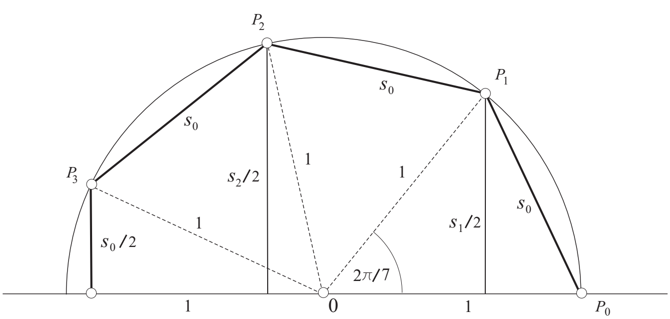


Slika 1. Graf funkcije $f(t) = t^3 - t - 1/\sqrt{7}$ z označenimi ničlami.

Kot pokaže enostavna analiza (glej sliko 1), ima enačba

$$t^3 - t - 1/\sqrt{7} = 0 \tag{5}$$

en pozitiven koren, enak ravno recipročni vrednosti stranice pravilnega sedemkotnika, tj. $t_0 = 1/s_0$, in dva negativna korena, enaka $t_1 = -1/s_1$ in $t_2 = -1/s_2$, kjer je $s_1 = 2\sin(2\pi/7)$ in $s_2 = 2\sin(3\pi/7) = 2\sin(4\pi/7)$, kar spoznamo enako kot za s_0. Iz slike 2 vidimo, da pomeni s_1 krajšo in s_2 daljšo diagonalo sedemkotnika.



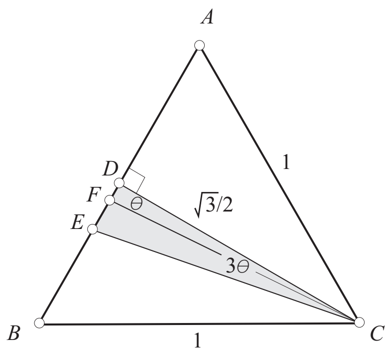
Slika 2. Zgornja polovica v enotski krog včrtanega pravilnega sedemkotnika.

Vsekakor ima enačba $t^3 - t - 1/\sqrt{7} = 0$ vse tri korene realne in je tudi oblike $t^3 - 3pt + 2q = 0$, ki smo jo obravnavali v drugem razdelku. V našem primeru je $p = 1/3$ in $q = -1/(2\sqrt{7})$, tako da je $D = q^2 - p^3 = 1/28 - 1/27 = -1/(28 \cdot 27) < 0$. Če torej pišemo $t = (2/\sqrt{3}) \cos\theta$, dobimo enakost $\cos 3\theta = 3\sqrt{3}/(2\sqrt{7}) = \sqrt{27/28}$ oziroma $\operatorname{tg} 3\theta = 1/(3\sqrt{3})$. Ko iz ene od zadnjih dveh enačb izračunamo kot θ med 0 in $\pi/2$, dobimo z njim izraženo tudi stranico pravilnega sedemkotnika: $s_0 = 1/t_0 = \sqrt{3}/(2\cos\theta)$. Preostala dva (negativna) korena enačbe (5) dobimo seveda v obliki $t_1 = (2/\sqrt{3}) \cos(\theta + 2\pi/3)$ oziroma $t_2 = (2/\sqrt{3}) \cos(\theta - 2\pi/3)$, od koder brez težav izrazimo s kotom θ tudi diagonali s_1 in s_2. ∎

Mimogrede: kot θ je majhen, enak približno $3°37'52''$; stranica sedemkotnika, včrtanega v enotski krog, znaša približno 0,8677675, krajša diagonala 1,5636630 in daljša 1,9498558.

Plemelj je na tem dejstvu zgradil svojo elegantno rešitev [8] (glej sliko 3):

Izrek 6 (Plemelj). *V enakostraničnem trikotniku ABC naj točka D razpolavlja, točka E pa tretjini stranico AB. Nadalje naj bo točka F na daljici DE taka, da je kot $\angle DCF$ enak tretjini kota $\angle DCE$. Potem je CF stranica pravilnega sedemkotnika, ki je včrtan enotski krožnici.*



Slika 3. Plemljeva konstrukcija stranice pravilnega sedemkotnika.

Dokaz. Stranica osnovnega enakostraničnega trikotnika $\triangle ABC$ naj bo dolžine 1, tako da ima pravokotni trikotnik $\triangle CDE$ eno kateto, CD, enako višini enakostraničnega trikotnika, torej dolžine $\sqrt{3}/2$, drugo, DE, ki leži na stranici AB, pa dolžine $1/2 - 1/3 = 1/6$. Kot pri C v tem trikotniku označimo s 3θ in takoj ugotovimo, da je $\operatorname{tg} 3\theta = 1/(3\sqrt{3})$. Poleg tega je dolžina hipotenuze CF v novem trikotniku $\triangle CDF$ enaka $\sqrt{3}/(2\cos\theta)$, torej ravno stranica pravilnega sedemkotnika, ki ga lahko včrtamo v krog s polmerom 1 (glej trditev 5). ∎

To je Plemljeva eksaktna konstrukcija (stranice) pravilnega sedemkotnika. Pri njej očitno potrebujemo tretjinjenje nekega kota (od prej vemo, da zgolj evklidsko orodje ne zadošča), namreč kota $\angle DCE$.

Plemelj je v originalnem članku [7] (glej npr. slovenski prevod [8]) navedel tudi približno rešitev, ko namesto tretjinjenja kota pri C v pravokotnem trikotniku CDE tretjinimo kar kateto DE. Tedaj dobimo nekoliko večjo vrednost za stranico pravilnega sedemkotnika; napaka pri tem približku je (pri krogu s polmerom 1 m) samo 0,038 mm. Še bolj preprosto približno rešitev pa dobimo, če za stranico pravilnega sedemkotnika namesto hipotenuze pravokotnega trikotnika CDF izberemo kar njegovo kateto CD, tj. višino prvotnega enakostraničnega trikotnika ABC. Ta približek, imenovan tudi *indijski*, je že v 1. stoletju našega štetja poznal Heron iz Aleksandrije ($\sim$ 10–70), za njim pa v 10. stoletju Abul Wafa (940–998), poslednji veliki bagdadski matematik in astronom; slednjega mimogrede omenja tudi Plemelj v svojem članku. Konec 15. in v začetku 16. stoletja sta enak približek uporabljala npr. Leonardo da Vinci (1452–1519) in Albrecht Dürer (1471–1528) v svojih študijah o upodabljanju pravilnih likov.

Dopolnitve in sorodne konstrukcije

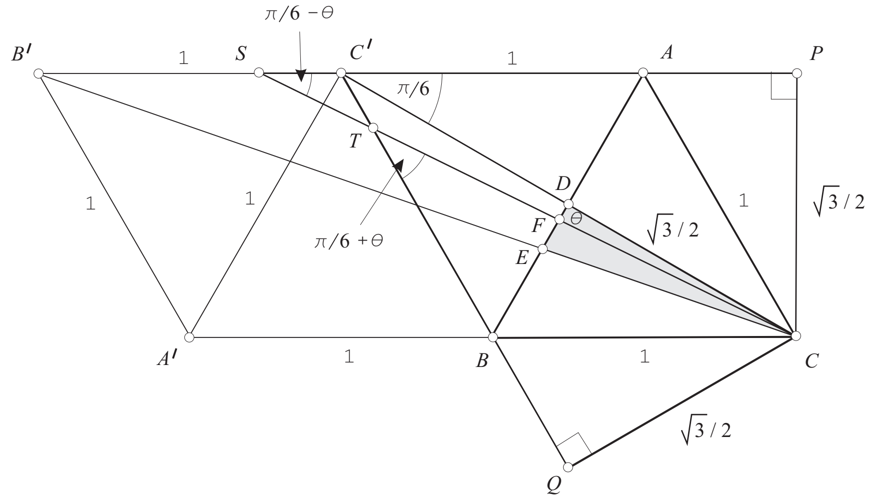
Ko že poznamo daljico, ki predstavlja stranico v enotski krog včrtanega pravilnega sedemkotnika, jo seveda lahko nanesemo na ustrezno krožnico, in dobimo še druga oglišča sedemkotnika. Zanimivo pa je, da lahko s preprosto dopolnitvijo Plemljeve konstrukcije najdemo tudi dolžini obeh sedemkotnikovih diagonal. To je ugotovil in leta 1988 objavil znani ameriški matematik Andrew M. Gleason[2] (1921–2008). Oglejmo si njegov prispevek [3].

Gleasonova dopolnitev Plemljeve konstrukcije

Najprej s preprostim računom iz enakosti $1/s_1 = -t_1 = -(2/\sqrt{3})\cos(\theta + 2\pi/3) = (2/\sqrt{3})\sin(\pi/6+\theta)$ ugotovimo, da velja $s_1 \sin(\pi/6+\theta) = \sqrt{3}/2$. Iz enakosti $1/s_2 = -t_2 = -(2/\sqrt{3})\cos(\theta - 2\pi/3) = (2/\sqrt{3})\sin(\pi/6-\theta)$ pa dobimo podobno $s_2 \sin(\pi/6-\theta) = \sqrt{3}/2$.

Dopolnimo zdaj Plemljevo konstrukcijo tako, da osnovnemu enakostraničnemu trikotniku ABC dodamo še tri skladne enakostranične trikotnike

[2] Gleason je celo svojo akademsko kariero preživel kot profesor matematike in naravne filozofije na Harvardu, čeprav ni nikoli formalno doktoriral. Ukvarjal se je s funkcionalno analizo, kvantno mehaniko, kombinatoriko in s teorijo in prakso kodiranja ter k tem področjem veliko prispeval. Slaven je postal, ko je leta 1952 dokazal, da je vsaka lokalno evklidska topološka grupa Liejeva (in s tem delno rešil peti Hilbertov problem). Zanimal se je tudi za pouk matematike, pisal učbenike in sodeloval pri reformi matematičnega izobraževanja v ZDA.



Slika 4. Dopolnjena Plemljeva konstrukcija stranice in obeh diagonal pravilnega sedemkotnika.

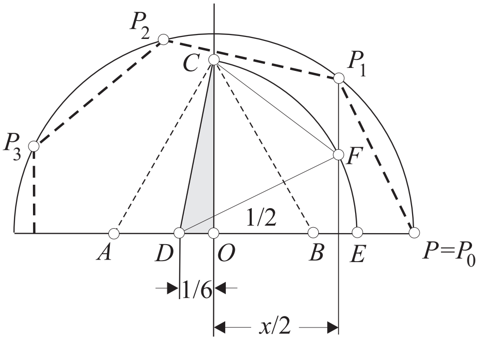
$AC'B$, $A'BC'$ in $A'C'B'$, ki imajo po eno stranico skupno, tako kot kaže slika 4.

S podaljšanjem daljic CD in CE pridemo do točk C' oziroma B', pri čemer je $CC' = 2CD$ in $CB' = 3CE$. Podaljšajmo še daljico CF, tako da seka stranico $B'C'$ v točki S in stranico BC' v točki T. Obenem naj bo P pravokotna projekcija točke C na podaljšek daljice AC' in Q pravokotna projekcija točke C na podaljšek daljice BC'. Potem se lahko hitro prepričamo, da je v pravokotnem trikotniku $\triangle CPS$ kot pri S enak $\pi/6 - \theta$ in v pravokotnem trikotniku $\triangle CTQ$ kot pri T enak $\pi/6 + \theta$. Ker je dolžina stranic CP in CQ enaka $\sqrt{3}/2$ (višina enakostraničnega trikotnika), spoznamo iz primerjave s prej dobljenima enačbama, da je $s_1 = CT$ in $s_2 = CS$.

Gleasonova konstrukcija pravilnega sedemkotnika

Za primerjavo predstavimo še konkretno konstrukcijo pravilnega sedemkotnika, ki jo navaja Gleason v [3]. Pravzaprav bomo zaradi preglednosti narisali le polovico njegove risbe, šestkrat zmanjšali skalo, da bomo dobili enotsko krožnico, in spremenili oznake oglišč, da bodo bolj podobne tistim na sliki 2.

Začnimo s polkrožnico polmera 1, ki ima središče O v koordinatnem izhodišču. Naj bo $A = (-1/2, 0)$, $B = (1/2, 0)$ in $P = (1, 0)$ (glej sliko 5). Potem je točka $C = (0, \sqrt{3}/2)$ tretje oglišče enakostraničnega trikotnika $\triangle ABC$. Konstruirajmo še krožni lok s središčem v točki $D = (-1/6, 0)$ od točke C do presečišča E z daljico OP in na njem izberimo točko F tako, da je kot $\angle PDF$ ravno tretjina kota $\angle PDC$. Navpičnica skozi F potem seka prvotno polkrožnico v točki P_1, ki je točki $P = P_0$ najbližje oglišče pravilnega sedemkotnika. Njegova stranica je daljica P_0P_1.



Slika 5. Gleasonova konstrukcija pravilnega sedemkotnika s tretjinjenjem kota.

Dokažimo, da je ta konstrukcija pravilna. Označimo kot $\angle PDF$ s črko ϕ, tako da je potem $\angle PDC = 3\phi$ in zato $\cos 3\phi = 1/(2\sqrt{7})$ oziroma $4\cos^3\phi - 3\cos\phi = 1/(2\sqrt{7})$. Poleg tega naj pomeni $x/2$ razdaljo od točke O do navpičnice skozi F, tako da je $\cos\phi = (1/6 + x/2)/(2\sqrt{7}/6) = (1+3x)/(2\sqrt{7})$, kar nam omogoča, da iz prejšnje enačbe izločimo kot ϕ. Z računom preverimo, da zadošča x enačbi (4), se pravi, da je $x = 2\cos(2\pi/7)$, kar je edina pozitivna rešitev enačbe (4).

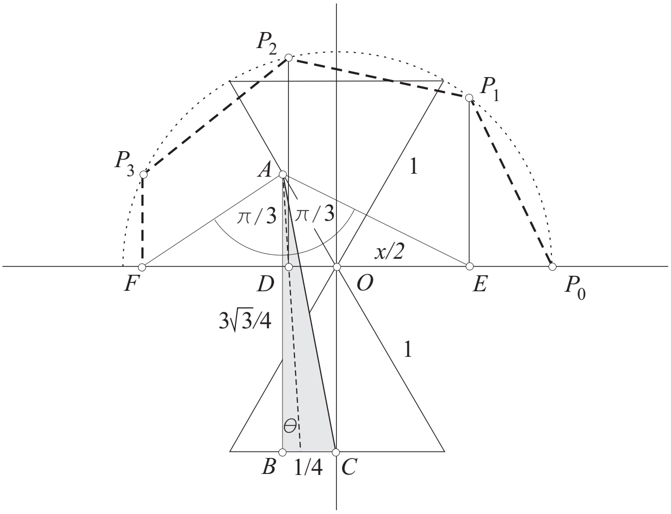
Primerjajmo trikotnik $\triangle CDO$ na sliki 5 s Plemljevim trikotnikom $\triangle CDE$ na sliki 3, pa vidimo, da je $3\phi = \pi/2 - 3\theta$. Bralcu prepuščamo, da se sam odloči, čigava konstrukcija, Plemljeva ali Gleasonova, je bolj elegantna. Prva nam da stranico, druga pa celo oglišča pravilnega sedemkotnika.

Conwayeva konstrukcija pravilnega sedemkotnika

Plemljev trikotnik je uporabil tudi John H. Conway[3] pri svoji konstrukciji pravilnega sedemkotnika, ki jo povzemamo po [2].

Dva skladna enakostranična trikotnika s stranico 1 staknimo skupaj v oglišču O tako, kot kaže slika 6, in ju razpolovimo z navpičnico skozi stičišče. Razpolovišče leve stranice zgornjega trikotnika označimo z A, navpičnica skozi A naj seka spodnjo osnovnico v točki B, razpolovišče osnovnice

[3]John Horton Conway (rojen leta 1937) je znameniti angleški in ameriški matematik (od leta 1986 je profesor na univerzi v Princetonu, prej pa je bil profesor v angleškem Cambridgeu). Deluje na različnih področjih algebre, geometrije, teorije števil, diskretne in razvedrilne matematike. Odkril je številne nove matematične koncepte, uvedel nove algoritme in igre, največjo popularnost pa je pridobil z iznajdbo celičnega avtomata, imenovanega *Igra življenja*.



Slika 6. Conwayeva konstrukcija pravilnega sedemkotnika.

spodnjega trikotnika pa naj bo C. Potem je trikotnik $\triangle ABC$ podoben Plemljevemu trikotniku $\triangle CDE$ na sliki 3 (povečan je s faktorjem $3/2$) s kotom $\angle BAC = 3\theta$, saj je $\operatorname{tg} 3\theta = 1/(3\sqrt{3})$. Tretjino tega kota v smeri od B proti C, tj. Plemljev kot θ, naj poleg navpičnice omejuje daljica AD. Od daljice AD odmerimo na vsako stran kot velikosti $\pi/3$ z vrhom v A. Oba nova kraka naj sekata vodoravnico skozi O v točkah E in F. Potem navpičnice skozi točke D, E, F sekajo enotsko krožnico s središčem v O v ogliščih pravilnega sedemkotnika (glej sliko 6).

Dokaz pravilnosti te konstrukcije je računski. Če označimo z $x/2$ razdaljo OE, vidimo, da je $x/2 + 1/4 = (\sqrt{3}/4)\operatorname{tg}(\theta + \pi/3)$. Z adicijskim izrekom za tangens dobimo od tod $\sqrt{3}\operatorname{tg}\theta = (x-1)/(x+1)$. Po drugi strani iz formule za tangens trojnega kota in dejstva, da je $\operatorname{tg} 3\theta = 1/(3\sqrt{3})$, najdemo enakost $1 - 3\operatorname{tg}^2\theta = 3\sqrt{3}(3\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}^3\theta)$. Izrazimo tangens z x, pa dobimo po preureditvi zvezo $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$, torej spet znano enačbo (4). Od tod vidimo, da je $x = 2\cos(2\pi/7)$.

Podobno kot Gleasonova nam tudi Conwayeva metoda da oglišča v enotski krog včrtanega pravilnega sedemkotnika.

Splošna teorija konstrukcij pravilnih večkotnikov s tretjinjenjem kota

Za konec omenimo, da velja podobno kot za konstrukcijo z evklidskim orodjem bolj splošna teorija tudi za konstrukcijo poljubnega pravilnega večkotnika z uporabo ravnila, šestila in trisektorja. Ustrezni izrek je že leta 1895 v časopisu *Bulletin of the American Mathematical Society* prispeval ameriški matematik James Pierpont[4] (1866–1938), profesor na univerzi Yale. Dokaz je podoben dokazu izreka 2 in prav tako poteka z uporabo Galoisove teorije obsegov (glej [3]). Pravzaprav je Pierpont namesto kotnega trisektorja uporabil metodo stožnic, vendar je Gleason dokazal ekvivalenco obeh orodij za namen konstrukcije pravilnega večkotnika, zato Pierpontov izrek formulirajmo kar v Gleasonovi obliki (s tretjinjenjem kota).

Izrek 7 (Pierpont-Gleason). *Pravilni n-kotnik lahko konstruiramo z ravnilom, šestilom in kotnim trisektorjem natanko takrat, ko je $n = 2^r 3^s p_1 p_2 \dots p_k$, kjer so $r, s, k \geq 0$ (pri $k = 0$ je $n = 2^r 3^s$ in $r/2 + s \geq 1$) in so $p_i > 3$, $i = 1, 2, \dots, k$, različna praštevila oblike $p = 2^u 3^v + 1$, $u, v \geq 0$.*

Praštevila zgornje oblike imenujemo *Pierpontova praštevila* (Gleasonova domneva, da jih je neskončno mnogo, še ni dokazana). Mednje spadajo (poleg Fermatovih praštevil) praštevila 7, 13, 19, 37, 73, 97 itd., ne pa npr. 11, 23, 29, 31, 41, 43 ali 47. Vidimo, da pravilni sedemkotnik zadošča Pierpontovemu pogoju ($7 = 2 \cdot 3 + 1$), enako trinajstkotnik ($13 = 2^2 \cdot 3 + 1$), ne pa npr. pravilni enajstkotnik. Slednjega torej ni mogoče konstruirati samo z ravnilom, šestilom in trisektorjem. Pogojem izreka 7 pa zadoščajo (poleg tistih, omenjenih že v zvezi z izrekom 2) npr. tudi naslednja sestavljena števila: 9, 14, 18, 20, 21, 26, 28, 35, 36, 38, 39, 42, 45, 52 itd.

LITERATURA

[1] L. Bieberbach, *Theorie der geometrischen Konstruktionen*, Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe, bd. 13, Verlag Birkhäuser, Basel 1952.

[2] J. H. Conway, R. K. Guy, *Numbers*, Copernicus Springer-Verlag, New York 1996.

[3] A. M. Gleason, *Angle Trisection, the Heptagon, and the Triskaidecagon*, Amer. Math. Monthly **95** (1988), 185–194.

[4] R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer 2000.

[5] R. Hartshorne, *Viete's construction of the regular heptagon*, spletna stran: `http://www.math.berkeley.edu/~robin/Viete/construction.html`

[6] G. E. Martin, *Geometric Constructions*, UTM, Springer 1998.

[7] J. Plemelj, *Die Siebenteilung des Kreises*, Monatshefte für Mathematik und Physik **23** (1912), 309–311.

[8] J. Plemelj, *Pravilni sedmerokotnik*, Obzornik mat. fiz. **5-6** (1954), 134–135.

[9] J. Stillwell, *Elements of Algebra: Geometry, Numbers, Equations*, Springer Verlag 1994.

[10] I. Vidav, *Rešeni in nerešeni problemi matematike*, Knjižnica Sigma, Mladinska knjiga, Ljubljana 1972.

[4]Pierpont je doktoriral na dunajski univerzi leta 1894 pri Leopoldu Gegenbauerju in Gustavu von Escherichu. Pri slednjem je leta 1898 doktoriral tudi sedem let mlajši Plemelj.