Fizika pomaga matematiki

Boris Bašić in Alija Muminagić

→ V tem kratkem prispevku bomo pokazali, kako uporabimo znanje o poševnem metu za dokaz adicijskega izreka

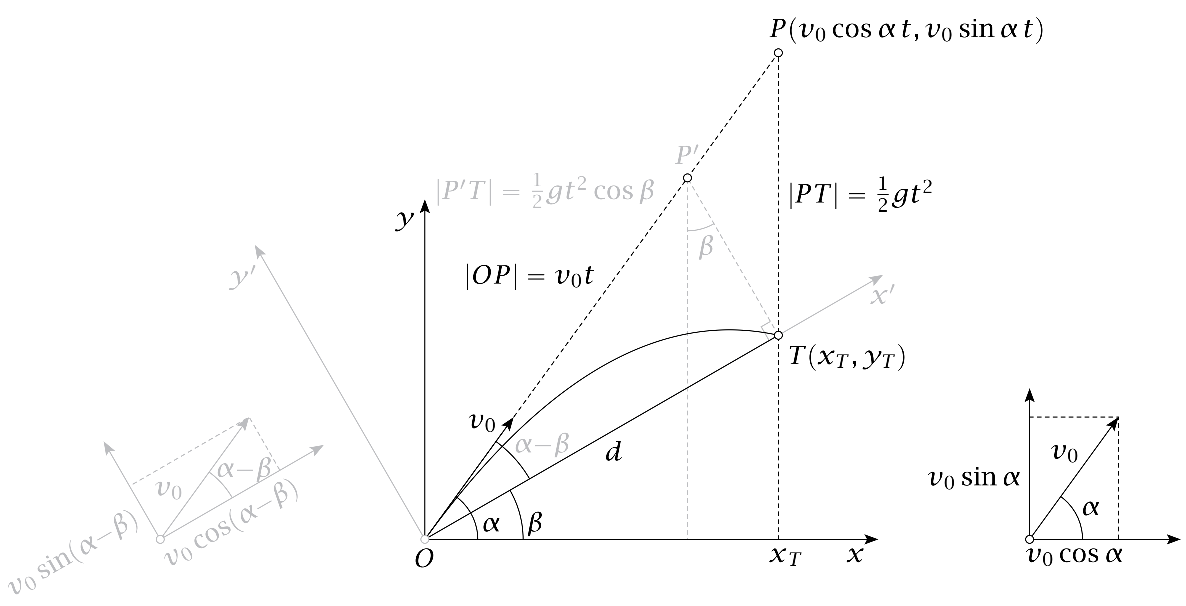
- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$.

Žoga se na začetku nahaja na vznožju klanca z naklonom β. Vržemo jo po klancu navzgor z začetno hitrostjo v_0 in pod kotom $90^\circ \geqslant \alpha > \beta$ glede na vodoravnico. Žoga pade na klanec v točki T, kot kaže skica na sliki 1. Izhodišče koordinatnega sistema O postavimo v točko, v kateri se nahaja žoga na začetku, ko začnemo meriti čas $t = 0$. Koordinatna ravnina xy je navpična, tako da tirnica žoge leži v njej, os x je vodoravna, os y pa navpična. Zračni upor zanemarimo.

Znanje fizike nam pomaga izraziti lego žoge ob poljubnem času t:

$$x_z(t) = v_0\cos(\alpha)t \tag{1}$$

$$y_z(t) = v_0\sin(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2. \tag{2}$$



SLIKA 1.

Žoga pade na klanec v točki T ob času t_T. Koordinate točke $T\left(v_0\cos(\alpha)t_T, v_0\sin(\alpha)t_T - \frac{1}{2}gt_T^2\right)$ določimo na sledeč način. Označimo domet žoge $|OT| = d$. V pravokotnem trikotniku Ox_TT je

$$\cos\beta = \frac{x_T}{d} \iff d\cos\beta = x_T \iff d\cos\beta = v_0\cos(\alpha)t_T \tag{3}$$

in

$$\sin\beta = \frac{y_T}{d} \iff d\sin\beta = y_T \iff d\sin\beta = v_0\sin(\alpha)t_T - \frac{1}{2}gt_t^2. \tag{4}$$

Če pomnožimo enačbo (3) s $\sin\beta$ in enačbo (4) s $\cos\beta$ ter izraza med seboj odštejemo, dobimo

$$v_0\cos(\alpha)\sin(\beta)t_T = v_0\sin(\alpha)\cos(\beta)t_T - \frac{1}{2}gt_T^2\cos\beta,$$

od koder sledi

$$t_T = \frac{2v_0(\sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta))}{g\cos\beta}. \tag{5}$$

Če koordinatni sistem zasukamo za kot β v nasprotni smeri vrtenja urinih kazalcev v sistem $x'y'$, ki je na sliki 1 označen sivo, v tem sistemu enačbo gibanja žoge zapišemo takole:

$$x_z'(t) = v_0\cos(\alpha - \beta)t - \frac{1}{2}g\sin(\beta)t^2 = d \tag{6}$$

$$y_z'(t) = v_0\sin(\alpha - \beta)t - \frac{1}{2}g\cos(\beta)t^2 = 0. \tag{7}$$

Upoštevali smo, da ima v zavrtenem sistemu težni pospešek komponenti različni od nič vzdolž obeh osi in gibanje vzdolž vsake od osi je enakomerno pospešeno. Zadnja dva izraza ustrezata pogoju, da žoga pade na klanec, to je ob času t_T.

Iz enačbe (7) izrazimo čas, ob katerem žoga pade na klanec:

$$t_T = \frac{2v_0\sin(\alpha - \beta)}{g\cos\beta}. \tag{8}$$

Iz enačb (5) in (8) sledi

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta),$$

to je zveza, ki smo jo želeli dokazati. Nadalje lahko iz (1) in (2) zapišemo (glej sliko 1)

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{x_T^2 + y_T^2} \\ &= \sqrt{v_0^2\cos^2(\alpha)t_T^2 + v_0^2\sin^2(\alpha)t_T^2 - v_0\sin(\alpha)gt_T^3 + \frac{1}{4}g^2t_T^4} \\ &= \sqrt{v_0^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)t_T^2 - v_0\sin(\alpha)gt_T^3 + \frac{1}{4}g^2t_T^4} \\ &= \sqrt{v_0^2t_T^2 - v_0\sin(\alpha)gt_T^3 + \frac{1}{4}g^2t_T^4}. \end{aligned} \tag{9}$$

Iz enačbe (6) sledi

- $d^2 = v_0^2 \cos^2(\alpha - \beta) t_T^2 - v_0 \cos(\alpha - \beta) g \sin(\beta) t_T^3 + \frac{1}{4} g^2 \sin^2(\beta) t_T^4.$

Iz enačbe (9) pa sledi

- $d^2 = v_0^2 t_T^2 - v_0 \sin(\alpha) g t_T^3 + \frac{1}{4} g^2 t_T^4.$

Izraza izenačimo in po krajšanju t_T^2 dobimo

- $v_0^2 \cos^2(\alpha - \beta) - v_0 \cos(\alpha - \beta) g \sin(\beta) t_T + \frac{1}{4} g^2 \sin^2(\beta) t_T^2 = v_0^2 - v_0 \sin(\alpha) g t_T + \frac{1}{4} g^2 t_T^2.$

Enačbo preuredimo v

- $-v_0 \cos(\alpha - \beta) g \sin(\beta) t_T = v_0^2 (1 - \cos^2(\alpha - \beta)) - v_0 \sin(\alpha) g t_T + \frac{1}{4} g t_T^2 (1 - \sin^2 \beta),$

upoštevamo zvezo $1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$ in izraz nekoliko preuredimo v

- $v_0 \sin(\alpha) g t_T - v_0 \cos(\alpha - \beta) g \sin(\beta) t_T = v_0^2 \sin^2(\alpha - \beta) + \frac{1}{4} g t_T^2 \cos^2 \beta.$

Iz (8) vstavimo čas in sledi

- $v_0 g (\sin \alpha - \cos(\alpha - \beta) \sin \beta) \frac{2 v_0 \sin(\alpha - \beta)}{g \cos \beta} = v_0^2 \sin^2(\alpha - \beta) + \frac{1}{4} g^2 \left(\frac{2 v_0 \sin(\alpha - \beta)}{g \cos \beta} \right)^2.$

Okrajšamo kvadrat začetne hitrosti in težni pospešek v

- $(\sin \alpha - \cos(\alpha - \beta) \sin \beta) \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta} = \sin^2(\alpha - \beta).$

Pomnožimo s $\cos \beta$ in delimo s $\sin(\alpha - \beta)$:

- $\sin \alpha - \cos(\alpha - \beta) \sin \beta = \sin(\alpha - \beta) \cos \beta.$

Iz zadnjega izraza, če vstavimo $\alpha - \beta = \gamma \iff \alpha = \beta + \gamma$, končno sledi

- $\sin(\beta + \gamma) - \cos \gamma \sin \beta = \sin \gamma \cos \beta \iff \sin(\beta + \gamma) = \sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma.$

S tem smo pokazali, da adicijski izrek velja tudi za vsoto kotov.

Literatura

[1] A. Muminagić, *MiŠ, matematika i škola*, časopis za nastavu matematike, 100 **20** (2019), str. 214, Element, Zagreb.

[2] B. Pavković in D. Veljan, *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

× × ×