

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik **24** (1996/1997)

Številka 6

Strani 346–351

Ivan Lisac:

O RAČUNOVODSKEM PRAVILU

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/24/1320-Lisac.pdf>

© 1997 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA – založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

O RAČUNOVODSKEM PRAVILU

Dostikrat se znajdemo pred nalogo, kako seštetati podano končno vsoto. Vzemimo najprej naslednji vsoti in ju seštejmo brez dokazovanja:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad (1)$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (2)$$

To sta znani formuli za vsoto prvih n naravnih števil in kvadratov prvih n naravnih števil (glej tudi sestavek Vsota potenc naravnih števil v 1. številki Preseka).

Vzemimo kak težji primer. Kolikšna je na primer vrednost vsote

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \dots + n\binom{n}{n} ? \quad (3)$$

Na prvi pogled je najbrž ne znamo preprosto ugnati. Včasih si pri podobnih nalogah pomagamo s primerno *interpretacijo* členov v dani vsoti. Poskusimo to storiti z vsoto (3).

Binomski simbol $\binom{n}{k}$ je število k -elementnih podmnožic množice z n elementi. V vsoti (3) nastopa ob binomskem simbolu $\binom{n}{k}$ število k . Kakšen pomen pa ima tu k ? In produkt $k\binom{n}{k}$? Premislimo. Gre za neki odnos med elementi in podmnožicami. Ker je vseh k -elementnih podmnožic $\binom{n}{k}$, nam produkt $k\binom{n}{k}$ pove, kolikokrat je resnična izjava '*element a pripada množici X* ', ko preteče a osnovno množico z močjo n , X pa vse podmnožice z močjo k .

Vidimo torej, da gre tu za odnos '*pripada*' ($\in$). Preden seštejemo vsoto (3), pa razmislek posplošimo.

Računovodsko pravilo. Naj bosta A, B končni množici in $R \subseteq A \times B$ poljubna podmnožica kartezičnega produkta $A \times B$. Podmnožici R pravimo tudi *relacija*.

Če je $R(a) = \{b \in B \mid a R b\}$ in $R^{-1}(b) = \{a \in A \mid a R b\}$ in označujejo $|R|$, $|R(a)|$, $|R^{-1}(b)|$ moči množic R , $R(a)$ in $R(b)$, potem je

$$|R| = \sum_{a \in A} |R(a)| = \sum_{b \in B} |R^{-1}(b)|. \quad (4)$$

Kot običajno smo z znakom $\sum_{a \in A} |R(a)|$ označili vsoto števil $|R(a)|$, ko a preteče množico A , in podobno v ostalih primerih.

Zgornjo trditev najlažje ilustriramo ob sliki 1. Zapišimo elemente množice A v skrajni levi stolpec, elemente množice B pa v zgornjo vrstico. Če sta elementa a in b v relaciji R ($a R b$), zapišimo na križišče ustrezne vrstice in stolpca enico, sicer postavimo tja ničlo. Potem so tri števila iz enakosti (4) zaporedoma: skupno število enic, vsota enic, šteta po vrsticah, in vsota enic, šteta po stolpcih ($2 + 1 + 1 + 2 = 2 + 3 + 1 = 6$). Ta tri števila so enaka, zato enakost (4) velja.

	b_1	b_2	b_3	b_4	$\sum$
a_1	0	0	1	1	2
a_2	1	1	0	1	3
a_3	1	0	0	0	1
$\sum$	2	1	1	2	6

Slika 1. $R(a_1) = \{b_3, b_4\}$, $R(a_2) = \{b_1, b_2, b_4\}$, $R(a_3) = \{b_1\}$.

Vrnimo se sedaj k uvodnemu problemu. Definirajmo množici A in B ter relacijo R takole:

$$A = \{1, 2, \dots, n\} \quad B = \mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\} \quad a R b \iff a \in b.$$

Za tako definirane A, B in R bomo uporabili računovodsko pravilo.

Vzemimo $a \in A$ in izračunajmo $|R(a)|$! V množici $R(a)$ so tiste množice iz B , ki vsebujejo element a . Koliko jih je? Ker so vse oblike $X \cup \{a\}$, kjer je $X \subseteq A \setminus \{a\}$ (zakaj?), jih je toliko kot podmnožic množice $A \setminus \{a\}$, teh pa je 2^{n-1} . Nato še za $b \in B$ izračunajmo $|R^{-1}(b)|$. Množica b premore $|b|$ elementov, zato je $|R^{-1}(b)| = |b|$. Iz računovodskega pravila (4) sledi:

$$|R| = \sum_{a \in A} 2^{n-1} = \sum_{b \in B} |b|.$$

Levo vsoto sestavlja n členov enakih 2^{n-1} , v desni združimo člene glede na moč množice b in dobimo:

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}.$$

Vsoto (3) smo torej sešteli.

Osnovna ideja računovodskega pravila je, da preštejemo moč relacije R na dva načina. S primerno izbiro množic A, B in R lahko dobimo zanimive enakosti. Poiščimo jih še nekaj.

• Naj bo $A = B = \{1, 2, \dots, n\}$ in $a R b \iff a \leq b$. Potem je med 1 in n takih števil, ki so manjša ali enaka a , ravno a ; števil večjih od b , pa je $n - b + 1$. To vstavimo v (4) in dobimo

$$\sum_{a=1}^n a = \sum_{b=1}^n (n - b + 1).$$

Ker tečeta a in b v obeh vsotah po istih številih, lahko v drugi vsoti namesto b pišemo a , ga prenesemo na levo in izračunamo novo desno vsoto:

$$2 \sum_{a=1}^n a = \sum_{a=1}^n (n + 1) = n(n + 1). \quad (5)$$

Če enačbo (5) še delimo z 2, dobimo vsoto (1).

• Naj bo tokrat

$$A = \{1, 2, \dots, n\} \quad B = A \times A \quad a R (b_1, b_2) \iff a \leq b_1 \text{ in } a \leq b_2.$$

Elementi množice B so v tem primeru pari števil. Parov (b_1, b_2) , pri katerih sta obe komponenti večji ali enaki a , je $(n - a + 1)^2$ (zakaj?). Če pa je dan par (b_1, b_2) , taka števila a , da velja $a \leq b_1$ in $a \leq b_2$, kar naštejmo: to so $1, 2, \dots, b_1$, če je $b_1 \leq b_2$, in $1, 2, \dots, b_2$, če je $b_2 \leq b_1$. V splošnem jih je torej $\min(b_1, b_2)$, kjer $\min(b_1, b_2)$ označuje manjše od števil b_1 in b_2 . Sedaj dobimo iz (4):

$$\sum_{a=1}^n (n - a + 1)^2 = \sum_{b_1=1}^n \sum_{b_2=1}^n \min(b_1, b_2). \quad (6)$$

Leva vsota v (6) je pravzaprav vsota kvadratov prvih n naravnih števil, torej leva stran enakosti (2). Poglejmo še desno vsoto. Razstavimo jo takole:

$$\sum_{b_1=1}^n \sum_{b_2=1}^n \min(b_1, b_2) = \sum_{b_1 < b_2} b_1 + \sum_{b_2 < b_1} b_2 + \sum_{b_1=b_2} b_1. \quad (7)$$

V (7) sta na desni strani prvi dve vsoti enaki, zato izračunajmo le eno:

$$\sum_{b_1=1}^n \sum_{b_2=b_1+1}^n b_1 = \sum_{b_1=1}^n b_1(n - b_1) = n \sum_{b_1=1}^n b_1 - \sum_{b_1=1}^n b_1^2. \quad (8)$$

V (8) seštevamo le še prvih n naravnih števil in kvadrate prvih n naravnih števil, zato iz (6), (7) in (8) sledi

$$3 \sum_{b_1=1}^n b_1^2 = (2n+1) \sum_{b_1=1}^n b_1. \quad (9)$$

Iz (9) in (1) pa z deljenjem s 3 sledi enakost (2).

• Za naravno število n označimo z $D(n)$ množico vseh deliteljev števila n . Definirajmo:

$$A = D(n) \quad B = \{1, 2, \dots, n\} \quad a R b \iff a \mid b.$$

Poglejmo, kaj dobimo v tem primeru. Naj bo a delitelj števila n . Vsa z a deljiva števila, ki ležijo med 1 in n , so:

$$a, 2a, 3a, \dots, \frac{n}{a}a. \quad (10)$$

V (10) je natančno $\frac{n}{a}$ števil. Naj bo sedaj b število iz množice B . Koliko je deliteljev števila n , ki delijo število b ? Delitelji števila n , ki delijo tudi število b , so *skupni delitelji* obeh števil. Vse skupne delitelje števil b in n bomo dobili, če bomo opazovali delitelje največjega skupnega delitelja obeh števil, torej množico $D(d(b, n))$. Tu $d(b, n)$ označuje največji skupni delitelj števil b in n . Uvedimo še dve oznaki: če je n naravno število, naj bo $\tau(n)$ število njegovih deliteljev, $\sigma(n)$ pa vsota vseh deliteljev števila n . Primer:

$$\tau(6) = |\{1, 2, 3, 6\}| = 4, \quad \sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12.$$

Sedaj lahko odgovorimo na gornje vprašanje. Deliteljev števila n , ki delijo tudi število b , je $\tau(d(b, n))$. Uporabimo (4):

$$\sum_{a|n} \frac{n}{a} = \sum_{b=1}^n \tau(d(b, n)). \quad (11)$$

Ker pa je

$$\sum_{a|n} \frac{n}{a} = \sum_{a|n} a \quad (12)$$

(delitelji so v (12) samo naštet v obratnem vrstnem redu), dobimo iz (11) in (12)

$$\sigma(n) = \sum_{b=1}^n \tau(d(b, n)).$$

Preskusimo enačbo za $n = 6$:

$$\tau(1) + \tau(2) + \tau(3) + \tau(2) + \tau(1) + \tau(6) = 1 + 2 + 2 + 2 + 1 + 4 = 12 = \sigma(6).$$

- Vzemimo sedaj

$$A = \{1, 2, \dots, n\} \quad B = A \times A \quad a R (b_1, b_2) \iff a = b_1 b_2.$$

Naj bo $a \in A$. Koliko takih parov (b_1, b_2) obstaja, da je $a = b_1 b_2$? Opazimo, da je par (b_1, b_2) določen že z izbiro delitelja b_1 , saj je $b_2 = \frac{a}{b_1}$. Vseh parov je torej toliko, kot je deliteljev števila a , teh pa je $\tau(a)$. Poglejmo še obratno. Za vsak par $(b_1, b_2) \in B$ obstaja le eno tako število a , da je $a = b_1 b_2$, to je $b_1 b_2$. Toda produkt $b_1 b_2$ mora ležati v A , če naj bo $b_1 b_2 R (b_1, b_2)$. Zato je

$$|R^{-1}((b_1, b_2))| = \begin{cases} 1, & \text{če je } b_1 b_2 \leq n \\ 0, & \text{če je } b_1 b_2 > n \end{cases}.$$

Vstavimo zadnja dva rezultata v (4). Dobimo:

$$\sum_{a=1}^n \tau(a) = \sum_{b_1=1}^n \sum_{b_2=1}^n \begin{cases} 1, & \text{če je } b_1 b_2 \leq n \\ 0, & \text{če je } b_1 b_2 > n \end{cases}. \quad (13)$$

Če v (13) fiksiramo b_1 , potem zadoščajo neenačbi $b_2 \leq \frac{n}{b_1}$ naslednja števila iz množice A :

$$1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n}{b_1} \right\rfloor, \quad (14)$$

kjer smo z $\lfloor x \rfloor$ označili največje celo število, ki je manjše ali enako številu x . Iz (14) sledi

$$\sum_{b_1=1}^n \sum_{b_2=1}^n \begin{cases} 1, & \text{če je } b_2 \leq \frac{n}{b_1} \\ 0, & \text{če je } b_2 > \frac{n}{b_1} \end{cases} = \sum_{b_1=1}^n \sum_{b_2=1}^{\left\lfloor \frac{n}{b_1} \right\rfloor} 1 = \sum_{b_1=1}^n \left\lfloor \frac{n}{b_1} \right\rfloor. \quad (15)$$

Iz (13) in (15) dobimo

$$\sum_{a=1}^n \tau(a) = \sum_{b_1=1}^n \left\lfloor \frac{n}{b_1} \right\rfloor. \quad (16)$$

To pot vsote nismo znali sešteti, smo jo pa preoblikovali. Navedimo še računski primer, zopet za $n = 6$. Leva stran v (16) postane:

$$\tau(1) + \tau(2) + \tau(3) + \tau(4) + \tau(5) + \tau(6) = 1 + 2 + 2 + 3 + 2 + 4 = 14,$$

desna stran pa

$$\lfloor \frac{6}{1} \rfloor + \lfloor \frac{6}{2} \rfloor + \lfloor \frac{6}{3} \rfloor + \lfloor \frac{6}{4} \rfloor + \lfloor \frac{6}{5} \rfloor + \lfloor \frac{6}{6} \rfloor = 6 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 = 14.$$

Ker je za velike n računanje izraza $\tau(n)$ zamudno, je vsoto (16) lažje računati po desni strani.

Ivan Lisac