PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **4** (1976/1977)
Številka 1
Strani 4–7

Anton Suhadolc:

MATEMATIČNE NEPAKE

Ključne besede: matematika, teorija števil, popularizacija matematike, rekreacijska matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/4/4-1-Suhadolc.pdf

MATEMATIKA

MATEMATIČNE NEPAKE

Pozorni bralec je pri branju naslova menil, da se je pri tipkanju vrinila napaka. Pa ni tako! Preden pojasnimo, kaj je nepaka, napravimo nekaj zgledov.

Vsak učenec, ki že zna računati z ulomki, ve, da je tale način krajšanja ulomkov napačen:

$$\frac{12}{32} = \frac{1\cancel{2}}{3\cancel{2}} = \frac{1}{3}$$

Tu smo napravili napako. Oglejmo si še račun

$$\frac{16}{64} = \frac{\cancel{16}}{4.\cancel{16}} = \frac{1}{4}\,, \quad \frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4} \qquad (1)$$

Pri prvem računu smo postopali pravilno, pri drugem računu smo "krajšali" na nedopusten način, a glej, rezultat je kljub temu pravilen! Taki računski napaki, ki vodi do pravilnega rezultata, bomo rekli *matematična nepaka*. Nepaka bomo rekli tudi računu, pri katerem se to zgodi.

Oglejmo si še nekaj podobnih nepak!

$$\frac{165}{660} = \frac{11.15}{11.60} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$$

na bolj "udoben" način dobimo isti rezultat

$$\frac{1\cancel{6}5}{6\cancel{6}0} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$$

še zanimivejša je tale nepaka

$$\frac{2666}{6665} = \frac{2.1333}{5.1333} = \frac{2}{5}$$

ali na zdaj dobro znani način

$$\frac{2\cancel{6}66}{6\cancel{6}65} = \frac{2\cancel{6}6}{6\cancel{6}5} = \left[\frac{2.133}{5.133}\right] = \frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5} = \left[\frac{2.13}{5.13}\right] = \frac{2}{5}$$

* Sestavek je prirejen po članku R.A. Carman, Mathematical Misteaks, Mathematics Teacher, 1971.

V oklepajih so pomožni računi, ki povedo, da res veljajo vsi enačaji.

Pri nepakah se ne ustrašimo niti krajšanja z ničlo, čeprav nam ga v šoli vztrajno prepovedujejo:

$$\frac{103}{206} = \frac{103}{2.103} = \frac{1}{2}$$

po udobnejši poti

$$\frac{1\cancel{0}3}{2\cancel{0}6} = \frac{13}{26} = \frac{1}{2}$$

dobimo "seveda" isti rezultat.

Bodi dovolj primerov uspešnega, a prepovedanega načina krajšanja ulomkov. Postanimo spet matematiki in se vprašajmo, kaj tiči za temi primeri. Zastavimo si tele naloge:

N a l o g a 1. Poišči vse ulomke z dvomestnim števcem in imenovalcem, pri katerih da "krajšanje" po vzoru primera (1) pravilen rezultat!

R e š i t e v. Iskane ulomke zapišimo v obliki $\frac{ab}{bc}$, kjer so a, b, c naravna števila med 1 in 9. "Krajšanje" po primeru (1) zapišemo takole

$$\frac{a\cancel{b}}{\cancel{b}c} = \frac{a}{c}$$

Upoštevaje mestno vrednost zapišemo to enačbo v obliki

$$\frac{10a + b}{10b + c} = \frac{a}{c}$$

Ulomke odpravimo in dobimo enačbo

$$9ac = b(10a - c) \qquad (2)$$

To je ena enačba za tri neznanke. Zanimajo nas seveda le rešitve, pri katerih so a, b, c naravna števila med 1 in 9.

Enačbo rešujemo npr. takole. Ker je leva stran deljiva z 9, mora biti desna tudi. Tu ločimo več možnosti: ali je faktor b deljiv z 9, ali je b deljiv le s 3, ali pa je faktor $10a - c$ deljiv z 9. Vsako od teh možnosti obdelamo posebej.

I. Če je b deljiv z 9, mora biti $b=9$; po krajšanju z 9 dobi enačba (2) obliko $ac = 10a - c$, ali $a = c/(10 - c)$

Za c vzamemo zaporedoma števila od 1 do 9 in opazujemo, ali je a iz zgornje formule naravno število med 1 in 9. Dobimo tele rešitve:

$c = 5$, $a = 1$; $c = 8$, $a = 4$; $c = 9$, $a = 9$. Prvi rešitvi dasta nepaki $\frac{19}{95}$ in $\frac{49}{98}$, tretja rešitev da nezanimivo nepako $\frac{99}{99}$

II. b je deljiv samo s 3; torej je $b = 3$ ali $b = 6$. Če je $b = 6$, dobimo iz enačbe (2) $3ac = 20a - 2c$, ali

$$a = \frac{2c}{20 - 3c}$$

S poskušanjem kot v primeru I. dobimo rešitve $c = 1$, $a = 1$; $c = 5$, $a = 2$; $c = 6$, $a = 6$. Prvi dve dasta nepaki $\frac{16}{64}$ in $\frac{26}{65}$, tretja da spet nezanimivo nepako $\frac{66}{66}$.

Če pa je $b = 3$, moremo zapisati enačbo (2) v obliki

$$a = \frac{c}{10 - 3c}$$

Ta ima eno samo rešitev $c = 3$, $a = 3$, ki da nezanimivo nepako $\frac{33}{33}$.

III. Če b ni deljiv s 3, mora biti v enačbi (2) drugi faktor, $10a - c$, deljiv z 9. Zapišemo ga v obliki $10a - c = 9k$, k je naravno število.

Spet izračunamo a:

$$a = \frac{c + 9k}{10}$$

Ta enačba ima 9 rešitev: $c = 1$, $k = 1$; $c = 2$, $k = 2$; ... ...; $c = 9$, $k = 9$. Iz enačbe (2) sledi $ac = bk$, torej $b = ac/k$. Dobimo 9 nezanimivih nepak

$$\frac{11}{11}, \frac{22}{22}, \ldots, \frac{99}{99}.$$

Naloga 1 ima torej rešitve:

$\frac{16}{64}$, $\frac{19}{95}$, $\frac{26}{65}$, $\frac{49}{98}$ in še 9 nezanimivih rešitev.

Zadajmo si še kako nalogo podobne vrste!

Poišči vse nepake oblike

$$\frac{a\cancel{b}c}{d\cancel{b}e} = \frac{ac}{de} \qquad (3)$$

Težko je poiskati vse rešitve enačbe (3). Zato si zadajmo lažjo nalogo:

N a l o g a 2. Poišči vse rešitve enačbe (3), kjer so seveda a, b, c, d, e naravna števila med 1 in 9, pri čemer sta števec in imenovalec na levi strani enačbe (3) 11-kratnika števca in imenovalca ulomka na desni strani enačbe (3).

N a l o g a 3. Poišči vse nepake oblike

$$\frac{a\,\cancel{b}\,c}{d\,\cancel{b}\,e} = \frac{ac}{de}$$

Nalogo 3 je presenetljivo lahko rešiti in ima mnogo rešitev.

N a l o g a 4. Poišči vse nepake oblike

$$\frac{a\,\cancel{b}\,c}{d\,\cancel{b}\,c} = \frac{a\cancel{b}}{\cancel{b}d} = \frac{a}{d} \qquad (5)$$

Tu si moremo pomagati z že znanimi rešitvami naloge 1. Vzemimo npr. nepako $\frac{16}{64}$ in jo skušajmo razširiti do rešitve enačbe (5):

$$\frac{1\,b\,6}{6\,b\,4} = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

Upoštevaje mestne vrednosti dobimo

$$4(100 + 10b + 6) = 600 + 10b + 4$$

Enačbo uredimo in dobimo $30b = 180$, torej $b = 6$. Dobili smo nepako

$$\frac{1\,\cancel{6}\,6}{6\,\cancel{6}\,4} = \left[\frac{2.83}{8.83}\right] = \frac{1}{4}$$

Po isti poti skušaj poiskati iz nepak $\frac{19}{95}$, $\frac{26}{65}$, in $\frac{49}{98}$ rešitve enačbe (5).

Skušaj tudi rešiti nalogo 2, pri nalogi 3 pa poišči pogoj, ki mu morajo zadoščati števila a, c, d, e, da je enačba (4) rešljiva!

Naj bo za danes dovolj nepak. Prihodnjič si bomo ogledali nekaj nepak drugačnih tipov.

Anton Suhadolc