PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **9** (1981/1982)
Številka 2
Strani 82–93

Janez Strnad:

LASTNO NIHANJE IN RESONANCA

Ključne besede: fizika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/9/537-Strnad.pdf

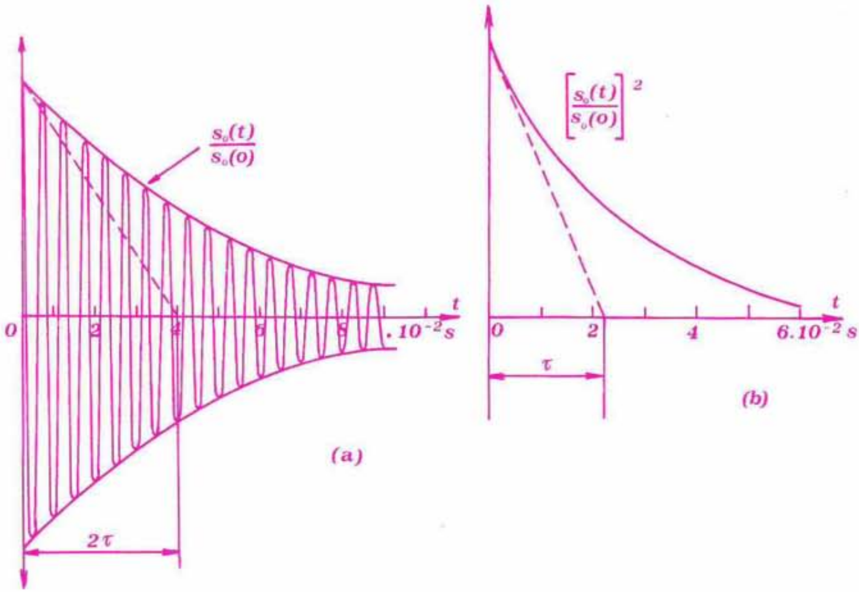
LASTNO NIHANJE IN RESONANCA

Odprite pokrov klavirja, stisnite pedal in zapojte. Oglasila se bo struna z zvokom, ki je podoben vašemu. Če ste zapeli visoko, bo zvok visok, če ste zapeli nizko, pa nizek. Opisani pojav, za katerega ste najbrž že slišali, naj rabi za izhodišče daljšega izleta v fiziko.

Struna je mehanično *nihalo*. Drugo tako nihalo je nihalo na polžasto vzmet. Nihalo, ki ga spravimo iz ravnovesne lege in pustimo, da prosto zaniha, niha sinusno z izbrano frekvenco. To nihanje, katerega frekvenco določajo samo lastnosti nihala, imenujemo *lastno nihanje*, frekvenco pa *lastno frekvenco*. (Nihalo na polžasto vzmet ima eno samo lastno nihanje in eno samo lastno frekvenco, struna pa ima več lastnih nihanj in več lastnih frekvenc.)

Zaradi upora pri lastnem nihanju amplituda, to je največji odmik od ravnovesne lege, pojema. Nihanje je *dušeno*. Količina, ki meri dušenje, je hitro pri roki. Narišimo časovno odvisnost kvadrata amplitude. Kvadrat amplitude in ne amplitudo vzamemo, ker je polna energija nihala sorazmerna s kvadratom amplitude in ker je pač energija vsestransko uporabna količina. Na diagramu določimo čas τ, v katerem bi nihanje zamrlo, če bi ves čas zamiralo tako hitro kot na začetku (sl.1). Čas τ je tem krajši, čim močneje je nihanje dušeno. Temu času recimo *razpadni čas*, čeprav zveni ime na tem mestu nekoliko nenavadno in ga bomo razumeli bolje šele pozneje.

Za bralce, ki radi računajo, povejmo, da pojema amplituda pri dušenem nihanju eksponentno: $s_0(t) = s_0(0)e^{-\beta t}$. Tu je $e = 2{,}718...$ osnova naravnih logaritmov in β *koeficient dušenja*. Kvadrat amplitude je sorazmeren z energijo, ki pojema takole: $W(t) = W(0)e^{-2\beta t} = W(0)e^{-t/\tau}$. Med koeficientom dušenja in razpadnim časom je torej zveza $\tau = 1/2\beta$. Zapisana enačba za časovno odvisnost polne energije nihala velja v povprečju čez nihajni čas, če je razpadni čas mnogo daljši od nihajnega časa.



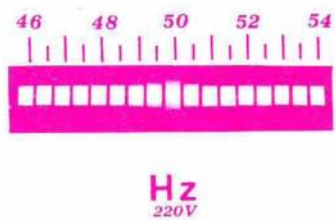
Sl.1 Dušeno nihanje strune: časovna odvisnost amplitude strune (a). Struno izmaknemo iz ravnovesne lege in spustimo. Opazujemo na osciloskopu. Nanj priključimo telefonsko slušalko, ki smo ji odstranili membrano in jo približali struni tako, da se ta giblje ob polih magneta. Iz diagrama za časovno odvisnost kvadrata amplitude dobimo razpadni čas τ(b). Na enak način bi dobili iz diagrama za časovno odvisnost amplitude čas 2τ.

Zdaj povzemimo začetno misel. Nihala ne pustimo prosto nihati, ampak ga motimo od zunaj. Pravimo, da nihalu nihanje vsiljujemo in govorimo o *vsiljenem nihanju*. Nihalu na polžasto vzmet vsiljujemo na primer nihanje tako, da sinusno pozibavamo srednje krajišče vzmeti, struni pa tako, da ji približamo elektromagnet, po katerem teče izmenični tok in ki priteguje železno struno s spreminjajočo se silo, ali z zvokom.

Pri vsiljenem nihanju se zanimamo predvsem za zvezo med amplitudo nihala in frekvenco vsiljenega nihanja. Nihalo navadno miruje, preden mu začnemo vsiljevati nihanje. Nato začne najprej nihati po svoje, z lastno frekvenco, in šele postopoma s frekvenco vsiljenega nihanja. Prehodni pojavi na začetku vsiljevanja so lahko precej zapleteni. Vendar čez čas nihanje z lastno frekvenco zaradi dušenja zamre in nihalo niha s frekvenco vsiljenega nihanja. Tu nam gre le za to nihanje dovolj dolgo po začetku vsiljevanja, ko se amplituda ne spreminja več s časom.

Opazimo, da je amplituda tem večja, čim manj se frekvenca vsiljenega nihanja razlikuje od lastne frekvence. Amplituda je največja, ko sta obe frekvenci enaki. Tedaj je nihalo v *resonanci*. Ime namiguje na to, da se po frekvenci skladata nihanje, ki ga vsiljujemo, in lastno nihanje nihala.

Zdaj razumemo pojav, ki smo ga omenili na začetku. V klavirju se je najmočneje odzvala struna, katere lastna frekvenca je bila najbližja frekvenci našega glasu. Klavir je deloval kot nekakšen merilnik frekvence zvoka. Zares izkoriščamo resonanco za merjenje frekvence (sl.2). Tudi če želimo dobiti nedušeno nihanje, si pomagamo z resonanco. Nihalu, ki bi sicer nihalo dušeno, vsiljujemo nihanje z njegovo lastno frekvenco. Z dovedenim delom krijemo izgubo energije zaradi dušenja. To dosežemo, če nihalo s svojim nihanjem preko posebne naprave krmili samo sebe (sl.3). Velikokrat pa si prizadevamo, da ne bi prišlo do resonance. Zaradi nje se namreč lahko porušijo zgradbe, posebno mostovi (slika na ovitku), in deli strojev.



Sl.2 Merilnik frekvence električnega toka z jezički. Različni jezički imajo različno lastno frekvenco. Najmočneje niha jeziček, katerega lastna frekvenca ustreza frekvenci električnega toka, ki zbuja železne jezičke preko elektromagneta. Amplitude jezičkov dajo vtis o resonančni krivulji.

Sl.3 Nemirka v uri. Nihalo na polžasto vzmet N niha nedušeno. Preko zasunka A in zobatega kolesa S krmili nihalo samo sebe: velika navita polžasta vzmet P požene nihalo, ko gre skozi ravnovesno lego in se giblje najhitreje. Delo, ki ga pri tem prejme nihalo, krije izgubo energije zaradi dušenja.

Narišimo diagram odvisnosti kvadrata amplitude od krožne frekvence vsiljenega nihanja. Kvadrat amplitude vzamemo iz istega razloga kot prej, krožno frekvenco ω, to je z 2π pomnoženo frekvenco, pa zato, da imajo enačbe nekoliko preprostejšo obliko. Zvonasta resonančna krivulja ima vrh pri lastni krožni frekvenci nihala ω_0 (sl.4). Resonanco na kratko označimo z njeno *razpolovno širino* Γ_ω v merilu krožne frekvence. To je polna širina resonančne krivulje na polovični višini v diagramu, v katerem nanašamo na abscisno os krožno frekvenco. Kako ostra je resonanca, pove *relativna širina* Γ_ω/ω_0.

Na Miklavžev dan leta 1825 je stala na nienburškem visečem mostu množica radovednežev, ko je prikorakala čez most vojaška godba. Mrzle noge in masovna psihoza so povzročile, da so pričeli gledalci na mostu poskakovati v ritmu godbe. Most se je zrušil in pri tem je v mrzlih valovih Wesere izgubilo življenje 50 ljudi. - Petindvajset let kasneje je bataljon francoske pehote v lepem pomladanskem dnevu korakal čez 102 m dolg viseči most v Angeršu. Nosilne vrvi in verige so popokale in 236 vojakov je izgubilo življenje v neprijazni strugi reke Maine. Rod pozneje se je o božiču leta 1879 v viharju zrušil lok 3,2 km dolgega mostu čez škotsko reko Tay, ko je vozil čezenj brzi vlak; pri tem so utonili vsi potniki. Da so bile te nesreče dober nauk, je znano, saj prečkajo dandanes vojaki mostove v "mešanem koraku". Navedene skušnje so narekovale oblastem, da so leta 1924 ustavile izredno velik železniški promet na domala 2 km dolgem brooklynskem mostu. Opazili so namreč, da kolesa lokomotiv in vozov ritmično udarjajo ob tirnice in prekomerno zibljejo most.

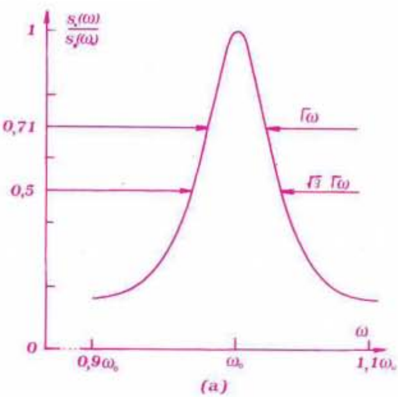
M.Adlešič, *Svet zvoka in glasbe*, MK, Ljubljana, 1964, str. 31

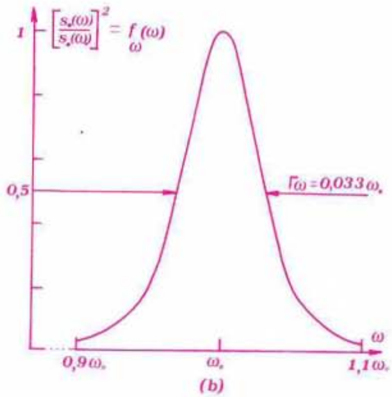
Za bralce, ki radi računajo, povejmo, da podaja resonančno krivuljo, kakor smo jo vpeljali, enačba

$$f_\omega(\omega) = s_0^2(\omega)/s_0^2(\omega_0) = (\Gamma_\omega/\omega_0)^2/\left[(\omega^2/\omega_0^2-1)^2 + \Gamma_\omega^2\omega^2/\omega_0^4\right]$$

ω je krožna frekvenca vsiljenega nihanja, ω_0 lastna krožna frekvenca in $s_0(\omega_0)$ amplituda pri tej krožni frekvenci, to je v resonanci, ko funkcija $f_\omega(\omega)$ doseže največjo vrednost 1.

Polovico največje vrednosti pa doseže pri krožni frekvenci $\omega_0 - \frac{1}{2}\Gamma_\omega$ in $\omega_0 + \frac{1}{2}\Gamma\omega$. Razpolovna širina v merilu krožne frekvence je tedaj $\omega_0 + \frac{1}{2}\Gamma_\omega - (\omega_0 - \frac{1}{2}\Gamma_\omega) = \Gamma_\omega$. To velja samo, če je razpolovna širina mnogo manjša od lastne krožne frekvence in smemo zanemariti kvocient Γ_ω/ω_0 v primeri z 1.





Sl.4 Vsiljeno nihanje strune: odvisnost amplitude strune od krožne frekvence vsiljenega nihanja (a). Nihanje opazujemo in

njegovo amplitudo določamo na osciloskopu kot pri merjenju razpadnega časa, le da zdaj približamo struni droben elektromagnet, ki ga napajamo z izmenično napetostjo s spremenljivo frekvenco. Frekvenco merimo z elektronskim merilnikom frekvence.

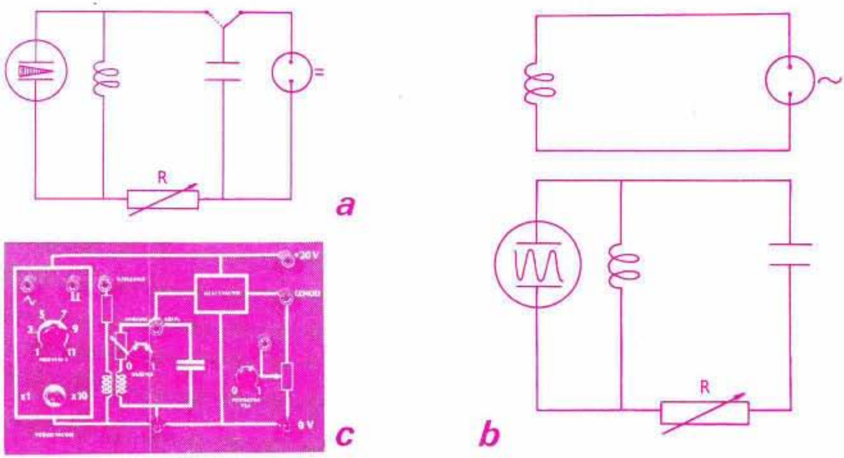
$\omega_0 = 1320\ s^{-1}$ je lastna krožna frekvenca strune.

Kvadrat amplitude strune v odvisnosti od krožne frekvence vsiljenega nihanja (b). Γ_ω je razpolovna širina v merilu krožne frekvence. (Relativna širina $\Gamma_\omega/\omega_0 = 0{,}033$ je majhna v primeri z 1). V odvisnosti amplitude od krožne frekvence bi dobili na enak način $\sqrt{3}\Gamma_\omega$, širino Γ_ω pa dobimo v tej odvisnosti pri $1/\sqrt{2} = 0{,}71$ največje amplitude.

Ali sta količini τ in Γ_ω, od katerih zadeva prva lastno nihanje nihala, a druga vsiljeno nihanje, v kakšni zvezi? Na to vprašanje najlaže odgovorimo z opazovanjem vsiljenega nihanja v nihajnem krogu, ki igra vlogo električnega nihala. Sestavljata ga kondenzator in tuljava. Z vključitvijo upornika z vse večjim uporom lahko preprosto dosežemo vse večje dušenje, torej vse krajši razpadni čas.

Časovni potek napetosti na kondenzatorju nihajnega kroga opazujemo na zaslonu osciloskopa. Najprej nabijemo kondenzator tako, da ga priključimo na izvir enosmerne napetosti. Nato s preklopnikom prekinemo stik z izvirom napetosti in sklenemo nihajni krog (sl.5a). Za nastalo dušeno nihanje ni težko določiti razpadnega časa, če imamo osciloskop, pri katerem poznamo hitrost potovanja pege na zaslonu v vodoravni smeri, se pravi, da vemo, kolikšen čas ustreza enemu delcu skale.

V drugem delu poskusa opazujemo vsiljeno nihanje v nihajnem krogu. Tuljavici nihajnega kroga približamo tuljavo, ki jo napajamo z izmeničnim tokom iz izvira s spremenljivo frekvenco (sl.5b). Izmenični tok po tuljavi ustvari okoli nje nihajoče magnetno polje, ki v tuljavici nihajnega kroga inducira izmenično napetost z enako frekvenco. Pri tem tuljava in tuljavica ne smeta biti preblizu skupaj in med njima ne sme biti železa (kot v transformatorju). Tako dosežemo, da izmenični tok po tuljavici nihajnega kroga ne vpliva nazaj na izvir napetosti in si zagotovimo, da vsiljevanje ni odvisno od frekvence. Najprej poiščemo resonančno krožno frekvenco ω_0, ko je amplituda napetosti na osciloskopu največja. Nato poiščemo večjo in manjšo krožno frekvenco, pri kateri je kvadrat amplitude enak polovici kvadrata največje amplitude (amplituda je tedaj enaka $1/\sqrt{2} = 0{,}71$ največje amplitude). Merjenje poteka hitro, če razpolagamo z elektronskim merilnikom frekvence. Če tega nimamo, moramo frekvenco določiti po periodi nihanja na osciloskopu.



Sl.5 Merjenje razpadnega časa pri lastnem nihanju nihajnega kroga v prvem delu poskusa (a) in merjenje razpolovne širine pri vsiljenem nihanju v nihajnem krogu (b). Nihajni krog, ki ga je za potrebe srednjih šol izdelala visokošolska temeljna organizacija fizika (c). Z njim je mogoče delati opisane poskuse.

Oba dela poskusa ponovimo trikrat: pri najmanjšem, srednjem in večjem dušenju, se pravi brez upora R, s srednjim in z nekoliko večjim uporom. Hitro ugotovimo, da je razpolovna širina tem večja, čim krajši je razpadni čas. Resonanca je tem manj ostra, čim večje je dušenje. Ugotovitev nas napelje na misel, da bi utegnil biti produkt razpolovne širine in razpadnega časa konstanten. Za vse tri primere izračunajmo ta produkt. V vseh treh primerih in še po podatkih za struno se produkt zelo malo razlikuje od 1. Odstopanje od 1 je mogoče pojasniti z nenatančnostjo pri merjenju.

τ	$\Delta\nu$	Γ_ω	Γ_ω/ω_0	$\tau\Gamma_\omega$	
0,0033 s	50 s^{-1}	310 s^{-1}	0,024	1,02	(1)
0,0024	68	430	0,033	1,03	(2)
0,0019	86	540	0,043	1,03	(3)
0,022	7	44	0,033	0,97	(4)

Preglednica: razpadni čas τ, razlika frekvenc $\Delta\nu$, pri katerih je kvadrat amplitude enak polovici kvadrata največje amplitude, razpolovna širina v merilu krožne frekvence $\Gamma_\omega = 2\pi\Delta\nu$, relativna širina Γ_ω/ω_0 in produkt razpadnega časa in razpolovne širine $\tau\Gamma_\omega$ za nihajni krog z najmanjšim (1), srednjim (2) in večjim (3) dušenjem in za struno (4). Lastna frekvenca nihajnega kroga je 2020 s^{-1} in se s povečanim dušenjem zmanjša za kak nihaj na sekundo, tako da je lastna krožna frekvenca za vse tri primere približno $\omega_0 = 2\pi.2020\ s^{-1} = 12\ 700\ s^{-1}$. Lastna frekvenca strune je 210 s^{-1}, tako da je njena lastna krožna frekvenca $\omega_0 = 2\pi.210\ s^{-1} = 1320\ s^{-1}$.

Za manj natančne šolske poskuse je pripraven nihajni krog, ki so ga izdelali na visokošolski temeljni organizaciji fizika za potrebe srednjih šol (sl. 5c). Dušeno nihanje opazujemo na zaslonu osciloskopa, ko vzbujamo nihanje v nihajnem krogu s kratkotrajnimi napetostnimi sunki v daljših enakomernih časovnih razmikih. S preklopom od vzbujanja z napetostnimi sunki na vzbujanje s sinusno napetostjo dosežemo, da se pojavi na zaslonu vsiljeno nihanje. Frekvenco spreminjamo z vrtenjem gumba, izmerimo pa jo z osciloskopom. Približno določimo razpadni čas in razpolovno širino. S spreminjanjem upora v nihajnem krogu lahko ugotovimo, da je resonanca tem ostrejša, čim manjše je dušenje.

Iz merjenj smo tako izluščili enačbo

$$\tau\Gamma_\omega = 1$$

Ta pomembna enačba povezuje razpadni čas, ki zadeva lastnosti nihala pri lastnem nihanju, z razpolovno širino v merilu krožne frekvence, ki zadeva lastnosti nihala pri vsiljenem nihanju.

Enačba je splošna in velja za vse sisteme, ki so zmožni nihanja. Takih sistemov je veliko tudi v svetu atomov.

Atomi in atomska jedra - v njih se gibljejo nabiti delci - lahko sevajo elektromagnetno valovanje z določeno frekvenco. Temu pojavu ustreza lastno nihanje nihala. Na drugi strani pa lahko absorbirajo elektromagnetno valovanje z določeno frekvenco. Temu pa ustreza vsiljeno nihanje. Vzemimo jedro železovega izotopa ^{57}Fe, ki seva elektromagnetno valovanje z valovno dolžino 0,086 nm. Pri tem sevanju namerijo za razpadni čas $0{,}98 \,.\, 10^{-7}$ s. Iz zapisane enačbe sledi v tem primeru za razpolovno širino izsevanega elektromagnetnega valovanja, to je za razpolovno širino ustrezne spektralne črte v merilu krožne frekvence

$$\Gamma_\omega = 1/\tau = 1{,}02.10^7 \ s^{-1}.$$

Vendar na območju kratkovalovne rentgenske svetlobe, kamor sodi navedeno elektromagnetno sevanje, ni mogoče neposredno izmeriti krožne frekvence. Pač pa lahko izmerijo energijo fotona - obroka energije v elektromagnetnem valovanju.

Energija fotona je sorazmerna s frekvenco, sorazmernostni koeficient pa je Planckova konstanta $h = 6{,}6.10^{-34}$ Js, ki je značilna za svet atomov. Energijo fotona izračunamo s krožno frekvenco takole: $W = \hbar\omega$, če uvedemo z 2π deljeno Planckovo konstanto $\hbar = h/2\pi = 1{,}05.10^{-34}$ Js. Enako kot navedemo namesto krožne frekvence energijo fotona, uporabimo namesto razpolovne širine v merilu krožne frekvence razpolovno širino v energijskem merilu Γ_W. Obe razpolovni širini sta v enaki zvezi kot energija in krožna frekvenca

$$\Gamma_W = \hbar\Gamma_\omega$$

Razpadni čas in razpolovno širino v energijskem merilu povezuje enačba

$$\tau\Gamma_W = \hbar$$

ki jo dobimo, če obe strani enačbe $\tau\Gamma_\omega = 1$ pomnožimo s $\hbar$ in upoštevamo prejšnjo zvezo. Za navedeni primer je razpolovna širina v energijskem merilu

$$\Gamma_W = \hbar\Gamma_\omega = 1{,}05 . 10^{-34}\ \text{Js} . 10^{7}\ \text{s}^{-1} = 1{,}05 . 10^{-27}\ \text{J} =$$

$$= 1{,}05 . 10^{-27}\ \text{eV}/1{,}6 . 10^{-19} = 6{,}6 . 10^{-9}\ \text{eV},$$

če izrazimo energijo, kot je navada v svetu atomov, z elektronvolti:

1 eV = $1{,}6 . 10^{-19}$ J. V tem primeru je izjemoma mogoče neposredno izmeriti razpolovno širino v energijskem merilu. Izmerjeni rezultat se v okviru natančnosti pri merjenju ujema z izračunanim.

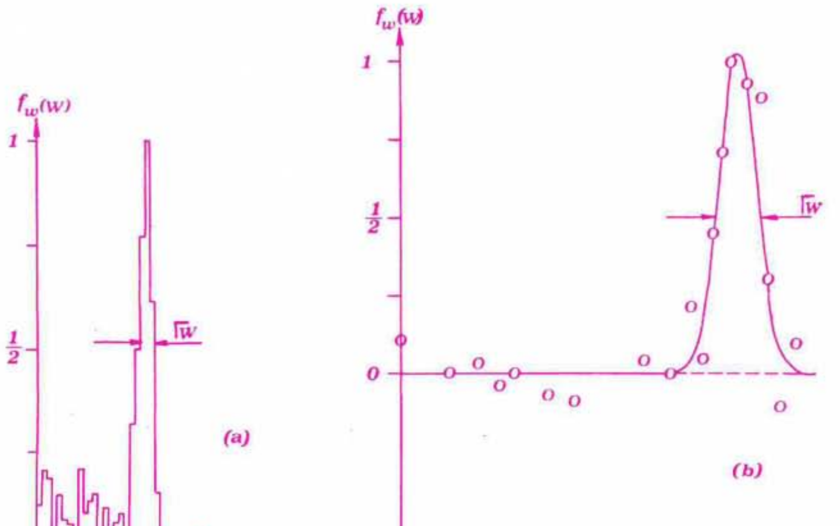
Za vajo izračunajmo energijo fotona, ki ustreza valovni dolžini 0,086 nm. Najprej dobimo za frekvenco $3 . 10^{8}\ \text{ms}^{-1}/0{,}086 . 10^{-9}\text{m} = 3{,}5 . 10^{18}\ \text{s}^{-1}$, saj je frekvenca enaka hitrosti svetlobe $3 . 10^{8}$ m/s, deljeni z valovno dolžino. Za krožno frekvenco imamo $2\pi . 3{,}5 . 10^{18}\ \text{s}^{-1} = 2{,}2 . 10^{19}\ \text{s}^{-1}$ in za energijo fotona $1{,}05 . 10^{-34}\ \text{Js} . 2{,}2 . 10^{19}\ \text{s}^{-1} = 2{,}3 . 10^{-15}\ \text{J} = 2{,}3 . 10^{-15}\ \text{eV}/1{,}6 . 10^{-19} = 14{,}4 . 10^{3}$ eV. Relativna širina $\Gamma_\omega/\omega_0 = \Gamma_W/W_0 = 4{,}6 . 10^{-13}$je v tem primeru mnogo manjša kot pri kakem nihajnem krogu.

Zapisana zveza med razpadnim časom in razpolovno širino velja splošno, ne samo za sevanje elektromagnetnega valovanja. Pri tem je razpadni čas τ povprečni življenjski čas kakega neobstojnega sistema, Γ_W pa ustrezna razpolovna širina v energijskem merilu. Neobstojni sistem je na primer atomsko jedro, ki nastane po jedrski reakciji, ali delec, ki nastane po reakciji med delci.

Razpolovno širino določimo v tem primeru po energijski odvisnosti pogostosti zadevne reakcije. Zdaj je ime razpadni čas upravičeno, saj meri ta čas, kako hitro delci v povprečju razpadajo.

Razpadnega časa delcev, ki je precej krajši od 10^{-10} s, ne moremo neposredno izmeriti.
Delec, ki ima razpadni čas 10^{-10}s in ki se giblje skoraj s hitrostjo svetlobe, naredi med nastankom in razpadom v povprečju pot 3.10^8 $ms^{-1}.10^{-10}$ s = 3 cm. Take delce lahko opazujejo in ugotavljajo njihov razpadni čas po dolžini sledi v mehurčni celici. V njej zapustijo med točko, v kateri nastanejo, in točko, v kateri razpadejo, okoli 3 cm dolgo sled mehurčkov. Pri desetkrat krajšem razpadnem času pa je ta sled tako kratka, da je ni mogoče zanesljivo opazovati. Tolikšen ali še krajši razpadni čas lahko edino izračunamo iz enačbe $\tau = \hbar/\Gamma_W$. Razpolovno širino dobimo na znani način iz odvisnosti za pogostost reakcij v diagramu, v katerem nanašamo na abscisno os energijo.

Zelo kratkožive delce odkrivajo tedaj po zvonastih izboklinah v energijski odvisnosti za pogostost reakcije. Takim delcem pravijo pogosto kar resonance. Za zgled navedimo delec ψ/J in delec Y, ki imata sorazmerno precej dolg razpadni čas (sl.6).



Sl.6 Pogostost reakcij med hitrimi elektroni in enako hitrimi

pozitroni, pri katerih nastanejo drugi delci. Na abscisno os je nanesena skupna polna energija elektrona in pozitrona. Zvonasta izboklina pri energiji 3097 MeV (1 MeV = 10^6 eV) z razpolovno širino 0,063 MeV priča o nastanku (in razpadu) delca ψ/J z lastno energijo 3097 MeV in razpadnim časom $\tau = \hbar/\Gamma_W = 1{,}0.10^{-20}$s (a), zvonasta izboklina pri energiji 9460 MeV s približno enako razpolovno širino pa o nastanku delca Υ (ipsilon - v grški abecedi) s približno enakim razpadnim časom (b).

Pravi razpolovni širini sta manjši od razpolovnih širin na risbah, h katerima prispeva tudi ločljivost merilne naprave. Najnovejša merjenja kažejo, da ima delec Υ manjšo razpolovno širino 0,040 MeV in daljši razpadni čas okoli $1{,}64.10^{-20}$s. V tem primeru je relativna širina $\Gamma_W/W_0 = 4.10^{-6}$.

Za bralce, ki radi računajo, navedimo obliko resonančne krivulje v energijski odvisnosti pri jedrskih reakcijah in reakcijah med delci:

$$f_W(W) = (\tfrac{1}{2}\Gamma_W)^2/[(W - W_0)^2 + (\tfrac{1}{2}\Gamma_W)^2]$$

Funkcija ima največjo vrednost 1 pri energiji $W = W_0$. Polovično vrednost doseže pri energiji $W_0 - \frac{1}{2}\Gamma_W$ in $W_0 + \frac{1}{2}\Gamma_W$, tako da je razpolovna širina $W_0 + \frac{1}{2}\Gamma_W - (W_0 - \frac{1}{2}\Gamma_W) = \Gamma_W$. Pri dovolj majhni relativni širini Γ_W/W_0 se krivulja v bližini vrha ne razlikuje od krivulje $f_\omega(\omega)$.

Janez Strnad