

PRESEK



- REGRESIJSKA PREMICA
- FIZIKA POMAGA MATEMATIKI
- VRTINCI V TOKU KAPLJEVIN IN PLINOV
- KAKO DALEČ JE LUNA
- KVANTNO STROJNO UČENJE



Skrivnostne solzice na vinskih kozarcih

↓↓↓



→ Mnogi, še preden popijejo nekaj kozarcev vina, premišlujejo, kaj povzroča solzice (imenovane tudi noge ali potoček), ki se naberejo na stenah kozarca. Nekateri verjamejo, da so solzice znak dobre kakovosti vina,

v resnici pa v glavnem nastanejo zaradi vsebnosti alkohola v vinu. To sicer ni popolna razlaga. Nedavno so matematiki s pomočjo teorije, ki temelji na diferencialnih enačbah, pokazali, da se najbolj spektakularne solzice pojavijo, ko kombinacija gravitacije, izhlapevanja alkohola in površinske napetosti ustvari majhne udarne valove v vinu na stenah kozarca. Valovi, ki jih povzroči sukanje kozarca, pomagajo pri vzponu vina po stenah, pri čemer nestabilnosti valov ustvarijo obliko solzic.

Odkritje učinka nenavadnih udarnih valov, ki jih imenujemo obrnjeni podstisnjeni udarni valovi, ni le razjasnilo, kaj povzroča solzice, ampak je odprlo tudi nove možnosti kreativne uporabe. Oblika kozarcev izkorišča geometrijo, optimizira dvig vina po stenah in aromo. Ta odkritja lahko uporabimo tudi v primeru tankih slojev, ki so pomembni pri izdelavi mnogih elektronskih komponent, npr. pri integriranih vezjih. Odkritje je koristno tako za vino kot tudi za elektronske čipe. Je očarljivo združenje, ki ga je omogočila matematika.

Več o temi si lahko preberete v knjigi *A theory for undercompressing shocks in tears of wine*, ki je izšla leta 2019 in so jo napisali Y. Dukler, H. Ji, C. Falcon ter A. L. Bertozzi. × × ×

→

Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje letnik 48, šolsko leto 2020/2021, številka 3

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domanjko, Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija), Marjan Jerman (matematika), Martin Juvan, Maja Klavžar, Damjan Kobal, Lucijana Kračun Berc (tekmovanje), Peter Legiša (glavni urednik), Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Marko Razpet, Jure Slak (računalništvo), Matjaž Vencelj, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

Dopisi in naročnine: DMFA-založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 633, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: info@dmfa-zaloznistvo.si

Naročnina za šolsko leto 2020/2021 je za posamezne naročnike 22,40 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 19,60 EUR, posamezna številka 6,00 EUR, stara številka 4,00 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 30 EUR.

Transakcijski račun: 03100-1000018787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA-založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 1100 izvodov

© 2020 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 2127

ISSN 2630-4317 (Online)

ISSN 0351-6652 (Tiskana izd.)

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Priказe novih knjig s teh področij in poročila za osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA-založništvo, Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte info@dmfa-zaloznistvo.si.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvirne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

MATEMATIČNI TRENUTKI

- 2** Skrivnostne solzice na vinskih kozarcih

MATEMATIKA

- 4** In memoriam: dr. Marjan Jerman
(*Karin Cvetko Vah*)
- 5–8** Kitajske naloge
(*Marjan Jerman*)
- 9–11** Regresijska premica
(*Peter Legiša*)
- 12–14** Fizika pomaga matematiki
(*Boris Bašić in Alija Muminagić*)

FIZIKA

- 15, 18–20** Vrtinci v toku kapljev in plinov
(*Andrej Likar*)

ASTRONOMIJA

- 21–26** Kako daleč je Luna ali skupinska naloga na spletni astronomski olimpijadi
(*Vid Kavčič*)

RAČUNALNIŠTVO

- 27–28** Kratek pregled kvantnega strojnega učenja
(*Bojan Žunkovič*)

RAZVEDRILO

- 8** Križne vsote
- 16–17** Nagradna križanka
(*Marko Bokalič*)
- 29** Rešitev nagradne križanke Presek 48/2
(*Marko Bokalič*)
- 30–31** Naravoslovna fotografija – Kje se konča senca?
(*Aleš Mohorič in Barbara Rovšek*)

TEKMOVANJA

- priloga** 30. tekmovanje iz razvedrilne matematike – šolsko tekmovanje

In memoriam Dr. Marjan Jerman



KARIN CVETKO VAH

→ Kako lepo bi bilo
romati vse življenje
skozi zeleni gozd
in se ne ustaviti.
Biti kot gozdna ptica,
ki ne pozna poljan.
Biti človek z dobrim,
dobrim srcem.
(Srečko Kosovel)

Težko je pisati v slovo prijatelju. Nekako sem pričakovala, da se bomo hkrati postarali, se še na stara leta tu in tam srečali, morda kaj podebatirali in se nasmejali spominom. A v življenju je žal težko kar koli napovedovati.

Marjan je bil sprva moj učitelj, ko je pri komaj dvaindvajsetih letih prevzel vodenje vaj iz Algebre 2, kasneje pa tudi sodelavec in prijatelj. Kot študentje smo ga, komaj kaj starejšega od nas, takoj vzljubili in z zanimanjem obiskovali njegove ure. Naučil nas je resnično veliko; tako o matematiki in pristopanju k matematičnim problemom, tudi najzahtevnejšim, kot tudi o življenju; z zgledom nas je učil prijaznosti do sočloveka.

Redko se zgodi, da se v isti osebi združijo tako raznoliki darovi, kot so izjemna matematična nadarjenost in natančnost, pedagoški eros, rahločutnost, vredna najodličnejšega pesnika, človeška toplina, igrivost, družabnost in smisel za humor. V tem pogledu je bila usoda Marjanu izrazito naklonjena, saj ga je bogato obdarila z vsem naštetim.

Raziskovalno se je ukvarjal z linearno algebro in urejenimi algebrskimi strukturami; njegovi članki s teh področij so objavljeni v uglednih mednarodnih matematičnih revijah. Velik del Marjanovega poklic-

nega udejstvovanja je bil vezan na poučevanje matematike. Je avtor številnih člankov o poučevanju matematike, njeni zgodovini in popularizaciji, vrsto let je vodil ekipe slovenskih študentov na mednarodnih matematičnih tekmovanjih ter bil urednik revij Presek in Matematika v šoli.

Zaradi svojega širokega in poglobljenega znanja kakor tudi človeške topline je bil izjemno priljubljen med študenti, o čemer pričajo številni zapisi na spominskem zidu, ki so mu ga v spomin postavili študentje. Na njem se vrstijo zapisi hvaležnosti o tem, da je verjel vanje in jih spodbujal, ko so že skoraj obupali nad študijem. Neka študentka je zapisala: *Hvala za vso ljubezen do geometrije, teorije števil ter matematike nasploh. Kot bodoča profesorica matematike si želim, da bi lahko učila s takim žarom, prijaznostjo in razumevanjem, kot je profesor Jerman učil nas. Velik človek s še večjim srcem. Hvala.*

Vsi bomo nekoč odšli in najpomembnejša dediščina, ki jo lahko zapustimo, je prav pečat, ki ga pustimo v tistih, s katerimi so se križale naše poti. Če kdo, je bil prav Marjan Jerman kot gozdna ptica, ki ne pozna poljan, človek z dobrim, dobrim srcem. Na svidenje nekoč, dragi prijatelj!



× × ×

Kitajske naloge



MARJAN JERMAN

→ Zaradi geografske izoliranosti, večtisočletne samosvoje kulture in številčne populacije se je kitajska matematika zelo dolgo razvijala skoraj popolnoma neodvisno od drugih civilizacij.

Prve zametke matematike najdemo že v mitih, ki izvirajo iz predzgodovinskega obdobja. Najbolj znana je legenda o cesarju Yuju, ki se je ohranila tudi preko tradicije *feng shuija*. Cesar je z darovi želel pomiriti boga reke Lou, ki je pogosto povzročala katastrofalne poplave. Po eni izmed inačic zgodbe ni pomagalo prav nobeno darovanje, dokler ni iz reke prilezla želva. Na oklepu je imela zapisano naslednjo nenavadno tabelo s števili od 1 do 9:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Cesar je opazil, da je vsota vsake vrstice in vsota vsakega stolpca v tabeli enaka 15. Potem, ko je reki ponudil 15 darov, se je reka umirila. To je verjetno prva omemba magičnih kvadratov. Zanimivo je, da je to edini magični kvadrat velikosti 3×3 .

Večji del našega vedenja o kitajski matematiki izvira iz približno desetih knjig, ki povzemajo dotedanje znanje matematike. Najstarejša je bila napisana približno 180 let pred našim štetjem. Verjetno najpomembnejša med njimi je knjiga z naslovom *Devet poglavij matematične umetnosti*. Knjigo so skozi stoletja spreminjali in dopolnjevali. Njena zadnja verzija je iz leta 200 našega štetja, vsebuje pa odkritja iz približno 1200-letne preteklosti.

Za razliko od današnjega razumevanja matematike, ki izvira iz starogrške tradicije in ga je prvi dokončno izoblikoval Evklid v svojih *Elementih* približno 300 let pred našim štetjem, je bila kitajska matematika predstavljena kot zbirka konkretnih problemov. Številski podatki v problemih so skrbno izbrani, tako da rešitve problemov delujejo tudi z drugačnimi podatki in se v bistvu obnašajo kot današnje spremenljivke. Tako lahko s pomočjo analogije na-

loge posplošimo in dobimo nekaj takšnega, kot so naši izreki.

Kako različna od naše je bila starokitajska kultura, pokaže tudi njihov sistem izobraževanja. Cesarska akademija je med nižjimi sloji izbrala 30 študentov, med katerimi jih je 15 študiralo abstraktno, 15 pa uporabno matematiko. Po sedmih letih študija so na zelo strogih izpitih za državne uradnike morali rešiti nekaj nalog iz obravnavanih knjig. Študentje abstraktne matematike so morali dodatno še pravilno dopolniti vsaj šest od desetih naključnih stavkov iz knjige *Devet poglavij matematične umetnosti*.

Za ilustracijo tedanjega poznavanja matematike si pogledjmo nekatere izmed značilnih nalog.

Polnjenje ribnika

V šestem poglavju je zapisana še danes zelo popularna naloga s polnjenjem ribnika.

Ribnik napaja pet kanalov. Prvi kanal napolni ribnik v tretjini dneva, drugi v enem dnevu, tretji v dveh dneh in pol, četrti v treh dneh in peti v petih dneh. Hkrati odpremo vse kanale. Kdaj bo poln ribnik?

Naj bo x število dni, potrebnih za napolnitev ribnika. Potem je

$$\blacksquare \quad 3x + x + \frac{2}{5}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x = 1.$$

Tako je $x = \frac{15}{74}$, kar je približno 4 ure, 51 minut in 54 sekund.

Kovanci

V sedmem poglavju so naloge, ki so povezane z reševanjem sistemov linearnih enačb.

Na prvem kupu je devet zlatih, na drugem pa enajst srebrnih kovancev. Oba kupa tehtata enako. Iz vsakega kupa vzamemo po en kovanec in ga damo na drugi kup. Kup, ki je v glavnem sestavljen iz zlatih kovancev, sedaj tehta 13 utežnih enot manj kot kup, ki vsebuje večino srebrnih kovancev.

Poišči teži zlatega in srebrnega kovanca.





Če z s označimo težo srebrnega in z z težo zlatega kovanca, dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} 9z &= 11s \\ 8z + s + 13 &= 10s + z. \end{aligned}$$

Sistem ima enolično določeni rešitvi

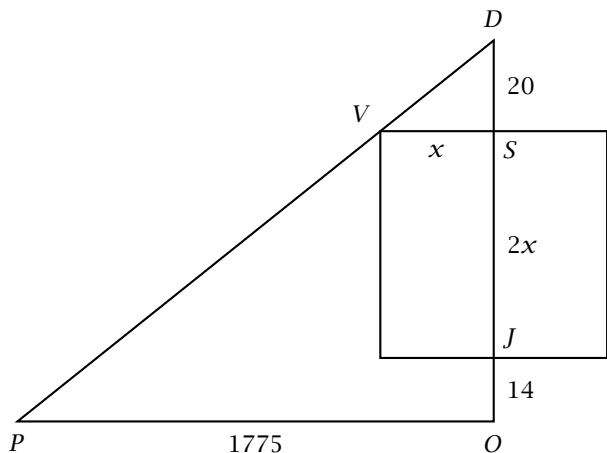
$$s = 29\frac{1}{4}, \quad z = 35\frac{3}{4}.$$

Kvadratno mesto

V zadnjem, devetem poglavju, so naloge, ki so povezane z znanjem o pravokotnih trikotnikih. Med bolj zanimivimi je naslednja:

Mesto je obdano s kvadratnim obzidjem. Na vsaki stranici zidu so na sredini vrata. Dvajset korakov pred severnimi vrati je drevo. Če mesto zapustimo pri južnih vratih, naredimo 14 korakov proti jugu in nato 1775 korakov proti zahodu, prvič zagledamo drevo.

Kako veliko je mesto?



SLIKA 1.

Kvadratno mesto

Skicirajmo mesto in uporabljajmo oznake s slike 1. Naj bo $2x$ njegova širina.

Ker sta trikotnika POD in VSD podobna, je

$$\frac{20}{x} = \frac{34 + 2x}{1775}.$$

Razmerje je ekvivalentno kvadratni enačbi

$$x^2 + 17x - 17750 = 0$$

z rešitvama

$$x = \frac{-17 \pm 267}{2}.$$

Za širino mesta moramo vzeti pozitivno rešitev $2x = 250$ korakov.

Oddaljeni otok

Liu Hui je leta 263 med komentarji knjige zapisal naslednjo nalogo o merjenju oddaljenega otoka:

Palici velikosti pet pujev sta postavljeni 1000 pujev narazen (en pu ustreza približno dvema metroma). Če se postavimo med palici 123 pujev za prvo palico, ki je bližje otoku, sta vrh prve palice in vrh otoka poravnana. Če pa se postavimo 127 pujev za drugo palico, sta poravnana vrh otoka in vrh druge palice.

Kolikšna je višina otoka in koliko je otok oddaljen od prve palice?

Naloga bo bolj jasna, če dodamo, da z obale vidimo visok klif nad morjem, ki je hkrati najvišja točka otoka. Povedati je treba tudi, da je obala sicer položna in da vrhova obeh palic ter vrh otoka vidimo s točk na tleh. Situacija je ilustrirana in skicirana na sliki 2.

Naj bo v višina klifa in d oddaljenost prve palice od otoka.

Trikotnika BP_1Q_1 in BOV sta si podobna, zato je

$$\frac{5}{v} = \frac{123}{123 + d}.$$

Prav tako sta si podobna tudi trikotnika AP_2Q_2 in AOV , zato je

$$\frac{5}{v} = \frac{127}{d + 1000 + 127}.$$

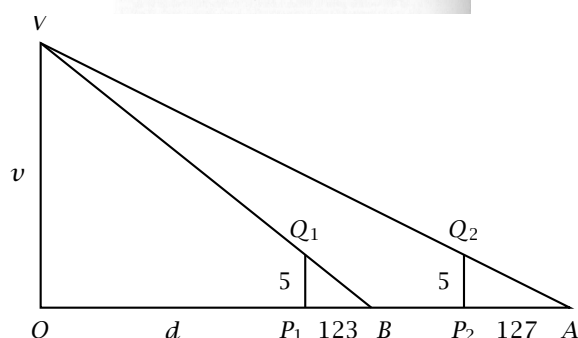
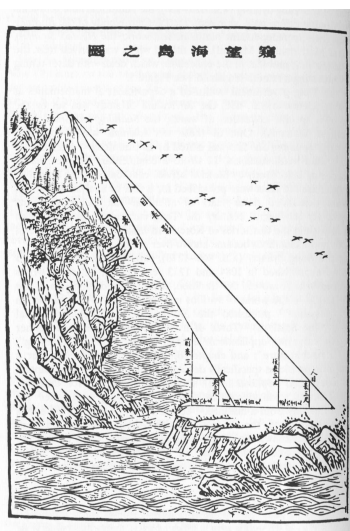
Od tod dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} 615 + 5d &= 123v \\ 5635 + 5d &= 127v \end{aligned}$$

z rešitvama

$$v = 1255 \text{ in } d = 30750.$$

Otok je visok 1255 pujev in je 30750 pujev oddaljen od prve palice.



SLIKA 2.

Merjenje otoka z obale

Košara z jajci

Sun Zi je v petem stoletju med komentarji knjige zapisal naslednjo nalogo:

Če iz košare jemljemo po tri jajca, v košari ostaneta dve jajci. Če jemljemo po pet jajc, ostaneta tri. Če pa jih jemljemo po sedem, ostaneta dve. Koliko jajc je v košari?

Naj bo x število jajc v košari. Besedilo pravi, da je ostanek pri deljenju x s 3 enak 2, ostanek pri deljenju x s 5 enak 3 in ostanek pri deljenju x s 7 enak 2. Danes to krajše zapišemo kot sistem kongruenc:

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod{3} \\ x &\equiv 3 \pmod{5} \\ x &\equiv 2 \pmod{7} \end{aligned}$$

Izkaže se, da je takšen sistem zagotovo rešljiv, če so moduli paroma tuji. Danes ta rezultat imenujemo *Kitajski izrek o ostankih*. Kitajci so vedeli, da morajo v tem primeru rešitev iskati v obliki

$$x = 3 \cdot 5 \cdot a + 3 \cdot 7 \cdot b + 5 \cdot 7 \cdot c.$$

Zaradi tujosti modulov bi se dalo pokazati, da je prav vsaka rešitev te oblike. Vsak od seštevancev je premeteno nastavljen tako, da preostala dva data ostanek 0 po drugih dveh modulih. To pomeni, da mora hkrati veljati:

$$\begin{aligned} 15a &\equiv 2 \pmod{7} \\ 21b &\equiv 3 \pmod{5} \\ 35c &\equiv 2 \pmod{3} \end{aligned}$$

Ker je $15a = 2 \cdot 7a + a$, $21b = 4 \cdot 5b + b$ in $35c = 11 \cdot 3c + 2c$, dobimo

$$a = 7a' + 2, \quad b = 5b' + 3, \quad 2c = 3c' + 2.$$

Če preverimo vse možne ostanke pri deljenju s tri, vidimo, da mora biti c oblike $c = 3c'' + 1$. Ko rešitve vstavimo v nastavek za x , dobimo

$$x = 3 \cdot 5 \cdot 7(a' + b' + c'') + 128 = 105n + 128.$$

Najmanjšo smiselno naravno rešitev dobimo v primeru $n = -1$. Takrat je $x = 23$. Naslednja je že 128. Vse ostale rešitve dobimo s prištevanjem večkratnikov števila 105.

Perutnina

Yang Hui je v trinajstem stoletju pazljivo predelal Devet poglavij matematične umetnosti in med komentarji zapisal zanimivo nalogo, ki je povezana z reševanjem linearnih diofantskih enačb:

Petelin stane pet čienov, kokoš tri čiene in trije piščanci en čien. 100 glav perutnine kupimo za 100 čienov. Koliko petelinov, koliko kokoši in koliko piščancev smo kupili?

Naj bo x število petelinov, y število kokoši in z število piščancev, ki smo jih kupili. Potem je

$$\begin{aligned} 5x + 3y + \frac{1}{3}z &= 100, \\ x + y + z &= 100. \end{aligned}$$



→ Če odpravimo spremenljivko z , dobimo enačbo

$$\blacksquare 7x + 4y = 100.$$

To je enačba premice v ravnini, na kateri leži neskončno točk s koordinatama (x, y) . Za rešitev naloge bodo zanimive le točke, ki imajo za koordinate nenegativna cela števila. Kitajci so, enako kot Grki in Indijci, že znali reševati t. i. diofantske enačbe. Najprej je treba v celih številih rešiti diofantsko enačbo

$$\blacksquare 7x + 4y = D(7, 4),$$

kjer $D(7, 4) = 1$ pomeni največji skupni delitelj števil 7 in 4. Zelo lahko je uganiti eno od celih rešitev, recimo $x_0 = -1$ in $y_0 = 2$. Indijski matematik Brahmagupta je v sedmem stoletju pokazal, da so vse ostale celoštevilске rešitve enačbe $7x + 4y = 1$ oblike

$$\blacksquare \begin{aligned} x &= x_0 + 4k = 4k - 1, \\ y &= y_0 - 7k = 2 - 7k. \end{aligned}$$

Poskušajte opaziti idejo, da sta rešitvi nastavljeni tako, da se dodana $4k$ in $7k$ odštejeta. Iskani rešitvi originalne enačbe $7x + 4y = 100$ pa sta 100 krat večji:

$$\blacksquare \begin{aligned} x &= 100x_0 + 4k = 4k - 100, \\ y &= 100y_0 - 7k = 200 - 7k. \end{aligned}$$

Da bosta rešitvi smiselni, mora seveda veljati $x \geq 0$ in $y \geq 0$. To pomeni, da mora biti

$$\blacksquare 25 \leq k \leq 28.$$

Za smiselne k dobimo kar štiri ustrezne rešitve:

k	x	y	z
25	0	25	75
26	4	18	78
27	8	11	81
28	12	4	84

Prva rešitev odpade, če vemo, da smo kupili vsaj enega petelina.

Naloge

Če nam je uspelo z nalogami navdušiti katerega od bralcev, se lahko loti še naslednjih kitajskih nalog.

1. Hitri tekač preteče 100 korakov v enakem času kot počasni 60 korakov. Hitri tekač da počasnemu 100 korakov prednosti, nato starta tudi on. Čez koliko korakov bo ujel počasnega?
2. Kubični kun žada tehta sedem liangov, kubični kun peska pa šest liangov. V kocki s stranico tri kune je mešanica žada in peska, ki tehta 11 jinov. Kolikšni sta teži žada in peska v kocki? (1 jin=16 liangov)
3. Okroglo mesto z neznanim premerom ima na vsaki od strani neba vrata. Oseba A starta pri zahodnih vratih in naredi 480 pudev proti jugu. Oseba B pa starta pri vzhodnih vratih. Ko naredi 16 pudev proti vzhodu, zagleda osebo A. Poišči premer mesta.
4. Če neznano število kroglic postavimo v sedem enako dolgih vrst, nam ostane ena; če jih postavimo v osem vrst, ostaneta dve; če jih postavimo v devet vrst, ostaneta tri. Koliko je vseh kroglic?
5. V isto kletko damo fazane in zajce. Naštejemo 35 glav in 94 nog. Koliko fazanov in koliko zajcev je v kletki?

× × ×

Križne vsote

↓↓↓

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števki od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratu na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse številke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

		5	7		
8				11	
11					15
			8		
			11		

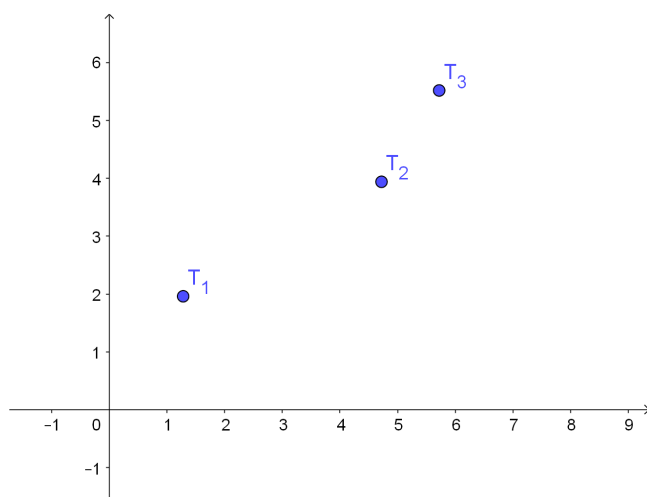
× × ×

Regresijska premica



PETER LEGIŠA

→ Denimo, da imamo v pravokotnem koordinatnem sistemu na ravnini tri točke, $T_1(x_1, y_1)$, $T_2(x_2, y_2)$, $T_3(x_3, y_3)$, ki sicer ne ležijo na isti premici. Ampak v mislih si vseeno lahko narišemo premico, od katere bodo vse le malo oddaljene. Ilustracijo imamo na sliki 1.

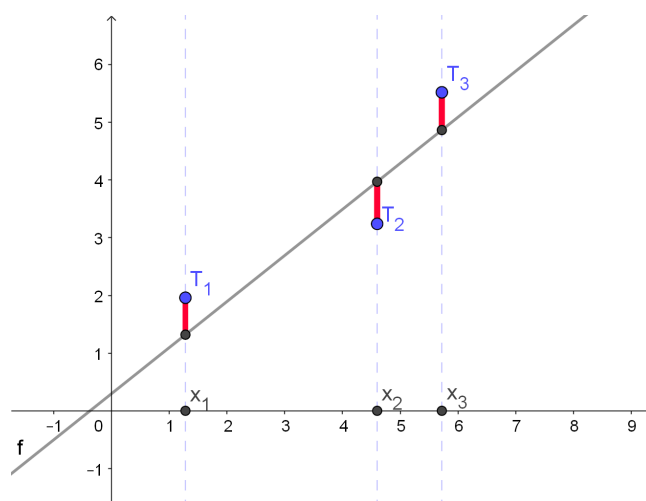


SLIKA 1.

Tri točke, ki ne ležijo na isti premici.

Denimo, da so te tri točke rezultati treh meritev para količin (x, y) in vemo, da je zveza med količinama teoretično linearna v obliki $y = f(x) = px + q$. Tu sta p in q neznana in ju moramo še določiti. Zaradi slučajnih napak pri meritvah prihaja zmeraj do rahlih odstopanj od pravih vrednosti in zato točke niso kolinearne.

Kako bi kar najbolje izkoristili rezultate vseh treh meritev in določili premico, ki se »najbolje« prilega vsem trem meritvam? Radi bi, da premica kar najbolje podaja rezultate meritev, se pravi, da je $f(x_i)$ kolikor je mogoče blizu y_i za $i = 1, 2, 3$. Odstopanja, to so vrednosti $|f(x_i) - y_i|$, naj bi bila kolikor je mogoče majhna. Na sliki 2 smo narisali premico, ki se na oko kar dobro prilega danim podatkom. Dolžine debelo narisanih navpičnih rdečih daljic so velikosti odstopanj meritvenih vrednosti od ustreznih vrednosti na premici. Nekatera odstopanja so navzgor, druga navzdol. Nekako moramo minimizirati ta odstopanja v celoti. Obstajajo močni razlogi (ki jih pa tu ne moremo razlagati), da uporabimo **metodo najmanjših kvadratov**. To pomeni, da skušamo minimizirati vsoto kvadratov odstopanj, torej vsoto kvadratov dolžin rdečih daljic na sliki 2.



SLIKA 2.

Rdeče so narisana odstopanja.

→ Števili p in q moramo torej izbrati tako, da bo vsota

$$W = (y_1 - f(x_1))^2 + (y_2 - f(x_2))^2 + (y_3 - f(x_3))^2 \quad (1)$$

minimalna. Premico, ki zadošča tem pogojem, imenujemo **regresijska premica**.

To lahko posplošimo. Če imamo točke $T_1(x_1, y_1)$, $T_2(x_2, y_2), \dots, T_n(x_n, y_n)$, je **regresijska premica** $y = f(x) = px + q$ tista, za katero je vsota

$$W = (y_1 - f(x_1))^2 + (y_2 - f(x_2))^2 + \dots + (y_n - f(x_n))^2 \quad (2)$$

najmanjša.

V programu Geogebra je regresijska premica imenovana **trendna črta**. Napišemo seznam točk in ukaz **Trendna črta** nam nariše regresijsko premico in da njeno enačbo. Uporabimo lahko tudi program za preglednice Excel. Grafična računalna znajo potegniti tako premico.

Z vektorji bomo izpeljali enačbo regresijske premice v primeru treh točk. V ta namen se bomo preselili v trirazsežni prostor. Če vas zanima le rezultat, lahko nadaljujete pri enačbah (3) in (4).

Število W v enačbi (1) je kvadrat razdalje med znano točko $Y(y_1, y_2, y_3)$ s krajevnim vektorjem $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ in neznano točko $Z(f(x_1), f(x_2), f(x_3))$ s krajevnim vektorjem $\vec{z} = (f(x_1), f(x_2), f(x_3))$. Ta W mora biti minimalen. Zato mora biti **razdalja med Y in Z minimalna!**

Vektor $\vec{z}$ lahko zapišemo, kot lahko takoj preverite, zaradi $f(x_i) = px_i + q$ (za $i=1,2,3$) takole:

$$\vec{z} = p(x_1, x_2, x_3) + q(1, 1, 1).$$

Označimo

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &= \vec{x}, \\ (1, 1, 1) &= \vec{c}. \end{aligned}$$

Torej je

$$\vec{z} = p\vec{x} + q\vec{c}.$$

Tako točka Z leži na ravnini, napeti na znana vektorja $\vec{x}$ in $\vec{c}$. Z drugimi besedami, točka Z leži na ravnini Σ skozi izhodišče ter točki $X(x_1, x_2, x_3)$ in

$C(1, 1, 1)$. Iščemo torej točko Z na ravnini Σ , ki je najmanj oddaljena od točke Y . To je točki Y najbližja točka na ravnini Σ . Geometrija nam pove, da je iskana točka Z **pravokotna projekcija** točke Y na ravnino Σ .

Vektor $\vec{YZ} = \vec{z} - \vec{y} = p\vec{x} + q\vec{c} - \vec{y}$ je torej pravokoten na vektorja $\vec{x}$ in $\vec{c}$, ki razpenjata ravnino Σ . Tako je skalarni produkt

$$(p\vec{x} + q\vec{c} - \vec{y}) \cdot \vec{x} = p\vec{x} \cdot \vec{x} + q\vec{c} \cdot \vec{x} - \vec{y} \cdot \vec{x} = 0.$$

Še

$$(p\vec{x} + q\vec{c} - \vec{y}) \cdot \vec{c} = p\vec{x} \cdot \vec{c} + q\vec{c} \cdot \vec{c} - \vec{y} \cdot \vec{c} = 0.$$

Dobili smo sistem dveh linearnih enačb za p in q :

$$\begin{aligned} p\vec{x} \cdot \vec{x} + q\vec{c} \cdot \vec{x} &= \vec{y} \cdot \vec{x} \\ p\vec{x} \cdot \vec{c} + q\vec{c} \cdot \vec{c} &= \vec{y} \cdot \vec{c} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Izračunamo skalarne produkte v zadnjih dveh enačbah:

$$\begin{aligned} \vec{y} \cdot \vec{x} &= y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3, \\ \vec{x} \cdot \vec{x} &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \\ \vec{y} \cdot \vec{c} &= (y_1, y_2, y_3) \cdot (1, 1, 1) = y_1 + y_2 + y_3, \\ \vec{x} \cdot \vec{c} &= x_1 + x_2 + x_3, \\ \vec{c} \cdot \vec{c} &= 3. \end{aligned}$$

Sistem enačb za p in q lahko tako prepišemo v enačbi

$$p(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + q(x_1 + x_2 + x_3) = y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 \quad (3)$$

$$p(x_1 + x_2 + x_3) + 3q = y_1 + y_2 + y_3. \quad (4)$$

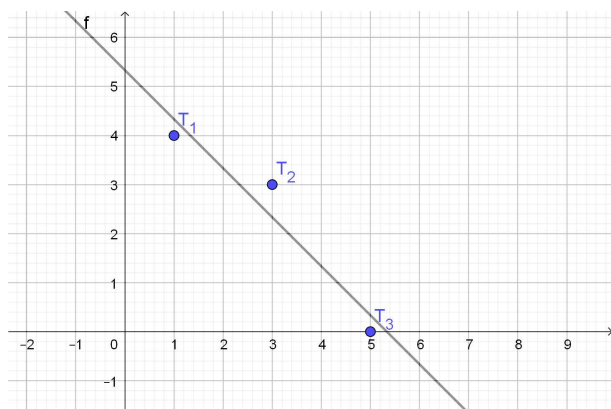
Primer

Vzemimo točke $(1, 4)$, $(3, 3)$, $(5, 0)$ v ravnini. Tako je $x_1 = 1$, $y_1 = 4$ itd. Če te podatke vstavimo v (3) in (4), dobimo

$$\begin{aligned} 35p + 9q &= 13, \\ 9p + 3q &= 7. \end{aligned}$$

Pomnožimo drugo enačbo z -3 in prištejmo prvi, pa dobimo $8p = -8$ in tako je $p = -1$. Izračunamo še $q = \frac{16}{3}$. Premica, ki se najbolj prilega danim trem točkam, ima torej enačbo $y = -x + \frac{16}{3}$.

Narisana je na sliki 3.



SLIKA 3.

Regresijska premica

Brez težav boste verjeli, da formuli (3) in (4) lahko posplošimo na primer n točk in dobimo za parametra p in q regresijske premice enačbi:

$$\begin{aligned} p(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + q(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \\ = y_1x_1 + y_2x_2 + \dots + y_nx_n, \\ p(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + nq = y_1 + y_2 + \dots + y_n. \end{aligned}$$

Na koncu povejmo še nekaj o zgodovini metode najmanjših kvadratov. Izvira iz potreb astronomov in geodetov po povečanju natančnosti z večkratnimi meritvami. Dubrovčan Rudjer Bošković je leta 1757 predlagal kriterij za najboljšo aproksimacijo, ki bi na sliki 2 pomenil najti premico, pri kateri je največje odstopanje najmanjše, se pravi, največja med rdečimi daljicami naj bo kolikor je mogoče kratka.

Slavni francoski matematik Pierre Simon Laplace (1754–1827) je avtor izredno vplivne monografije (v petih knjigah) o nebesni mehaniki *Traité de mécanique céleste*. Laplace je predlagal minimiziranje vsote dolžin rdečih daljic na sliki 2.

Francoz Adrien-Marie Legendre je leta 1805 prvi jasno predstavil metodo najmanjših kvadratov. Naredil je tudi primerjavo z Laplaceovo metodo pri računanju oblike Zemlje. Uporabil je kar Laplaceove po-

datke. Astronomi in geodeti so hitro razumeli prednosti nove metode.

Matematik Carl Friedrich Gauss (1777–1855), ki je kasneje dobil naziv *knez matematikov*, je že leta 1801 uporabil metodo najmanjših kvadratov pri določitvi orbite pritlikavega planeta Cerere. To je odkril italijanski astronom Giuseppe Piazzi. V dobrem mesecu je opravil 24 opazovanj. Potem je zbolel, med njegovo boleznijo pa je Cerera izginila v siju Sonca. Podatke je Piazzi kasneje poslal trem drugim astronomom. Ko naj bi bilo opazovanje spet mogoče, planeta niso več mogli najti. Štiriindvajsetletni Gauss je izdelal novo metodo za približno določevanje orbit in po intenzivnem računanju s Piazzijevimi podatki eno leto po odkritju sporočil, kje naj iščejo Cerero (Ceres). Dejansko so jo našli pol stopinje od predvidenega mesta.

Takratni astronomi si verjetno niti v sanjah niso mogli predstavljati, da bo dobri dve stoletji kasneje (leta 2015) Cerero obiskala in jo od blizu proučila vesoljska sonda Dawn. Vsi prej omenjeni so bili del znanstvene skupnosti, ki je postavila temelje, da je bilo to sploh mogoče.

Gaussova trditev, da je metodo najmanjših kvadratov razvil že leta 1795 (a tega ni objavil), je vodila v spor z Legendrom. Kasneje pa je Gauss veliko uporabnost metode utemeljil z verjetnostnim računom in to tudi objavil.

× × ×

Križne vsote

REŠITEV S STRANI 8

↓↓↓

	5	7		
8	2	6	11	
11	3	1	7	15
		8	1	7
		11	3	8

× × ×

Fizika pomaga matematiki



BORIS BAŠIĆ IN ALIJA MUMINAGIĆ

→ V tem kratkem prispevku bomo pokazali, kako uporabimo znanje o poševnem metu za dokaz adicijskega izreka

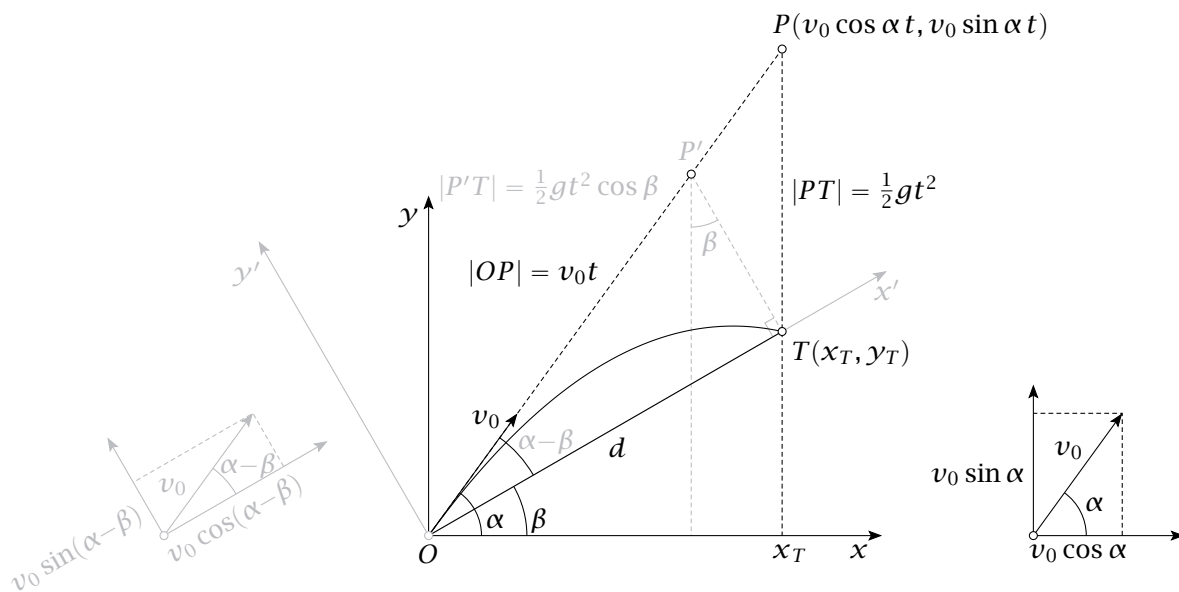
■ $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta.$

Žoga se na začetku nahaja na vznožju klanca z naklonom β . Vržemo jo po klanecu navzgor z začetno hitrostjo v_0 in pod kotom $90^\circ \geq \alpha > \beta$ glede na vodoravnico. Žoga pade na klanec v točki T , kot kaže skica na sliki 1. Izhodišče koordinatnega sistema O postavimo v točko, v kateri se nahaja žoga na začetku, ko začnemo meriti čas $t = 0$. Koordinatna ravnina xy je navpična, tako da tirnica žoge leži v njej, os x je vodoravna, os y pa navpična. Zračni upor zanemarimo.

Znanje fizike nam pomaga izraziti lego žoge ob poljubnem času t :

■ $x_z(t) = v_0 \cos(\alpha)t$ (1)

$y_z(t) = v_0 \sin(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2.$ (2)



SLIKA 1.

Žoga pade na klanec v točki T ob času t_T . Koordinate točke T ($v_0 \cos(\alpha)t_T, v_0 \sin(\alpha)t_T - \frac{1}{2}gt_T^2$) določimo na sledeč način. Označimo domet žoge $|OT| = d$. V pravokotnem trikotniku $Ox_T T$ je

$$\cos \beta = \frac{x_T}{d} \iff d \cos \beta = x_T \iff d \cos \beta = v_0 \cos(\alpha)t_T \quad (3)$$

in

$$\sin \beta = \frac{y_T}{d} \iff d \sin \beta = y_T \iff d \sin \beta = v_0 \sin(\alpha)t_T - \frac{1}{2}gt_T^2. \quad (4)$$

Če pomnožimo enačbo (3) s $\sin \beta$ in enačbo (4) s $\cos \beta$ ter izraza med seboj odštejemo, dobimo

$$v_0 \cos(\alpha) \sin(\beta)t_T = v_0 \sin(\alpha) \cos(\beta)t_T - \frac{1}{2}gt_T^2 \cos \beta,$$

od koder sledi

$$t_T = \frac{2v_0(\sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta))}{g \cos \beta}. \quad (5)$$

Če koordinatni sistem zasukamo za kot β v nasprotni smeri vrtenja urinih kazalcev v sistem $x'y'$, ki je na sliki 1 označen sivo, v tem sistemu enačbo gibanja žoge zapišemo takole:

$$x'_z(t) = v_0 \cos(\alpha - \beta)t - \frac{1}{2}g \sin(\beta)t^2 = d \quad (6)$$

$$y'_z(t) = v_0 \sin(\alpha - \beta)t - \frac{1}{2}g \cos(\beta)t^2 = 0. \quad (7)$$

Upoštevali smo, da ima v zavrtenem sistemu težni pospešek komponenti različni od nič vzdolž obeh osi in gibanje vzdolž vsake od osi je enakomerno pospešeno. Zadnja dva izraza ustrezata pogoju, da žoga pade na klanec, to je ob času t_T .

Iz enačbe (7) izrazimo čas, ob katerem žoga pade na klanec:

$$t_T = \frac{2v_0 \sin(\alpha - \beta)}{g \cos \beta}. \quad (8)$$

Iz enačb (5) in (8) sledi

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta),$$

to je zveza, ki smo jo želeli dokazati. Nadalje lahko iz (1) in (2) zapišemo (glej sliko 1)

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{x_T^2 + y_T^2} \\ &= \sqrt{v_0^2 \cos^2(\alpha)t_T^2 + v_0^2 \sin^2(\alpha)t_T^2 - v_0 \sin(\alpha)gt_T^3 + \frac{1}{4}g^2t_T^4} \\ &= \sqrt{v_0^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)t_T^2 - v_0 \sin(\alpha)gt_T^3 + \frac{1}{4}g^2t_T^4} \\ &= \sqrt{v_0^2t_T^2 - v_0 \sin(\alpha)gt_T^3 + \frac{1}{4}g^2t_T^4}. \end{aligned} \quad (9)$$



→ Iz enačbe (6) sledi

$$\blacksquare d^2 = v_0^2 \cos^2(\alpha - \beta) t_T^2 - v_0 \cos(\alpha - \beta) g \sin(\beta) t_T^3 + \frac{1}{4} g^2 \sin^2(\beta) t_T^4.$$

Iz enačbe (9) pa sledi

$$\blacksquare d^2 = v_0^2 t_T^2 - v_0 \sin(\alpha) g t_T^3 + \frac{1}{4} g^2 t_T^4.$$

Izraza izenačimo in po krajšanju t_T^2 dobimo

$$\blacksquare v_0^2 \cos^2(\alpha - \beta) - v_0 \cos(\alpha - \beta) g \sin(\beta) t_T + \frac{1}{4} g^2 \sin^2(\beta) t_T^2 = v_0^2 - v_0 \sin(\alpha) g t_T + \frac{1}{4} g^2 t_T^2.$$

Enačbo preuredimo v

$$\blacksquare -v_0 \cos(\alpha - \beta) g \sin(\beta) t_T = v_0^2 (1 - \cos^2(\alpha - \beta)) - v_0 \sin(\alpha) g t_T + \frac{1}{4} g t_T^2 (1 - \sin^2 \beta),$$

upoštevamo zvezo $1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$ in izraz nekoliko preuredimo v

$$\blacksquare v_0 \sin(\alpha) g t_T - v_0 \cos(\alpha - \beta) g \sin(\beta) t_T = v_0^2 \sin^2(\alpha - \beta) + \frac{1}{4} g t_T^2 \cos^2 \beta.$$

Iz (8) vstavimo čas in sledi

$$\blacksquare v_0 g (\sin \alpha - \cos(\alpha - \beta) \sin \beta) \frac{2v_0 \sin(\alpha - \beta)}{g \cos \beta} = v_0^2 \sin^2(\alpha - \beta) + \frac{1}{4} g^2 \left(\frac{2v_0 \sin(\alpha - \beta)}{g \cos \beta} \right)^2.$$

Okrajšamo kvadrat začetne hitrosti in težni pospešek v

$$\blacksquare (\sin \alpha - \cos(\alpha - \beta) \sin \beta) \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta} = \sin^2(\alpha - \beta).$$

Pomnožimo s $\cos \beta$ in delimo s $\sin(\alpha - \beta)$:

$$\blacksquare \sin \alpha - \cos(\alpha - \beta) \sin \beta = \sin(\alpha - \beta) \cos \beta.$$

Iz zadnjega izraza, če vstavimo $\alpha - \beta = \gamma \iff \alpha = \beta + \gamma$, končno sledi

$$\blacksquare \sin(\beta + \gamma) - \cos \gamma \sin \beta = \sin \gamma \cos \beta \iff \sin(\beta + \gamma) = \sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma.$$

S tem smo pokazali, da adicijski izrek velja tudi za vsoto kotov.

Literatura

- [1] A. Muminagić, Miš, *matematika i škola*, časopis za nastavu matematike, 100 **20** (2019), str. 214, Element, Zagreb.
- [2] B. Pavković in D. Veljan, *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

× × ×

Vrtinci v toku kapljev in plinov



ANDREJ LIKAR

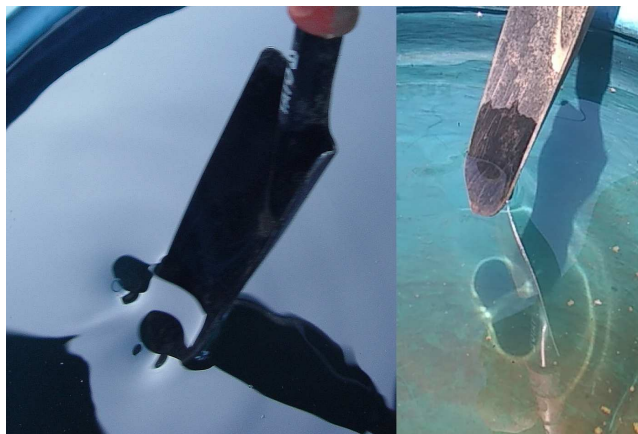
→ V potokih in rekah opazimo vrtince za ovirami ali nenadnimi razširitvami struge. Pri slednjih teče voda v nasprotni smeri glavnega toka. Kajakaši na divjih vodah radi poiščejo vrtince in zapeljejo vanje, da si malo odpočijejo. Tudi v krožniku juhe se pokažeta vrtinca za žlico, ki jo delno potopljeno povlečemo po gladini. Velike vrtince opazimo pri tornadih, vrtinčastih tropskih viharjih (hurikanih) in ciklonih.



SLIKA 1.

Vrtinec v reki

Izračunavanje gibanja kapljev in plinov ni preprosto. Čeprav velja za njihovo gibanje le Newtonov zakon, ki povezuje silo na majhen delec tekočine ali plina z njegovim pospeškom, so enačbe, ki jih izpeljemo, zapletene in jih v večini inženirsko po-



SLIKA 2.

Vrtinca za lopatico, ki jo delno potopljeno povlečemo po vodni gladini. Levo vidimo vrtinca v odbiti svetlobi, ker se gladina v vrtincu nekoliko vdre, na desni pa v prepuščeni svetlobi na dnu posode

membnih primerov obvladamo le z velikimi računalniki. V področju hudo zvrtničenega toka (turbulence) pa tudi ti odpovedo. Do popolnega razumevanja teh enačb se tudi matematikom še ni uspelo dokopati, zato je gibanje tekočin in plinov eno redkih še neresenih področij klasične fizike.

Kljub tem načelnim težavam pa so praktiki razvili kopico dobro delujočih navodil (algoritmov), po katerih kar natančno izračunamo tok tekočin. Z izrazom tekočina zajamemo tako kapljevine, torej tekočine v vsakdanjem pomenu besede, kot tudi pline. V Preseku se teh podrobnih navodil ne bomo lotevali, lahko pa pokažemo nekaj izidov takih računov. Spet ne bomo računali zapletenih nalog, omejili se bomo na dobro pregledno dvodimenzionalno gibanje, kot ga opazimo pri vodnem toku v rekah in potokih ali pri žlici v juhi.

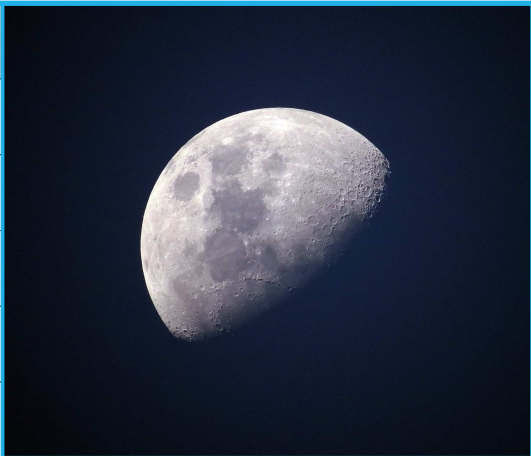
18

nadaljevanje
na strani





	BRITANSKI SOCIALNI REFORMATOR (ROBERT)	
	DVOJNA PRAVLILNA ŠTIRI-STRANA PIRAMIDA	
	POMEMBEN AVSTRILJSKI TEORETIČNI FIZIK	
	PRISTAŠ KREPITIVE VLOGE DRŽAVE V DRUŽBI	
	NIKA NOVAK	
NAJVEČJI OTOK JAPON, OTOČJA RIJUKJU	KRAJ PRI LJUBLJANI	NAŠA DRUŽBA ZA AVTOCESTE

VNETNI IZPUŠCAJ V USTIH	AFRIŠKA SREDO- ZEMSKA DRŽAVA	AMERIŠKI REŽISER (JULES, NIKOLJ V NEDELJO)	OBSTOJ STVARI, DANOST	ROK GOLOB	AVTOR MARKO BOKALIČ	NAŠA RADIJSKA MODERA- TORKA (IDA)	MINERAL TITANOV DIOKSID	OBRAT V PIVO- VARNI	GLAVNO MESTO ALBANIJE							
					NASTAVEK POGANJKA GLASBENI- CA, KI IGRA KLAVIR											
						7										
				BABILON, BOGINJA LJUBEZNI KRALJICA PRI SAHU												
					PRAVO IME IGRALKE ITE RINE											
ODPORN, JEKLU PODOBNA LAHKA KOVINA						STARA PREDIVNICA TRAVNIŠKA ZDRAVILNA ZELIKA										
726-KARAT, DIAMANT, NAJDEN V JUŽNI AFRIKI	HRUP SLOVANSKO SVETIŠČE NA NEM, OTOKU RÜGEN						INDUS- TRIJSKA BARVNA LESTVICA OSABNOST				RAZISKO- VALNA VRTINA V TLA ALI SNOV	OBIRANJE GROZDJA	ROMSKI GLASBENIK (TRAJA) BRIZANI	MITIČNO BIVALIŠČE UMRLIH	ANGLEŠKI IGRALEC (LAURENCE)	ANGLEŠKA IGRALKA REDGRAVE
		NIZOZEM, POMORŠČAK (ABEL) ČUDNO BITJE	5						ANGLEŠKI IGRALEC IN DRAMATIK (PETER)							
				TEŽA OVOJNINE NAJVIŠJA NA IZPITU JE DESET					PRAVO- KOTNICA NARAVO- SLOVEC GALVANI							
14			ODPRTINA V STENI SPLETNA DOMENA ITALIJE					FR. FIZIK, TEORETIK MAGNETIZ- MA (PAUL) ETIČNOST						2		
					AFRIŠKA KRAVJA ANTILOPA DANIEL SVENŠEK					TALENT DOLGO- DLAKO HIMALAJ, GOVEDO				VOLILNA ENOTA SPODNJA PLOSKEV POSODE		
				SKLADA- TELJ BOŽIČ ZLEZA ČEŠERIKA									TON MED C IN D OTO VRHOVNIK			
			NEČISTOČA NAŠ POKOJNI IGRALEC (ALI)				6				STAREJŠI BRITANSKI POP PEVEC (TOM)				9	
NESTABILNI OSNOVNI DELCI, PI-MEZONI	NAŠ FIZIK IN ELEKTRO- TEHNIK (ALEŠ)	ZVRST ZABAVNE GLASBE REKATIVNO LETALO			HAZARDNA IGRA S KARTAMI VODI JO PREMIER						PEVKA Z ZELENO- RTSKIH OTOKOV (CESARIA)					
				MATEMATIK VIDAV					RAČUNAL- NISKA ENOTA ZA KOLIČINO PODATKOV	ŠPANSKI NOGOMETNI VRATAR CASILLAS						
			12	FERI LAINŠČEK AM. JAZZIST (KING) COLE			SVILEN PAS PRI KIMONU									
							ROČNA RIBIŠKA MREŽA RADO LENČEK									
		RAZSTA- VITEV, RAZVE- LJAVITEV														
		VELIKO JEZERO NA FILIPINSKEM OTOKU LUZONU IN VULKAN SREDI TEGA JEZERA		15				SPLETNA DOMENA TURČIJE								

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite osebni podatki v obrazec na spletni strani www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **1. februarja 2020**. Med oddanimi bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **1. februarja 2021**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

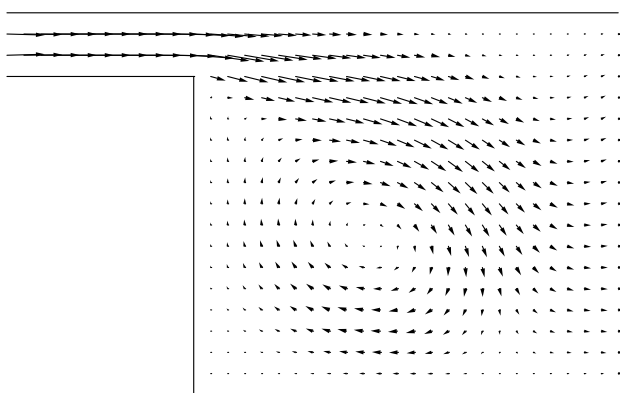
× × ×



15

nadaljevanje
s strani

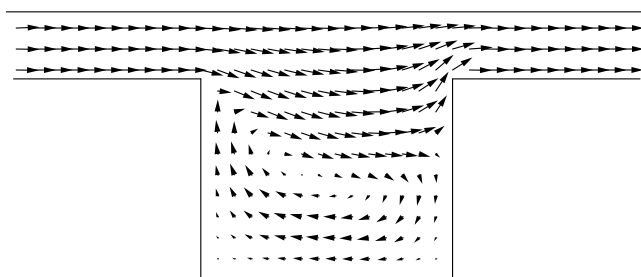
Najprej si oglejmo vodni tok pri nenadni veliki pravokotni razširitvi struge. Na sliki 3 je prikazan tok reke iz ptičje perspektive z vektorji hitrosti površine. Pri dovolj veliki hitrosti vode v glavnem toku opazimo vrtinec za razširitvijo. Glede na hitrost vode v strugi pred razširitvijo so hitrosti v vrtincu sicer majhne, a vrtinca ni moč spregledati. Na sliki 4 je prikazan tok pri nenadni razširitvi in poznejši zožitvi struge. Tu je vrtinec zasedel celotni razširjeni del struge. Pri tretjem primeru na sliki 5 pa imamo v strugi prečno oviro, ki prisili tok, da se razdeli na dva dela skozi obe ožini ob bregovih struge, na sredi pa miruje. Za oviro vidimo dva izrazita vrtinca, ki ju vidimo tudi za žlico v juhi.



SLIKA 3.

Izračunane hitrosti delov vode pri nenadni razširitvi struge. Viden je vrtinec ob razširitvi.

Nekoliko preseneča, da so enačbe za opis tokov tako zapletene. Saj vemo, da je Newtonov zakon preprost, tudi enačbe za posamezne primere, ki slonijo na njem, navadno niso zelo nepregledne in zamotane. A vemo, že pri gibanju togih teles, npr. vrtavk, enačbe niso več preproste, vpeljati moramo vrtilno količino, pa vztrajnostne momente, navore ... Pri tekočini so njeni deli v tesnem stiku, drsijo drug mimo drugega, se prerivajo in delujejo s silami drug na drugega. Vpeljati moramo od kraja odvisen tlak, ki to prerivanje dovolj dobro opiše. Pri kapljevinah je res tako, pri plinih pa je med molekulami dovolj prostora in se te večinoma prožno odbijajo druga od druge. Kaj, ko bi poskusili izračunati tok plina kar na tej osnovi? Prožni trk ni zelo zapleten pojav, znamo



SLIKA 4.

Tok vode pri razširitvi in poznejši zožitvi struge. V razširjenem delu kraljuje vrtinec. Vektorji hitrosti v vrtincu so zaradi preglednosti nekoliko povečani.

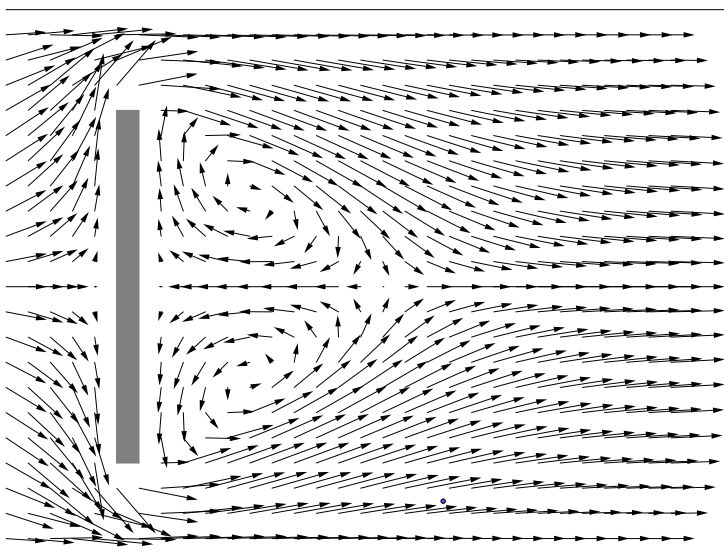
ga natančno obravnavati. Tlaka nam ni potrebno vpletati, saj bo gostota molekul povedala, kolikšen je na danem mestu, če nas bo to kaj zanimalo. Več molekul na nekem kraju bo s trki poganjalo molekule na mesto, kjer jih je manj. Kljub povsem elastičnim trkom pa viskoznost plina ni enaka nič, saj se s trki in potovanjem med trki prenaša tudi gibalna količina. Tako je tudi pri ploščicah.

Pa poskusimo! Obravnavali bomo prožni trk okroglih ploščic, ki se brez trenja in vrtenja gibljejo po vodoravni ravnini med bregovi struge. Prožnega trka dveh enakih ploščic ni težko obravnavati, saj je to del rednega pouka fizike.

Na sliki 6 sta ploščici ravno v stiku, enotski vektor, ki povezuje njuni središči, smo označili z $\vec{e}$. Po trku se obema ploščicama spremeni gibalna količina. Prvi za, denimo $-G\vec{e}$, pri drugi pa za $G\vec{e}$ zaradi tretjega Newtonovega zakona, ki pravi, da je sila ene ploščice na drugo nasprotno enaka sili druge na prvo, čas delovanja obeh sil pa je enak. Sili delujeta le vzdolž vektorja $\vec{e}$, ker se ploščica pri trku vda le pravokotno na obod. Če bi želeli vpeljati dodatno viskoznost, bi vpeljali tudi sili, pravokotni na $\vec{e}$. Da določimo velikost G gibalne količine $G\vec{e}$, upoštevamo, da se skupna kinetična energija pri trku ohrani, torej

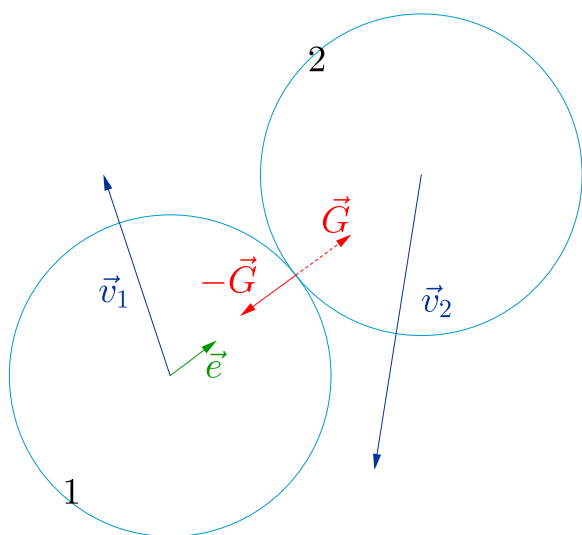
$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}m(\vec{v}_1 - \frac{G}{m}\vec{e})^2 + \frac{1}{2}m(\vec{v}_2 + \frac{G}{m}\vec{e})^2.$$

Na levi strani smo zapisali kinetično energijo ploščic



SLIKA 5.

Izračunana vrtinca za ploščato oviro v strugi. Zaradi preglednosti so vektorji hitrosti v vrtincu povečani, v režah med strugo in oviro pa močno zmanjšani.

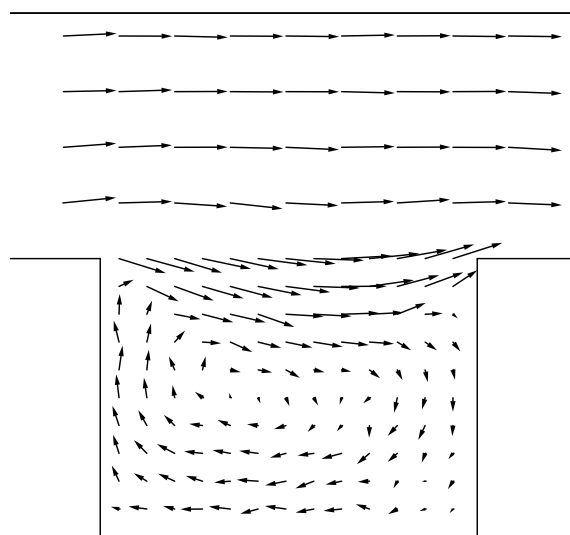


SLIKA 6.

Ploščici med trkom – izmenjana gibalna količina $G\vec{e}$ je v smeri veznice obeh središč. Enotski vektor $\vec{e}$ kaže od enega središča do drugega, vektor, ki ju povezuje, je torej $2r\vec{e}$, kjer je r polmer ploščice.

pred trkom, na desni pa po njem. Ko maso ploščice m pokrajšamo, sledi po krajšem računu

$$\frac{G}{m} = \vec{e} \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2),$$

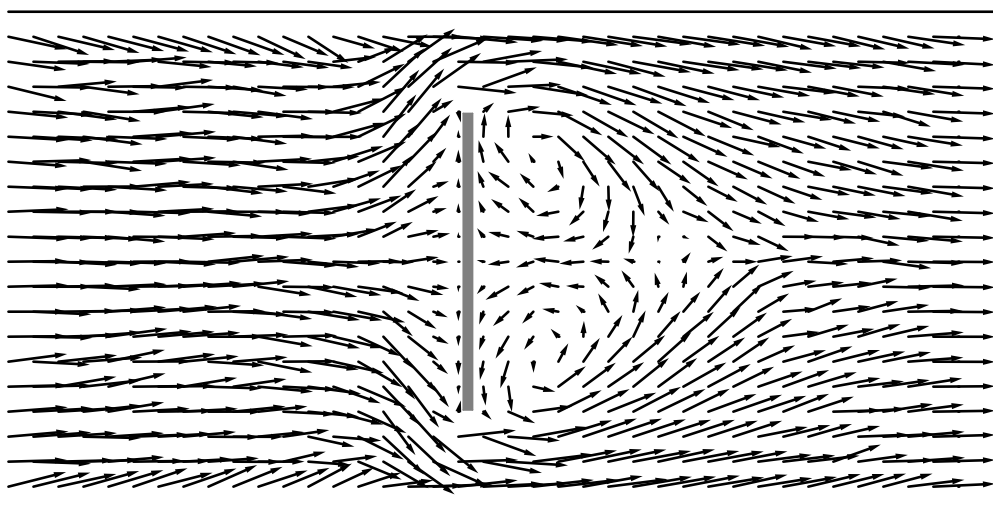


SLIKA 7.

Povprečne hitrosti ploščic v strugi z razširitvijo. Dobljene hitrosti v razširjenem delu struge so presenetljivo podobne tistim na sliki 4.

iz tega pa takoj dobimo hitrosti ploščic po trku. Enotski vektor $\vec{e}$ je lahko v poljubni smeri, določiti ga moramo za vsak trk posebej. Pri sledenju ploščic zaznamo trk, ko se središča približata bolj kot na razdaljo premera. Vmes ploščice premikamo glede



**SLIKA 8.**

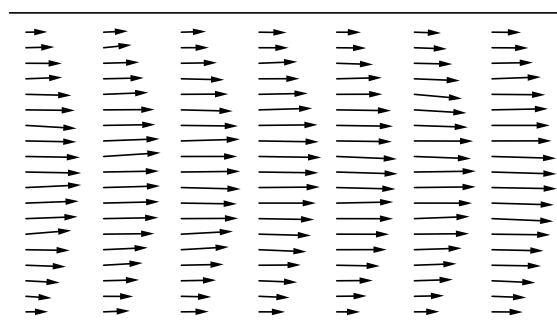
Povprečna hitrost ploščic, ki naletijo na ploščato oviro. Primerjaj s sliko 5.

na njihove hitrosti in čas med zaporednimi koraki. Na meji struge se ploščice odbijejo po odbojnem zakonu. Strugo v mislih pregradimo na zgornjem in spodnjem koncu toka. Ko doseže ploščica spodnjo pregrado, jo vrnemo na zgornjo z enako hitrostjo. Tako ponazorimo tok tekočine. Pri prečni oviri moramo le del ploščic vračati na začetek, ostale odbijemo nazaj v strugo. Tako zagotovimo razmere, ko je dovolj ploščic za oviro, da pridemo do smiselnega tlaka tekočine za oviro. Prav tako po trku ploščice s to oviro postavimo njeno vodoravno komponento hitrosti na nič, kar ustreza polzenju tekočine ob oviri.

Pri naših računih smo spremljali gibanje stotih ploščic, bile pa so kar velike, njihov premer je bil kakšno desetinko širine reke. Ploščice se gibljejo navidez zelo neurejeno, vrtince lahko le slutimo. A pri povprečenju njihovih hitrosti na danem mestu hitro pridemo do slik, ki so zelo podobne slikam, ki smo jih dobili z računanem. Tako sta sliki 7 in 8 dvojčici slik 4 in 5. Dalj ko sledimo trkom ploščic, manj je neskladja med slikami. Seveda slednje kažejo naključne nepravilnosti, ki pa se s časom zmanjšujejo. Naključnost je posledica zelo majhnega števila ploščic v primeri s številom molekul v plinu. A podobnost med slikami je prav presenetljiva.

Pri sledenju ploščic nismo upoštevali dodatne viskoznosti tekočine. Pri plinih je že vgrajena s trki, pri vodi pa je prav majhna in jo lahko zanemarimo. Pri numeričnem računanju je ne smemo, drugače postanejo postopki nezanesljivi in ne pridemo do konč-

nih rezultatov. Števila v računalniku namreč hitro narastejo preko obsega, ki ga računalnik še zmore. Brez težav pa lahko vpeljemo dodatno viskoznost tako, da trk ni več elastičen, temveč ena ploščica nekoliko potegne za sabo drugo. S to spremembo smo izračunali tok plina v ravni strugi brez spremembe njene širine. Na sliki 9 smo prikazali rezultate. In res je potek povprečenih hitrosti preko struge blizu paraboličnega, kar dobimo tudi z natančnim analitičnim računom. Takemu toku pravimo laminarni tok, v njem ni vrtincev.

**SLIKA 9.**

Povprečne hitrosti ploščic v vseskozi enako široki strugi, ko smo med ploščicami vpeljali viskozno trenje.

× × ×

Kako daleč je Luna ali skupinska naloga na spletni astronomski olimpijadi



VID KAVČIČ

→ V letošnjem letu so zaradi še preveč znanih razlogov mednarodna tekmovanja odpadla ali pa bila predstavljena v virtualni prostor. Tako je redno mednarodno olimpijado iz astronomije in astrofizike, 14. po vrsti, nadomestila spletna različica GeCAA.

Dijaki slovenske ekipe so na olimpijadi dobili kar nekaj koščkov žlahtnih kovin. **Domen Lisjak** je osvojil **srebrno medaljo**, **Vid Kavčič**, **Urša Mati Djuraki** in **Urban Razpotnik** (vsi Gimnazija Bežigrad) **bron**, **Simon Bukovšek** (Gimnazija Kranj) pa **pohvalo**.

Na GeCAA, ki so jo organizirali estonski astronomi, je sodelovalo več kot 300 dijakov in dijakinj iz 40 držav.

Uvodnik v prispevek

Tradicionalno je del astronomske olimpijade tudi t. i. tekmovanje skupin (Team Competition), v okviru katerega se, bolj za zabavo kot zares, z astronomskimi zagonetkami soočajo skupine naključno izbranih dijakov iz vseh sodelujočih držav.

Letos so bili zaradi tekmovanja na daljavo člani vsake ekipe razporejeni po vsem svetu, kar pa je bila dobra priložnost za izvedbo astronomskih meritev s hkratnimi opazovanji iz različnih krajev na Zemlji, katerih cilj je bil določitev razdalje do Lune.

Oddaljenost Lune od Zemlje se sčasoma spreminja zaradi ekscentričnosti njene tirnice. Ko je Luna Zemlji najbližje (je v **perigeju**), je od nje oddaljena približno 360 000 km (Če je takrat Luna tudi v fazi ščipa oz. polne Lune, jo zaradi največje navidezne

velikosti imenujemo kar *Superluna*.), največja oddaljenost Lune od Zemlje (**apogej**) pa je približno 405 000 km.

Naloga letošnje GeCAA je bila sledeča:

Z ekipnim načrtovanjem in izvajanjem vrste opazovanj ter izračunov določite razdaljo središča Lune od središča Zemlje ob 12.00 UT 6. oktobra 2020, natančno, kot le lahko.

Vsaka ekipa je tako morala pripraviti predstavitev o opazovalnem delu in meritvah ter njihovo obdelavo. Zagotovo je bil to precejšen izziv.

Poskusimo torej predstaviti nekaj idej, kako bi takšno nalogo lahko teoretično rešili, prav tako pa bomo predstavili, kako so zadeve dejansko potekale.



SLIKA 1.

Polna Luna, posneta na dan reformacije.





SLIKA 2.

Pri fotografiranju Lune nam zagodejo oblaki. Kljub zakritju lahko včasih napravimo kar dobre posnetke. Oblaki so vidni kot neobičajni potemnjeni deli.

Teoretični poduk – metode merjenja oddaljenosti Lune od Zemlje

Oddaljenost do Lune je mogoče izračunati na več različnih načinov; predstavimo nekaj različnih.

Paralaksa

Razdaljo do relativno bližnjih vesoljskih telesnih teles lahko določamo s paralakso.

Paralaksa je razlika v navidezni legi objekta. Objekt namreč opazujemo iz različnih smeri, opazovališči se tudi razlikujeta glede na ozadje in sta med seboj oddaljeni za določeno dolžino. Le-to podamo kakor kot med premicama, ki opisujeta ti dve smeri pogleda na vesoljsko telo. Razdaljo med opazovališčema pa imenujemo *baza*.

Čeprav se tega redko zavemo, ja paralaksa zelo pomembna za naše življenje. Imamo dve očesi, ki sta razmaknjeni za določeno razdaljo, *bazo*, kar nam omogoča, da (bližnji) predmet s posameznim očesom vidimo pod drugačnim kotom. To nam nudi *občutek globine*. Če pogledamo npr. svinčnik, ki ga držimo pred seboj, enkrat samo z levimo, drugič samo z desnim očesom, svinčnik glede na ozadje vidimo na različnih mestih.

Paralakso pri Luni je opazil že starogrški astronom Hiparh (okoli 190–120 pr. n. št.). Ker je poznal razdaljo med obema lokacijama in imel zabeležke v zvezi z lego Lune glede na Sonce med mrkom, je lahko s pomočjo trigonometrije določil razdaljo do

Lune. Sledimo torej Hiparhu in razmislimo, kako bi se izziva lotili v naši nalogi.

Določitev baze

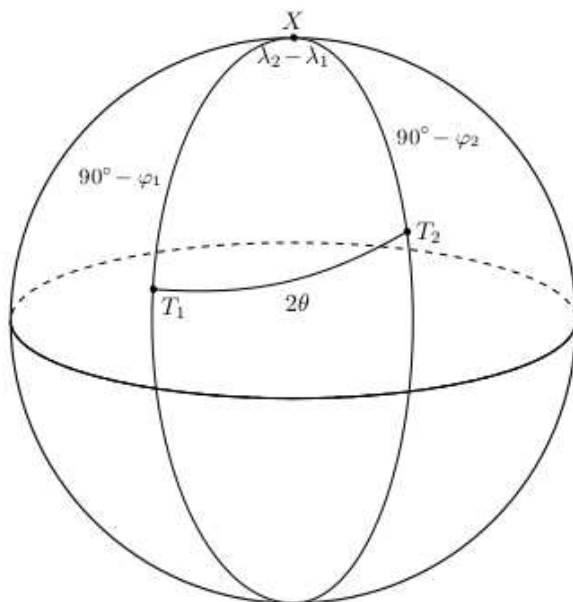
V splošni astronomiji poznamo dve posebej imenovani vrsti paralakse, ki se imenujeta na podlagi tega, kaj vzamemo za bazo – za telesa na večjih oddaljenostih je za natančnost izračuna priporočljivo vzeti večjo bazo.

Kot paralakse, pri katerem iz opazovanega telesa vidimo polmer Zemlje (bazo), ki stoji pravokotno na zorni smeri, imenujemo **horizontska/dnevna paralaksa** telesa. Uporabljamo jo pri računanju oddaljenosti Sonca, Lune in ostalih teles v Osončju.

Kot paralakse, pri katerem iz opazovanega telesa vidimo srednjo razdaljo med Zemljo in Soncem (1 astronomsko enoto; 1 a.e. $\approx 150\,000\,000$ km), imenujemo **letna paralaksa** telesa. Uporabljamo jo pri merjenju oddaljenosti bližnjih zvezd, ki na nebesni sferi med letom opisujejo t. i. *paralaktične elipse*.

Pri našem projektu pa se pojavi težava, saj nismo mogli izbrati nobene od zgornjih standardnih možnosti. Oddaljenost med kraji opazovanja, med mano in posameznim kolegi v ekipi ni bila enaka polmeru Zemlje.

Našo bazo oz. baze je bilo treba izračunati. Za poenostavitev problema predpostavimo, da je Zemlja kroglja s polmerom $R = 6370$ km. Koordinate opazovališč so $T_1 (\varphi_1, \lambda_1)$ in $T_2 (\varphi_2, \lambda_2)$. Ob predpostavki, da je površje Zemlje sferično, lahko uporabim



SLIKA 3.

obrazce sferne trigonometrije, da dobimo kotno oddaljenost med krajema. Narišimo dovolj verno skico in poiščimo trikotnik, iz katerega bi lahko dobili kotno oddaljenost med krajema.

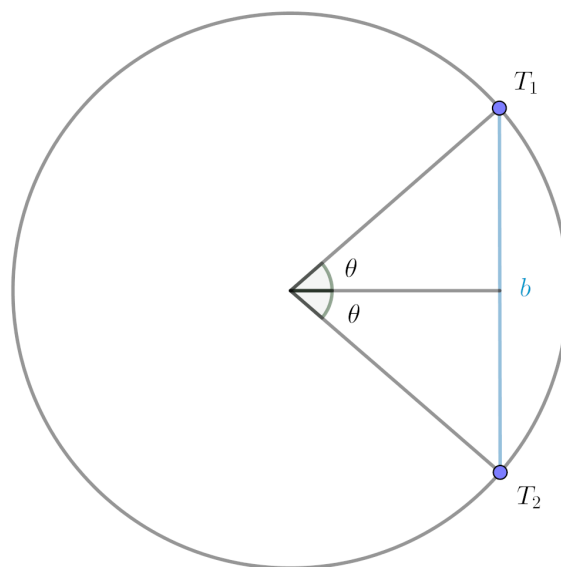
Kosinusni izrek v sferični trigonometriji v splošnem zapišemo kot

$$\cos a = \cos \alpha \sin b \sin c + \cos b \cos c. \quad (1)$$

Poglejmo sferični trikotnik T_1T_2X in zanj zapišimo kosinusni izrek:

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos(\lambda_1 - \lambda_2) \sin(90^\circ - \varphi_1) \sin(90^\circ - \varphi_2) \\ &\quad + \cos(90^\circ - \varphi_1) \sin(90^\circ - \varphi_2) \\ \cos 2\theta &= \cos(\lambda_1 - \lambda_2) \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \\ 2\theta &= \arccos [\cos(\lambda_1 - \lambda_2) \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ &\quad + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2]. \end{aligned}$$

Dobili smo izraz za kotno oddaljenost med krajema na Zemlji 2θ . Iz nje moramo dobiti bazo za paralakso. Baza je tako dolžina zveznice med krajema, ki



SLIKA 4.

gre skozi Zemljo in ne razdalja med krajema na površju Zemlje. Označimo jo z b . Iz skice 4 izpeljemo enačbo.

Velja

$$b = 2R_{\oplus} \sin \theta.$$

Enostavni razmislek, zakaj je temu tako, pa prepustim bralcu. Bazo b torej imamo.

Določitev kota paralakse

Kot paralakse dobimo tako, da vsak od opazovalcev izmeri navidezne nebesne koordinate Lune iz svojega kraja, še najlažje s pomočjo teleskopa. Kotna oddaljenost med izmerkoma predstavlja paralakso. Predstavimo to še računsko. Naj bodo izmerjene koordinate $I_1(\delta_1, \alpha_1)$ in $I_2(\delta_2, \alpha_2)$. Kotno oddaljenost smo, sicer na primeru Zemljinega površja, že izpeljali, zato se tokrat izognimo izpeljavi in kar zapišimo

$$p = \arccos [\cos(\alpha_1 - \alpha_2) \cos \delta_1 \cos \delta_2 + \sin \delta_1 \sin \delta_2]$$





Določitev razdalje Lune od opazovalca

Ko imamo tako bazo in kot paralakse, lahko ocenimo oddaljenost Lune:

$$d = \frac{b}{p}.$$

V enačbi je p v radianih.

Kotna velikost

Oddaljenost Lune lahko določimo tudi iz kotne velikosti Lunine ploskvice. Ta metoda je tako računsko kot izvedbeno enostavnejša od paralakse, vendar pri njej koristimo podatek po Luninem polmeru; če npr. podamo podatek o Luninem polarnem polmeru $R_L = 1736$ km in kotno velikost (kotni polarni premer) Lune δ , potem njeno oddaljenost od opazovalca v tem trenutku s pomočjo skice 3 opišemo z izrazom

$$d = \frac{R_L}{\tan \frac{\delta}{2}} \approx \frac{2R_L}{\delta},$$

kjer poudarimo, da v zadnjem koraku zahtevamo, da je kot δ v radianih.

Paziti moramo, da pri taki nalogi razmislimo o vplivu ozračja, ki povzroča lom svetlobe (refrakcijo). Ker je refrakcija odvisna od višine nad obzorjem, je Luna (tudi Sonce, mimogrede) navidezno nekoliko sploščena, kar je najboljše vidno, ko je Luna nizko nad obzorjem.

Spremembo (povečanje) kotne višine nebesnega telesa nad obzorjem R za telesa z višino, večjo od 15° , lahko približno opišemo z enačbo

$$R(h > 15^\circ) = \frac{P}{T} \cdot 0,00452^\circ \cot h.$$

Spremembo (povečanje) kotne višine nebesnega telesa nad obzorjem R za telesa z višino, manjšo od

15° , približamo z drugačno enačbo, saj moramo posebej upoštevati ukrivljenost ozračja:

$$R(h \leq 15^\circ) = \frac{P}{T} \frac{0,1594 + 0,0196h + 0,00002h^2}{1 + 0,505h + 0,0845h^2}.$$

V enačbah zgoraj je h kotna višina v primeru odsotnosti ozračja v kotnih stopinjah, P atmosferski tlak v milibarih (oziroma hektopaskalih) in T temperatura v Kelvinih.

Pri sploščenosti igra veliko vlogo razlika refrakcije na določenem intervalu, npr. za zgornji in spodnji del Lunine ploskvice. Razlika je na obzorju veliko opaznejša kot takrat, ko je Luna višje na nebu. V našem izračunu bomo razliko omenjenih refrakcij zanemarili, saj je bila višina Lune v času fotografiranja okoli 30° .

Vrnimo se torej k izrazu za oddaljenost Lune od opazovalca v danem trenutku.

Seveda pa, ker nas zanima oddaljenost med središčema Lune in Zemlje, in ne oddaljenost med opazovalcem in Luno, moramo dobljeno razdaljo malo prilagoditi, kar pa s pomočjo skice 4 niti ni težko.

Naj bo torej iskana, prava, razdalja D . Po kosinusnem izreku za trikotnik iz skice velja

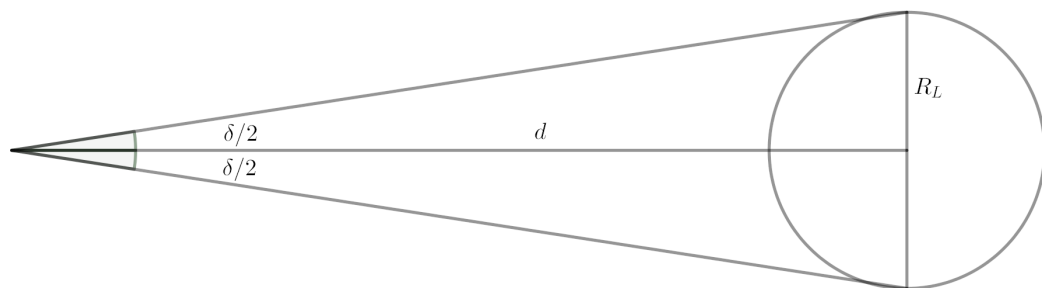
$$D^2 = R_\oplus^2 + d^2 - 2R_\oplus d \cos(90^\circ + h)$$

$$D = (R_\oplus^2 + d^2 + 2R_\oplus d \sin h)^{\frac{1}{2}},$$

s tem pa smo izpeljavo zaključili.

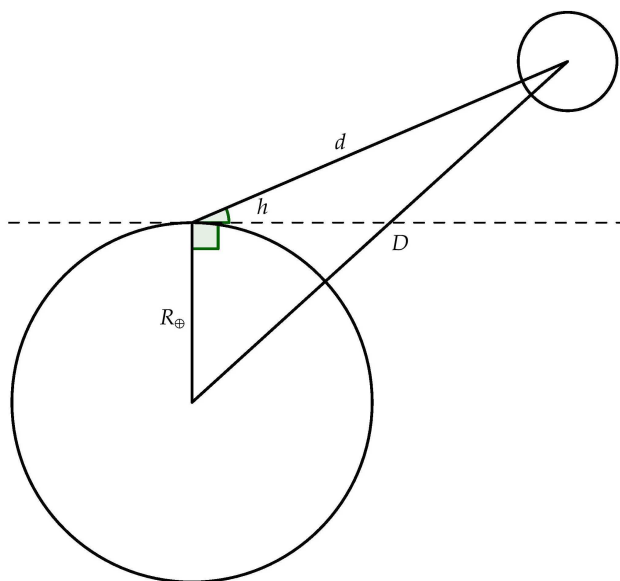
Ostale metode

Obstaja še vrsta metod, s katerimi bi lahko izračunali iskano oddaljenost. V primeru Luninega **mrka** bi si lahko pomagali z velikostjo Zemljine sence, v primeru boljše opremljenosti pa bi oddaljenost lahko izračunali iz časa potovanja **radarskih valov** do Lune in nazaj. Podobno bi lahko storili tudi z **laserskim žarkom**, ki bi se odbil od zrcala, ki ga je na Luni pustila misija Apollo v letu 1969.



SLIKA 5.

S to vinjeto si lahko pomagamo pri izpeljavi razdalje. Upoštevamo, da je Luna daleč stran.



SLIKA 6.

Skica za pretvorbo v pravo razdaljo

In kako smo rešili nalogo?

Pri praktični izvedbi se je, vsaj pri naši skupini, nekoliko zapletlo. Astronomski kolegi so namreč imeli težavo, da položaja Lune s teleskopom niso mogli izmeriti. Prav tako so se ocene kotne velikosti Lune lotili s posnetka, ki so ga napravili s svojim mobilnim telefonom, kar pa je premalo natančno.

Sam sem izvedel meritev oddaljenosti Lune na dan 4. 10. 2020 ob 23.19.

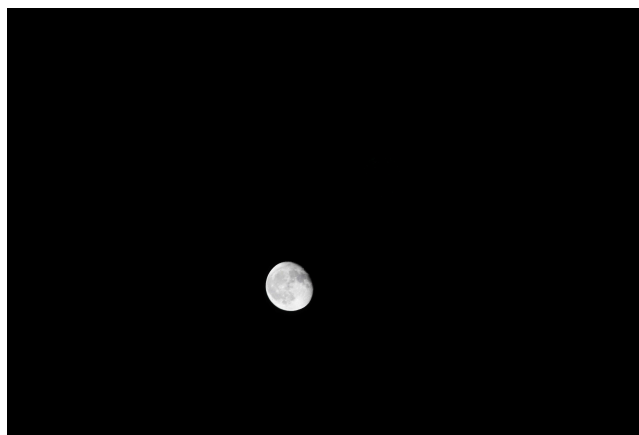
Podatke o fotoaparatu in objektivu prikazuje tabela 1.

Pri fotografiranju je bil objektiv nastavljen na najmanjšo goriščno razdaljo; $f_{min} = 200$ mm. Kotna velikost stranice slikovne točke v radianih je

$$\varphi_0 = \frac{x_0}{f_{min}}.$$

Iz analize posnetka ugotovimo, da na posnetku Lunin premer predstavlja $N = 405$ slikovnih točk. Kotna velikost je tako

$$\varphi = N \frac{x_0}{f_{min}} \approx 0,49774^\circ.$$



SLIKA 7.

Fotografija Lune iz Ljubljane dne 4. 10. 2020 je nastala (zaradi okoliščin) brez stojala.

EOS CANON 1200D		
Daljša stranica čipa	a	22,3 mm
Krajša stranica čipa	b	14,9 mm
Velikost ene slikovne točke	x_0	4,29 μ m
Koeficient efektivne goriščne razdalje	k	1,61
Premer objektiv	D	86 mm
Goriščno razmerje objektiv	F	5,0
Najmanjša goriščna razdalja objektiv	f_{min}	200 mm
Največja goriščna razdalja objektiv	f_{max}	500 mm

TABELA 1.

Podatki o fotoaparatu in objektivu, s katerim smo fotografirali v Ljubljani 4. 10. 2020 ob 23:19, ko je bilo to še dovoljeno.

Izračunano vstavimo v enačbo za oddaljenost Lune od nas, opazovalca:

$$d = \frac{R_L}{\tan \frac{\delta}{2}} \approx \frac{2R_L}{\delta} \approx 399666 \text{ km.}$$

Računamo naprej, za podatke vzamemo $h = 30^\circ$ in $R_\oplus = 6370$ km:

$$D = (R_\oplus^2 + d^2 + 2R_\oplus d \sin h)^{\frac{1}{2}} \approx 402889 \text{ km.} \quad (2)$$





Rezultat je več kot zadovoljiv, saj je bila prava oddaljenost Lune dne 4. 10. 2020 ob 23.19 od središča Zemlje 402307 km, kar je izjemno blizu našemu izračunu. Razlog za odstopanje bi lahko bila refrakcija, vendar ima tu verjetno večji vpliv nenatančnost pri fotografiranju (odsnost stojala, za objektiv bi lahko uporabil teleskop) in obdelava posnetka.

Določevanje razdalje na točno določeni trenutek

Vrnimo se k prvotni nalogi. Ta je zahtevala, da izračunamo oddaljenost Lune na točno določen datum in uro, to je 6. 10. 2020 ob 12.00 UT. Že po teoretičnem razmisleku je stvar težko dosegljiva. Ob tej uri iz naših krajev Lune sploh ne bi mogli opazovati, spet druga težava pa je vreme v naših krajih in prav tako vreme v kraju, v katerem prebiva naš astronomski kolega (če se odločimo za metodo paralakse).

Torej moramo iz več opazovanj konstruirati Lunino orbito, iz katere lahko s spodnjo enačbo dobimo razdaljo v poljubnem trenutku:

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \theta}. \quad (3)$$

Enačba podaja odvisnost razdalje od kota θ med zveznico perigej-Zemlja in zveznico Luna-Zemlja. Kot θ lahko prav tako dobimo iz Lunine faze. Ekscentričnost e pa dobimo iz ocene orbite, ki jo dobimo iz opazovanj. Veliko polos a pa poznamo, saj je konstanta.

Na tak način lahko predvidimo oddaljenost Lune 6. 10. 2020 ob 12.00 UT.

Naloge za bralce

- Iz podatkov, ki jih lahko najdeš v članku, izračunaj srednjo horizontsko paralakso Lune.
- Izračunaj, kako daleč je Soncu najbližja zvezda Proksima Kentavra, če je njena letna paralaksa $768,5 \pm 0,2$ mas. Rezultat podaj v svetlobnih letih z napako.
- **Opomba.** Oznaka mas pomeni mili ločna sekunda; torej tisočinka kotne sekunde.
- Eden od načinov, ki jih astronomi uporabljajo za merjenje oddaljenost Lune, je merjenje s pulzom laserske svetlobe, ki ga proti Luni pošljejo skozi teleskop. Svetloba se odbije od posebnih zrcal, ki so jih astronomi postavili na Luni, in se po odboju vrne v teleskop. Astronomi izmerijo čas med

trenutkom, ko laserski pulz zapusti teleskop, in trenutkom, ko s teleskopom zaznajo vrnjeni pulz. Kolikšna je razdalja med teleskopom in zrcali na Luni, če so astronomi ugotovili, da je bil čas med oddajo pulza in sprejetjem odboja 2,5 sekunde? Za hitrost svetlobe vzemi vrednost 300 000 km/s. Kolikšna pa je razdalja med središčema Zemlje in Lune?

- Zgodila se je čarovnija! Luna se zmanjša v kroglu s polovico svoje prvotne prostornine. Na nebu opazimo, da je njen kotni premer prav tako prepolovil. Izračunaj, za koliko je čarovnija spremenila oddaljenost Lune od Zemlje.
- S fotoaparatom, opisanim v članku, in z Newtonovim reflektorskim teleskopom z goriščno razdaljo $f = 1000$ mm in premerom zrcala $D = 20$ cm smo fotografirali Mars dne 13. 10. 2020, ko je bil v opoziciji s Soncem. Izmerili smo, da njegov premer na posnetku 20 slikovnih točk. Na podlagi teh meritev izračunaj premer Marsa. Predpostavi, da Zemlja in Mars krožita okoli Sonca po krožnih orbitah. Vzemi, da polmer Marsove tirnice $d_M = 1,52$ a.e.
- Pokaži, da kosinusni izrek za sferični trikotnik preide v običajnega, ki ga poznamo iz gimnazijske trigonometrije, če upoštevamo, da so stranice trikotnika izražene s majhnimi. V skrajnem primeru velja zveza $\sin x = x$.
- *Izpelji enačbo elipse v polarni obliki (3) iz definicije elipse. Izpelji podobni enačbi še za parabolo in hiperbolo iz njihovih definicij.

Literatura

- [1] F. Avsec in M. Prosen, *Astronomija*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 1969.
- [2] H. Karttunen in drugi, *Fundamental astronomy*, Springer, Berlin; New York, 2007.

× × ×

www.dmfa-zaloznistvo.si

www.presek.si

Kratek pregled kvantnega strojnega učenja



BOJAN ŽUNKOVIČ

→ **Kvantno strojno učenje je interdisciplinarno raziskovalno področje. Da bi ga lahko razumeli, se bomo posebej posvetili najprej strojnemu učenju in nato kvantnemu računanju. Šele nato bomo pogledali, kako sta področji prepleteni in zakaj je smiselno govoriti o kvantnem strojnem učenju.**

Uvod

Strojno učenje je proučevanje algoritmov za opisovanje pojavov na podlagi podatkov. Gre torej za nabor algoritmov, s pomočjo katerih lahko iz podatkov izluščimo uporabno znanje v obliki verjetnostnih porazdelitev, relacij, pravil ali enačb. Osnovna lastnost algoritmov strojnega učenja je neodvisnost od interpretacije podatkov, zato je domena njihove uporabe zelo široka. Algoritmi strojnega učenja so postali nepogrešljivo orodje v industriji, logistiki, ekonomiji, medicini in farmaciji, kjer se uporabljajo za medicinsko diagnostiko, zaznavanje prevar, za določanje priporočil, prevajanje, razpoznavanje govora in pisave, klasifikacijo tekstov in slik, za nadzor dinamičnih procesov in sistemov, igranje iger, avtonomno vožnjo. Najpomembnejši prednosti strojnega učenja v primerjavi z drugimi pristopi sta, da za uspešno rešitev problema le-to ne potrebuje poznavanja podrobnosti in da se dobljena rešitev izboljšuje s količino podatkov. Poleg zmogljivejših računalnikov je ravno hitro naraščanje količine podatkov tisto, ki je omogočilo zadnji razcvet strojnega učenja. Uspeh slednjega pa je še povečal potrebo po zmogljivejših računalnikih, kar je tudi najpomembnejši motiv za pospešen razvoj kvantnih računalnikov.

Čeprav bi lahko trdili, da so vsi osebni računalniki kvantni, je razlikovanje med klasičnimi računalniki in kvantnimi računalniki upravičeno. Bistvena razlika je v tem, da klasični računalniki operirajo s

klasično informacijo, zakodirano v niz ničel in enic, medtem ko kvantni računalniki manipulirajo osnovne kvantnomehanske objekte, valovne funkcije. Prednost kvantnih računalnikov temelji na dejstvu, da je opis valovnih funkcij s pomočjo klasičnih računalnikov zelo zahteven. Najpomembnejša naloga teoretičnega kvantnega računalništva je torej iskanje načinov izražanja zahtevnih klasičnih operacij s pomočjo dinamike valovnih funkcij, ki jo lahko simuliramo s kvantnim računalnikom. Najznamenitejši primer klasično zahtevne operacije, za katero obstaja učinkovitejši kvantni algoritem, je faktorizacija števil. Toda ta, kot tudi drugi znani kvantni algoritmi, potrebuje zmogljiv kvantni računalnik, ki bi mu uspelo manipulirati valovno funkcijo dovolj dolgo, kar trenutno še ni izvedljivo. Težava pri obvladovanju valovne funkcije je, da mora biti dovolj dobro izolirana od okolice, torej samih naprav, ki jo spreminjajo in na koncu izvedejo meritev. Vsak šum, ki se pojavi zaradi interakcije z okolico, se zelo hitro razširi in pokvari želeni algoritem. Trenutne naprave niso primerne za znane kvantne algoritme, ki potrebujejo veliko kvantnih operacij. Ravno nasprotno je s strojnem učenjem, ki je prilagojeno za delo z velikimi količinami zašumljenih podatkov. Algoritmi strojnega učenja tako predstavljajo naravno (ustrezno) izbiro za uporabo trenutnih kvantnih računalnikov.

Vzajemna uporabnost strojnega učenja in kvantnega računanja je vzpodbudila prepletenost obeh področij. Govorimo ne le o uporabi kvantnih računalnikov za pohitritev klasičnih algoritmov strojnega učenja in prenosa slednjih v kvantno domeno, ampak o splošni razširitvi obzorja obeh področij v smislu uporabe teoretičnih orodij in zastavljanja novih vprašanj. Raziskovalno področje kvantnega strojnega učenja lahko glede na algoritem (klasični ali kvantni) in podatke (klasični ali kvantni) ločimo na štiri podpodročja, kot prikazuje slika 1.





		Algoritem	
		Klasični (C)	Kvantni (Q)
Podatki	Klasični (C)	CC	CQ
	Kvantni (Q)	QC	QQ

SLIKA 1.

Razdelitev področja kvantnega strojnega učenja glede na algoritem in podatke

Opisovanje klasičnih podatkov s klasičnimi algoritmi spada v področje kvantnega strojnega učenja. Sem uvrstimo raziskave, ki uporabljajo metode z enega področja za reševanje problemov na drugem področju. Metode za kompresijo kvantnih stanj lahko npr. uporabimo tudi za kompresijo globokih nevronske mreže, kar ima zelo veliko praktično vrednost zaradi prenosa globokih nevronske mreže na računsko manj zmogljive naprave. Iste metode se lahko uporabljajo tudi za reševanje tipičnih problemov strojnega učenja, kot so klasifikacija, generiranje novih podatkov ali prevajanje. Po drugi strani pa predstavljajo klasične metode strojnega učenja, kot so Boltzmanovi stroji, nevronske mreže in avto-regresivni modeli, nov variacijski pristop k simulaciji večdelčnih kvantnih sistemov, ki omogoča učinkovit opis visoko prepletenih kvantnih stanj. Modeli strojnega učenja so uporabni tudi pri zaznavanju faznih prehodov. V prvo podpodročje kvantnega strojnega učenja lahko uvrstimo tudi klasifikacijo ekspresivnosti nevronske mreže s pomočjo metod za klasifikacijo kvantnih stanj ter druge formalne povezave med koncepti strojnega učenja in kvantne mehanike.

Algoritmi strojnega učenja pa niso uporabni le za obdelavo klasičnih podatkov, ampak tudi kvantnih. Na tem področju lahko izpostavimo dve uporabi strojnega učenja. Prva je kalibracija eksperimentov. Tukaj gre za majhne prilagoditve eksperimentalnih naprav tako, da so pravilno naravnane. Velikokrat je to zelo dolgotrajen postopek, ki ga lahko avtomatiziramo s strojnimi učenjem. Poleg kalibracije je

strojno učenje uporabno tudi pri določanju valovne funkcije ali pri kvantni tomografiji. Kvantna tomografija se ukvarja z vprašanjem, kako lahko najučinkoviteje izmerimo stanje kvantnega sistema (valovno funkcijo). Število meritev, ki jih moramo opraviti, da določimo stanje kvantnega sistema, zelo hitro narašča z njegovo velikostjo. Zato je kvantna tomografija večdelčnih kvantnih sistemov zelo težak problem, pri katerem lahko uporaba strojnega učenja bistveno zmanjša število potrebnih meritev.

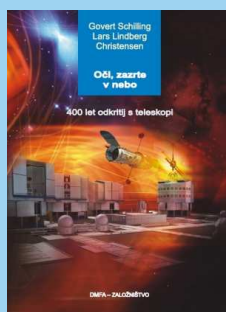
Trenutno najaktivnejše področje kvantnega strojnega učenja je uporaba kvantnih računalnikov za reševanje problemov strojnega učenja. Kvantni računalnik pri tem uporabljamo kot računski pospeševalnik (podobno kot GPU ali TPU), ki implementira zaporedje kvantnih vrat z več parametri. Ti parametri se podobno kot pri standardnem strojnem učenju nevronske mreže prilagajajo glede na vhodne podatke. Poleg optimizacije parametrov kvantnih vrat sta pri tem pristopu zelo pomembna tudi kodiranje klasične informacije v kvantno stanje ter meritev. Čeprav je opisani postopek eksperimentalno zelo zahteven, so kvantne računalnike že uporabili za reševanje lažjih problemov strojnega učenja, kot je klasifikacija števk (MNIST). Čeprav so ti problemi s stališča standardnih metod strojnega učenja zelo preprosti, moramo poudariti, da se zmogljivost kvantnih algoritmov hitro večja z velikostjo kvantnih računalnikov. Ta pa v zadnjih letih močno narašča, zato je zelo težko napovedati, kdaj bodo kvantni algoritmi uspešnejši od klasičnih.

Zadnje podpodročje kvantnega strojnega učenja, obdelava kvantnih podatkov s kvantnimi algoritmi, je zaenkrat še v povojih. Sem spadajo naloge, kot sta obdelava rezultatov kvantnih eksperimentov ali pomoč pri kvantni kriptografiji. Prednost tega pristopa je neposredna manipulacija valovne funkcije brez vmesnega koraka meritve, s katerim lahko zaradi prisotnosti šuma izgubimo veliko informacije.

Predstavljena podpodročja kvantnega strojnega učenja se med seboj prepletajo in dopolnjujejo, nova dognanja pa vplivajo tudi na druga širša področja, kot so fizika, kemija in farmacija. Ravno uporabnost in splošnost kvantnega strojnega učenja sta glavni vzrok za vse večje zanimanje strokovne in širše javnosti za kvantno strojno učenje, ki se mu obeta zanimiva prihodnost.

× × ×

Astronomska literatura



Govert Schilling,
Lars Lindberg Christensen

OČI, ZAZRTE V NEBO
400 let odkritij s teleskopi

136 strani
format 17 × 24 cm
trda vezava, barvni tisk

24,99 EUR



Guillaume Cannat

GLEJ JIH, ZVEZDE
Najlepši prizori na nebu
v letu 2021

format 16,5 × 23,5 cm
mehka vezava

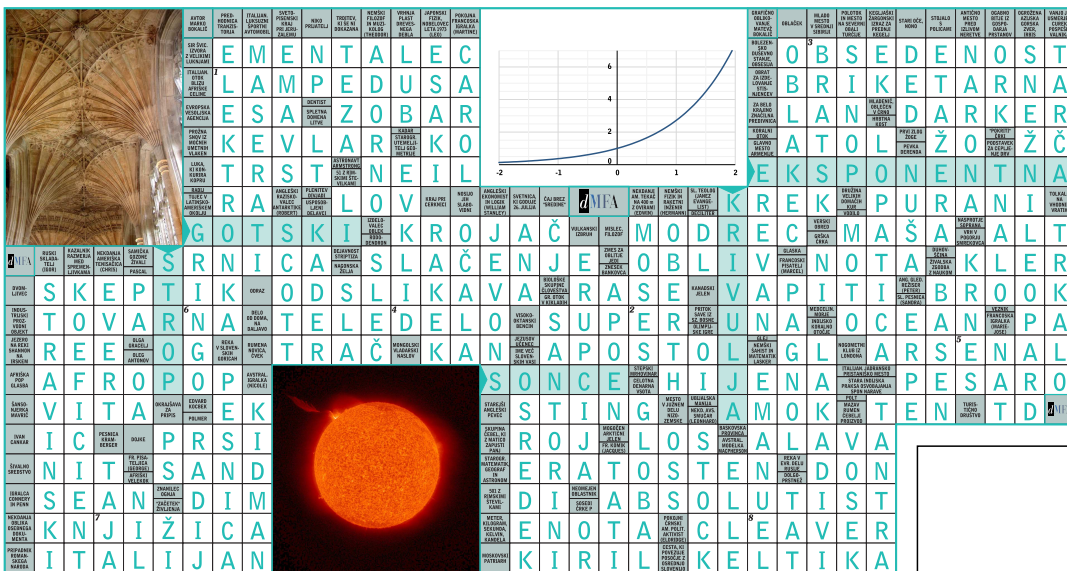
23,90 EUR

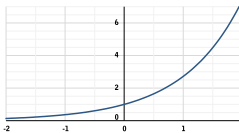
Ponujamo še veliko drugih astronomskih del. Podrobnejše predstavitev so na naslovu:

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/astro/>

Individualni naročniki revije Presek imate ob naročilu pri DMFA-založništvo 20 % popusta na zgornje cene. Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 633.







REŠITEV
NAGRADNE
KRIŽANKE
PRESEK 48/2

→ Pravilna rešitev nagra-
dne križanke iz druge
številke Preseka je **Leb-
denje**. Izmed pravil-
nih rešitev so bili iz-
žrebani ANDREA AŽMAN
iz Blejske Dobrave, MAR-
JAN KURNIK iz Poljčan in
GORAN VUJOVIĆ iz Lju-
bljane, ki bodo razpi-
sane nagrade prejeli po
pošti.

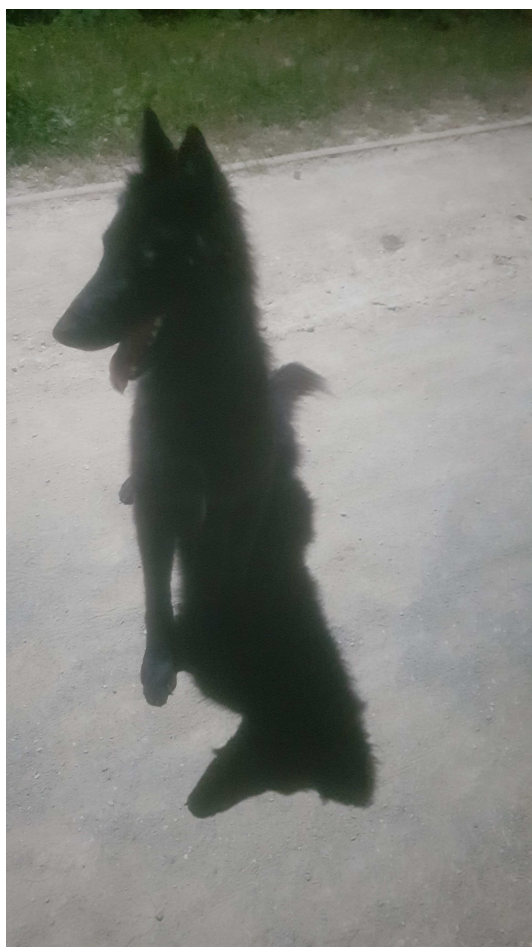


Kje se konča senca?



ALEŠ MOHORIČ IN BARBARA ROVŠEK

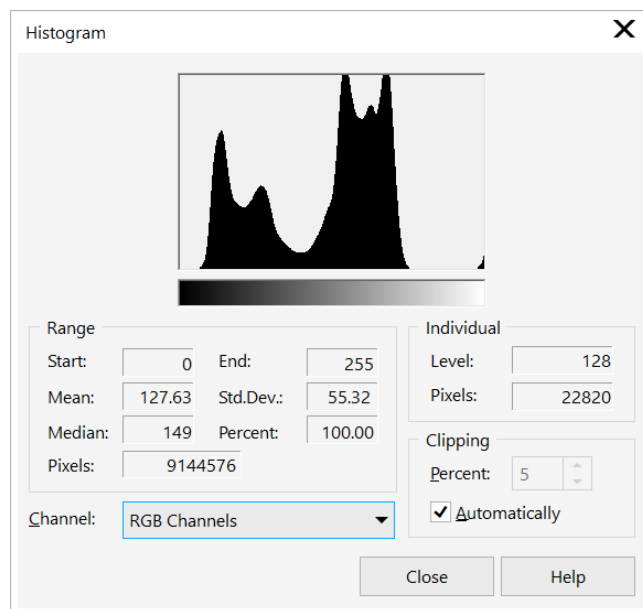
→ Oglejte si fotografijo na sliki 1. Kje se konča pes in kje se začne njegova senca? Težko rečemo. Temno pomeni na fotografiji odsotnost svetlobe, do ktere lahko pride zaradi vpijanja svetlobe na površini (pes) ali zato, ker svetloba do površine niti ne pride (senca). Vseeno pa se nekaj svetlobe od teh površin odbije in nam pomaga pri razločevanju. Fotogra-



SLIKA 1.

Nočna fotografija črnega psa pod svetilko

fija ima visok razpon svetlosti, a hkrati majhen delež srednjih. To najlažje vidimo na histogramu fotografije. Histogram kaže število slikovnih elementov (pikslov) z dano svetlostjo, ki jo pri digitalnih slikah običajno predstavijo s celim številom v intervalu od 0 do 255. Svetlost slikovnega elementa digitalne fotografije lahko izračunamo kot aritmetično sredino RGB vrednosti elementa. RGB vrednosti predstavljajo barvo elementa, ki jo dobimo z aditivnim mešanjem rdeče R, zelene G in modre B. V digitalni fotografiji običajno barvo tvorimo z 255 odtenki posamezne glavne barve, kar nam omogoča predstaviti $255 \times 255 \times 255 > 16$ milijonov različnih barvnih odtenkov. Tako npr. $R = 255, G = 0, B = 0$ pomeni čisto rdečo barvo, $R = 100, G = 0, B = 0$, temnejšo rdečo, $R = 255, G = 255, B = 0$ pa rumeno barvo. Svetlost 255 ima bela barva z $R = 255, G = 255$ in $B = 255$, črna pa ima svetlost 0.



SLIKA 2.

Histogram fotografije na sliki 1

Histogram prikaže boljši fotoaparati hkrati, ko delamo fotografijo, prikaže pa ga tudi vsak boljši program za obdelavo slik. Na histogramu fotografije na sliki 2 vidimo dva izrazitejša vrha, enega na levi, pri nižjih vrednostih (pes in senca), drugega na desni, pri višjih (svetla cesta).

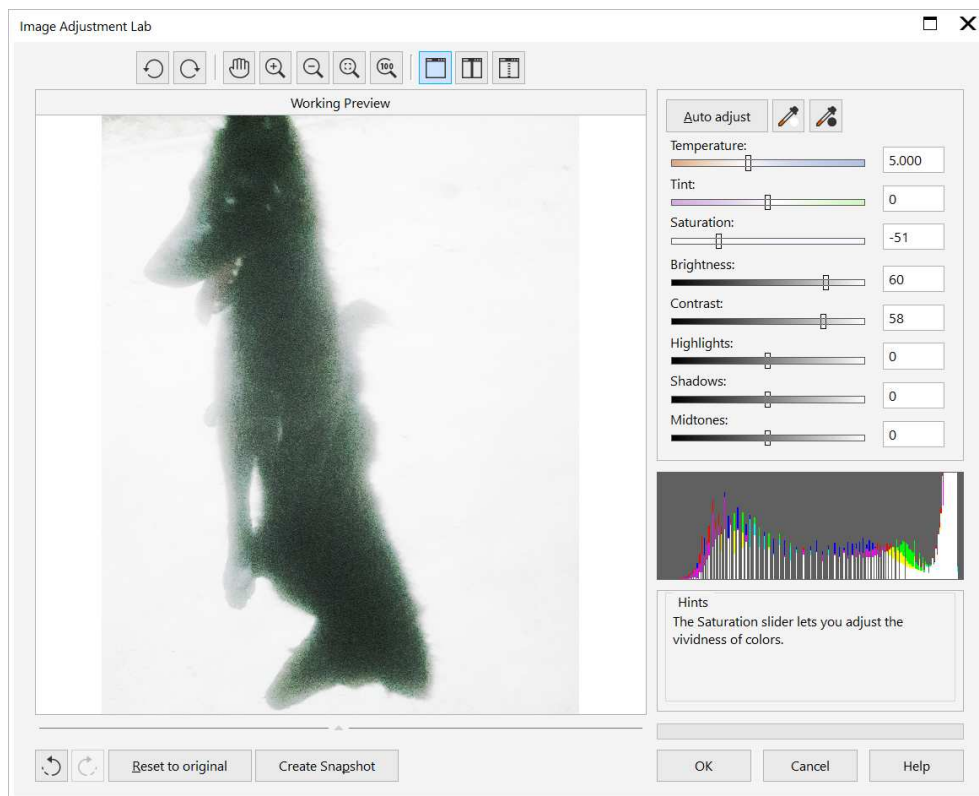
Pri fotografijah, na katerih so hkrati zelo svetli in temni deli, imamo težavo z nastavitvijo časa osvetlitve slikovnega tipala. Če nastavimo daljši čas, bodo na sliki vidne podrobnosti temnih delov (psa in senca), svetli pa bodo čisto beli – nadosvetljeni. Če želimo razbrati podrobnosti na svetlih delih (cesti), fotografijo osvetlimo manj, vendar so potem temni deli (pes in senca) čisto črni.

V takih primerih si lahko pomagamo tako, da naredimo eno nadosvetljeno in eno podosvetljeno fotografijo, potem pa sliki združimo, tako da od podosvetljene obdržimo svetle dele, od nadosvetljene pa

temne dele fotografije. Združimo jih lahko tudi s posebnimi algoritmi, ki primerno obtežujejo slikovne elemente posameznih slik. Tako obdelavo digitalnih fotografij imenujemo HDR (high dynamic range – visoko dinamično območje).

Če imamo na voljo le eno samo fotografijo, lahko temnejše dele naredimo bolj razločne tako, da povečamo svetlost in kontrast slike. S tem postanejo svetli deli skoraj beli in na njih ne vidimo več podrobnosti. Slika 3 kaže tako spremenjeno fotografijo. Na desni je prikazan tudi histogram, na katerem so zdaj svetli deli vidni kot ozek vrh čisto na desni, temni deli pa so raztegnjeni čez večino intervala svetlosti. Iz temine senca in psa se nekoliko razločijo obrisi prednje leve tace.

Vidimo, da obstaja način, kako pogledati v senco, toda kakovost fotografije s tem ni večja; na to bi morali misliti že takrat, ko smo fotografijo posneli.



SLIKA 3.

Fotografija z močno povečano svetlostjo in povečanim kontrastom. Svetli deli fotografije so beli, v temnih pa se začenjajo pojavljati obrisi leve sprednje tačke.

× × ×

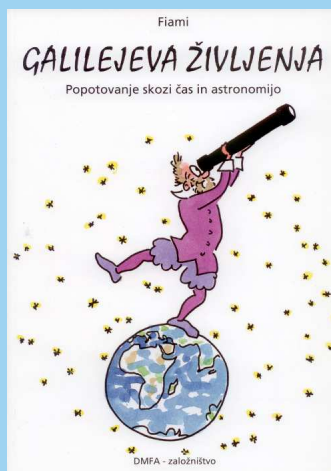
Zgodovina znanosti v stripu

Sredi decembra 2012 je Center za mladinsko književnost in knjižničarstvo pri Mestni knjižnici Ljubljana že tretjič podelil priznanja Zlata hruška. Z njimi so tokrat odlikovali kakovostno najboljših deset odstotkov otroške in mladinske književnosti, ki je izšla v letu 2011. DMFA-založništvo je priznanje prejelo za strip *Življenja Marie Curie*.

Švicarski avtor Raphaël Fiammingo, s kratkim umetniškim imenom Fiami, v tem stripu večjega formata duhovito predstavlja nekaj izsekov iz zgodovine kemije, od Aristotela do današnjega časa. V vsakem razdelku nastopa dekle ali ženska, katere ime je različica imena Marija, v čast veliki znanstvenici Marie Curie. Zgodbice ilustrirajo tudi vlogo žensk v raznih zgodovinskih obdobjih. Predvsem pa so zabavne in obenem poučne, saj zvemo marsikakšno zanimivo podrobnost o nastanku znanstvenih odkritij. Med najbolj posrečenimi je zgodbica o Mendeljejevu in njegovem sestavljanju periodnega sistema elementov. Tudi druge pripovedi ne zaostajajo. Knjigo je odlično prevedel prof. dr. Alojz Kodre.



7,68 EUR



7,68 EUR



8,31 EUR

Pri DMFA-založništvo sta v Presekovi knjižnici izšli še dve knjigi istega avtorja

- *Galilejeva življenja*, z zgodbami iz zgodovine astronomije, od Babiloncev do danes, ter
- *Einsteinova življenja*, z zgodbami iz zgodovine fizike, vse od Sokrata do danes.

Ta dva stripa je prav tako izvrstno prevedel Alojz Kodre. Sta enako zanimiva, zabavna in poučna in bosta bralcu brez dvoma polepšala dan.

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitev so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA-založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 633.