PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **32** (2004/2005)
Številka 6
Strani 15–17

Ivan Lisac:

PROŽNI TRK UREJA HITROSTI

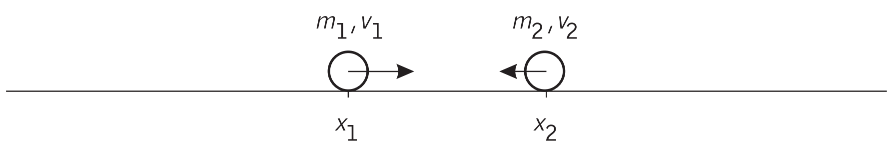
Ključne besede: fizika, prožni trk, hitrost, masne točke, premo gibanje, gibalna količina, kinetična energija.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/32/1605-Lisac.pdf

Prožni trk urejo hitrosti

Vzemimo dve masni točki in ju postavimo na premico, ki jo opremimo s koordinatnim sistemom. Točki naj imata masi m_1 in m_2 ter začetni koordinati x_1 in x_2. Pri tem naj bo $x_1 < x_2$. Nadalje naj imata točki začetni hitrosti v_1 in v_2, usmerjeni vzdolž premice.

Slika 1. Možno začetno stanje



Opazujmo, kaj se dogaja. Točki se začneta premikati vzdolž premice in morda tudi trčita. Definirajmo dve funkciji, ki opisujeta koordinati obeh točk. Dokler točki ne trčita, se gibljeta premo enakomerno, zato za $i = 1{,}2$ in koordinato $x_i(t)$ ob (dovolj majhnem) času $t \geq 0$ velja

$$x_i(t) = x_i + v_i t\,. \tag{1}$$

Kakšen je pogoj, da točki trčita? Točki trčita natanko tedaj, ko sta po preteku pozitivnega časa t_0 njuni koordinati enaki, torej je

$$x_1 + v_1 t_0 = x_2 + v_2 t_0. \tag{2}$$

Da bo enačba (2) rešljiva, morata biti hitrosti v_1 in v_2 različni; če sta namreč enaki, sledi iz (2) tudi $x_1 = x_2$, kar pa je v nasprotju s privzetkom $x_1 < x_2$. Rešitev enačbe (2) je čas trka

$$t_0 = \frac{x_2 - x_1}{v_1 - v_2}\,. \tag{3}$$

Ker mora biti čas trka t_0 pozitiven, mora biti imenovalec ulomka v (3) pozitiven. Torej je potrebni in zadostni pogoj za nastop trka neenakost $v_1 > v_2$.

Kolikšni sta hitrosti točk po trku? Predpostavimo, da gre za *prožni trk*, pri katerem se ohranjata skupna gibalna količina in skupna kinetična energija. Ponovimo fizikalno: gibalna količina telesa z maso m in hitrostjo v je produkt mv, njegova kinetična energija pa je $\frac{1}{2}\,mv^2$. Recimo, da sta hitrosti točk po trku v_1' in v_2'. Potem veljata enačbi za ohranitev gibalne količine

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \tag{4}$$

in kinetične energije (pomnožene z 2)

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2. \tag{5}$$

To sta dve enačbi za neznanki v_1' in v_2'. Rešimo ta sistem. Iz (4) izrazimo člen $m_1 v_1'$ in ga vstavimo v enačbo (5), pomnoženo z m_1. Dobimo

$$m_1^2 v_1^2 + m_1 m_2 v_2^2 = (G - m_2 v_2')^2 + m_1 m_2 v_2'^2, \tag{6}$$

kjer smo z G označili skupno gibalno količino $G = m_1 v_1 + m_2 v_2$. To je kvadratna enačba za spremenljivko v_2', ki se urejena glasi

$$(m_2^2 + m_1 m_2) v_2'^2 - 2 G m_2 v_2' + G^2 - m_1^2 v_1^2 - m_1 m_2 v_2^2 = 0. \tag{7}$$

Diskriminanta kvadratne enačbe (7) v spremenljivki v_2' je

$$D = 4G^2 m_2^2 - 4 m_2 (m_1 + m_2) \cdot (G^2 - m_1^2 v_1^2 - m_1 m_2 v_2^2). \tag{8}$$

Ko jo uredimo, dobimo

$$D = 4G^2 m_2^2 - 4 m_2^2 (m_1 + m_2)(2 m_1 v_1 v_2 + m_2 v_2^2 - m_1 v_2^2) \tag{9}$$

in nato še

$$D = 4 m_1^2 m_2^2 (v_1 - v_2)^2. \tag{10}$$

Za hitrost v_2' dobimo dve rešitvi:

$$v_2' = \frac{2 G m_2 \pm \sqrt{D}}{2 m_2 (m_1 + m_2)}. \tag{11}$$

Ker je $v_1 > v_2$, je $\sqrt{D} = 2 m_1 m_2 (v_1 - v_2)$ in

$$v_2' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 \pm m_1 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \tag{12}$$

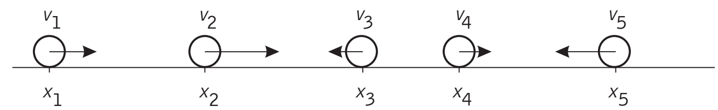
Če v (12) vzamemo pri znaku $\pm$ minus, dobimo $v_2' = v_2$, to pa je hitrost, ki jo ima točka pred trkom. Tudi pred trkom se namreč gibalna količina in kinetična energija ohranjata. To že vemo. Stanje po trku pa opisuje znak plus: hitrost v_2' je

$$v_2' = \frac{2 m_1 v_1 + (m_2 - m_1) v_2}{m_1 + m_2}. \tag{13}$$

Hitrost v_1' dobimo najlažje zaradi simetrije v problemu (vlogi točk sta zamenljivi) iz (13) z zamenjavo indeksov ($1 \longleftrightarrow 2$):

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \tag{14}$$

Vzemimo sedaj, da sta masi obeh točk enaki, $m_1 = m_2$. Iz (13) in (14) dobimo v tem primeru $v_2' = v_1$ in $v_1' = v_2$. Kaj to pomeni? Na masni točki lahko gledamo kot na nosilca hitrosti, s katerima se gibljeta. Ker je pred trkom $v_1 > v_2$ in po trku $v_1' < v_2'$, lahko rečemo, da trk obe hitrosti uredi (tako da ima prva točka manjšo hitrost od druge). Pri tem merimo hitrosti z realnimi števili, tako da negativna števila pomenijo gibanje 'v levo', pozitivna števila pa gibanje 'v desno'.

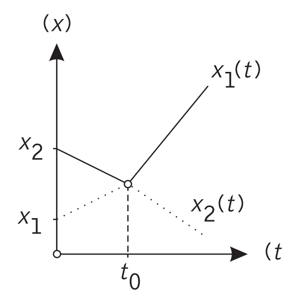


Slika 2. Več masnih točk z enako maso

Vzemimo sedaj n točk z enakimi masami. Točke postavimo na premico, tako da je $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, in jim dodelimo začetne hitrosti $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Dokler ne pride do trkov, se koordinata i-te točke spreminja po enačbi (1).

Kaj pa se bo zgodilo s temi točkami ob trkih? Najprej ugotovimo, da lahko trčijo samo sosednje točke. Zaporedje trkov, ki bo nastalo, lahko opazujemo kot zaporedje trkov dveh sosednjih točk. Predočimo si dogajanje ob trku dveh točk v koordinatnem sistemu, ki ima za abscisno os čas (t), za ordinatno os pa lego (x). Denimo še, da gre kar za prvi dve točki, ki jima pripadata funkciji $x_1(t)$ in $x_2(t)$.

Slika 3 kaže grafa dveh funkcij $x_1(t) = x_1 + v_1 t$ in $x_2(t) = x_2 + v_2 t$. Gre za linearni funkciji; vsaka je predstavljena z enim poltrakom. Pred trkom opisuje lego prve točke funkcija $x_1(t)$, lego druge točke pa funkcija $x_2(t)$. Vemo, da ob trenutku trka točki medsebojno zamenjata hitrosti, njuni legi pa sta za hip enaki. Po trku opisuje lego prve točke funkcija $x_2(t)$, lego druge točke pa funkcija $x_1(t)$. Grafično smo tir prve točke narisali pikčasto, tir druge točke pa s polno črto.



Slika 3. Trk dveh točk

Premišljali smo za dve točki, narisali dva poltraka in dobili dva tira, pri n točkah bi narisali n poltrakov in dobili n tirov (slika n tirov bi bila še bolj zgoščena, zato jo bomo opustili). Ker dobimo tire točk iz n poltrakov in se dva poltraka v ravnini kvečjemu enkrat sekata, lahko ugotovimo, da je vseh trkov kvečjemu toliko, kot je parov poltrakov, teh pa je

$$1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}. \qquad (15)$$

Trkov je torej samo končno mnogo. Omenimo, da je predpostavka enakih mas pomembna, pri izpustitvi tega pogoja pravilo o zamenjavi hitrosti ne velja več, števila trkov pa ne moremo več preprosto omejiti.

Sedaj pa lahko (do neke mere) ugotovimo, kaj se zgodi s točkami. Po preteku nekega časa, v katerem so opravljeni vsi trki, do trkov več ne prihaja. Označimo takratne hitrosti točk z $v_1', v_2', \dots, v_n'$ po vrsti od leve proti desni. Spomnimo se, da je zadostni pogoj za nastop trka med dvema sosednjima točkama (levo in desno) ta, da je hitrost leve točke večja od hitrosti desne točke. Ker do trkov več ne prihaja, velja negacija tega pogoja: hitrost vsake leve točke je manjša ali enaka hitrosti sosednje desne točke, ali formalno:

$$v_1' \le v_2' \le \cdots \le v_n'. \qquad (16)$$

Povzemimo in upravičimo naslov članka:

Hitrosti točk z enako maso so po koncu trkov naraščajoče urejene.

Za konec pa nekaj nalog.

Naloge

1. Na tirnicah se nahajata dva (idealna) vozička z masama $m_1=20$kg in $m_2=30$kg. Prvega porinemo v desno s hitrostjo $v_1=2\text{ms}^{-1}$, drugega pa istočasno v levo s hitrostjo $v_2=-1\text{ms}^{-1}$. Določi hitrosti obeh vozičkov po (prožnem) trku.

2. V drugem poskusu porinemo levi voziček iz prve naloge s hitrostjo $v_1=3\text{ms}^{-1}$ v desno. S kolikšno hitrostjo moramo poriniti desni voziček, da se bo ob (prožnem) trku ustavil
(a) levi voziček,
(b) desni voziček?

3. Na vodoravno oporo imamo privezanih n enakih visečih kroglic, ki v začetku mirujejo in se po vrsti dotikajo. Skrajno levo kroglico odmaknemo v levo in jo spustimo. Razloži, kaj se bo zgodilo in zakaj.

4. Dana je permutacija π števil od 1 do n. Permutacija π je sestava samih sosednjih transpozicij. Pri tem je sosednja transpozicija permutacija, ki zamenja sosednji števili i in $i+1$. Dokaži. Sestavi permutacijo

$$\pi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&1&5&2&3\end{pmatrix}$$

iz samih sosednjih transpozicij.

Ivan Lisac

Rešitve

1. Uporabimo enakosti (13) in (14). Dobimo $v_1'=-1.6\text{ms}^{-1}$ in $v_2'=1.4\text{ms}^{-1}$.

2. (a) V (14) postavimo $v_1'=0$ in rešimo:

$$v_2=\frac{m_2-m_1}{2m_2}v_1=0.5\,\text{ms}^{-1}.$$

(b) V (13) postavimo $v_2'=0$ in rešimo:

$$v_2=\frac{2m_1}{m_1-m_2}v_1=-12\text{ms}^{-1}.$$

3. Leva kroglica po spustu pridobi hitrost $v_1>0$. Začetne hitrosti ostalih kroglic so enake 0. V trenutku prožnih trkov se hitrosti uredijo, kar pomeni, da skrajno desna kroglica dobi hitrost v_1, vse levo od nje pa ostanejo pri miru.

4. Za dano permutacijo π postavimo na premico n točk, tako da i-ti točki dodelimo hitrost $\pi(i)$. Trku dveh sosednjih točk ustreza sosednja transpozicija, ki predstavlja ustrezno zamenjavo hitrosti teh točk. Po koncu trkov ima i-ta točka hitrost i; to stanje predstavlja identično permutacijo. Res je torej π sestava samih sosednjih transpozicij. Še primer ($\circ$ je sestava permutacij):

$$\pi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&1&5&2&3\end{pmatrix}=(34)\circ(45)\circ(23)\circ(34)\circ(12).$$